

À PROPOS DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(m^2 + Dmn + n^2) = f(m)^2 + Df(m)f(n) + f(n)^2$

Bruno Langlois (Orsay, France)

Communicated by Bui Minh Phong

(Received June 12, 2023; accepted July 10, 2023)

Abstract. When $D \in \{4, 5, 6\}$, we prove that the only solution to the functional equation $f(m^2 + Dmn + n^2) = f(m)^2 + Df(m)f(n) + f(n)^2$ with $f(1) = 1$ is the identity function.

Résumé. Lorsque $D \in \{4, 5, 6\}$, nous prouvons que la seule solution de l'équation fonctionnelle $f(m^2 + Dmn + n^2) = f(m)^2 + Df(m)f(n) + f(n)^2$ telle que $f(1) = 1$ est la fonction identité.

1. Introduction

Dans tout l'article, l'ensemble des entiers strictement positifs sera noté $\mathbb{N}^*$. Une fonction arithmétique est une application définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit D un entier supérieur ou égal à -1 ; on considère le polynôme

$$P_D = X^2 + DXY + Y^2,$$

ainsi que l'équation fonctionnelle

$$(\mathcal{E}_D) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad f(P_D(m, n)) = P_D(f(m), f(n)).$$

Le but de cet article est de prouver les deux résultats suivants:

Key words and phrases: Arithmetical functions, functional equations.

2010 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11N25, 11N64.

<https://doi.org/10.71352/ac.55.209>

Théorème 1. *Si f est une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_2)$, alors il y a trois possibilités:*

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = 0$.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{4}$.
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = n$.

Théorème 2. *Soit $D \in \{4, 5, 6\}$; si f est une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_D)$ et telle que $f(1) = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = n$.*

Le cas $D = 2$ a déjà été étudié par B.M.M. Khanh (voir [2]) mais en supposant que $f(1) = 1$; dans mon théorème 1, rien n'est supposé sur $f(1)$. Dans le même article, l'auteur a prouvé le théorème 2 ci-dessus dans le cas où $D = 3$.

L'équation $(\mathcal{E}_D)$ a été étudiée dans le cas où $D = \pm 1$ par P.-S. Park, dans le cas où f est multiplicative (voir [3]), puis par B.M. Phong et R.B. Szeidl dans le cas général; les auteurs ont prouvé que le théorème 2 ci-dessus était vérifié lorsque $D = 1$ (voir [4]), et également lorsque $D = -1$, cette fois sans même supposer que $f(1) = 1$ (voir [5]).

Je vais essentiellement utiliser les techniques développées par les auteurs précédents, en recourant en outre à la notion de *base de Gröbner* d'un idéal de l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_k]$. Pour cela, je m'appuierai sur les logiciels de calcul formel Giac/Xcas et Maple qui mettent en oeuvre certains algorithmes (comme celui de B. Buchberger et ceux de J.C. Faugère) pour produire une base de Gröbner de l'idéal engendré par une suite finie de polynômes. Cela me permettra de résoudre certains systèmes d'équations polynomiales, impliquant pourtant parfois de très "gros" polynômes. Je renvoie le lecteur soucieux d'en savoir plus sur les bases de Gröbner à [1].

Enfin, j'utiliserai plusieurs fois le résultat suivant (démontré dans [4]; voir lemme 1 pp. 257–258):

Propriété 1. *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_D)$. Si l'une des trois assertions suivantes est vérifiée:*

- (a) $\forall n \in [1, 8D + 20], f(n) = 0$,
- (b) $\forall n \in [1, 8D + 20], f(n) = \frac{1}{D+2}$,
- (c) $\forall n \in [1, 8D + 20], f(n) = n$,

alors on a $f(n) = 0$ (resp. $f(n) = \frac{1}{D+2}$, $f(n) = n$) pour tout $n \in \mathbb{N}^$.*

2. Cas où $D = 2$

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème 1. Soit f une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_2)$. On peut remarquer que:

$$324 = P_2(2, P_2(2, 2)) = P_2(P_2(1, 2), P_2(1, 2)),$$

$$15625 = P_2(P_2(1, 1), P_2(2, P_2(1, 2))) = P_2(P_2(1, P_2(1, 1)), P_2(1, P_2(1, 2))),$$

$$105625 = P_2(1, P_2(2, P_2(2, 2))) = P_2(P_2(2, P_2(1, 1)), P_2(1, P_2(2, 2))).$$

Cela entraîne que $a = f(1)$ et $b = f(2)$ sont solutions du système d'équations polynomiales :

$$\{Q_1(a, b) = 0, Q_2(a, b) = 0, Q_3(a, b) = 0\},$$

où Q_1, Q_2 et Q_3 sont les polynômes de $\mathbb{Q}[A, B]$ suivants :

$$Q_1 = P_2(B, P_2(B, B)) - P_2(P_2(A, B), P_2(A, B)),$$

$$Q_2 = P_2(P_2(A, A), P_2(B, P_2(A, B))) - P_2(P_2(A, P_2(A, A)), P_2(A, P_2(A, B))),$$

$$Q_3 = P_2(A, P_2(B, P_2(B, B))) - P_2(P_2(B, P_2(A, A)), P_2(A, P_2(B, B))).$$

Giac/Xcas (confirmé par Maple) fournit la base de Gröbner $\mathcal{BG}$ de l'idéal de $\mathbb{Q}[A, B]$ engendré par $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ suivante:

$$(4AB^2 + 4A^2 - 5B^2, A^2B - B^3 - 2A^2 + 2B^2, 4A^3 - B^2, 16B^4 + 84A^2 - 85B^2).$$

On en déduit que $b^2 = 4a^3$, puis que $4a(4a^3) + 4a^2 - 5(4a^3) = 0$, ce qui équivaut à $4a^2(a - 1)(4a - 1) = 0$.

Il y a donc trois cas:

(i) $a = 0$.

$b^2 = 4a^3$ entraîne que $b = 0$.

Comme $P_2 = (X + Y)^2$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n, 2) = P(n + 1, 1)$, d'où $P(f(n), 0) = P(f(n + 1), 0)$, soit $f(n)^2 = f(n + 1)^2$. Cela permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = 0$.

(ii) $a = \frac{1}{4}$.

$b^2 = 4a^3$ entraîne que $b^2 = \frac{1}{16}$.

Remarquons que $16 = P_2(1, 3) = P_2(2, 2)$ et $25 = P_2(2, 3) = P_2(1, P_2(1, 1))$, par conséquent si on avait $b = -\frac{1}{4}$, on aurait $P_2(\frac{1}{4}, f(3)) = P_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ et $P_2(-\frac{1}{4}, f(3)) = P_2(\frac{1}{4}, P(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}))$, ce qui entraînerait que $f(3)$ est à la fois racine des polynômes $16X^2 + 8X - 3$ et $16X^2 - 8X - 3$, ce qui est absurde.

On en déduit que $f(2) = \frac{1}{4}$.

On a cette fois $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(f(n), \frac{1}{4}) = P(f(n+1), \frac{1}{4})$, d'où $f(n+1) = f(n)$ ou $f(n+1) = -f(n) - \frac{1}{2}$. Cela permet de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \in \{\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(n) = -\frac{3}{4}$. On a alors $f(P_2(n, n)) = P_2(f(n), f(n)) = 4f(n)^2 = \frac{9}{4}$, d'où $f(P_2(n, n)) \notin \{\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{1}{4}$.

(iii) $a = 1$.

Il suffit d'utiliser [2] (voir théorème 1 p 196) pour conclure qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$. ■

3. Cas où $D = 4$

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème 2 lorsque $D = 4$. Soit f une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_4)$ et telle que $f(1) = 1$. On a $f(P_4(1, 1)) = P_4(f(1), f(1))$, donc $f(6) = 6$.

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
 16054 &= P_4(5, \underbrace{P_4(3, 6)}_{117}) = P_4(\underbrace{P_4(1, 4)}_{33}, \underbrace{P_4(3, 4)}_{73}), \\
 41691732 &= P_4(\underbrace{P_4(4, 6)}_{148}, \underbrace{P_4(5, P_4(2, 5))}_{6166}) = \\
 &= P_4(\underbrace{P_4(5, P_4(2, 3))}_{2134}, \underbrace{P_4(P_4(1, 3), P_4(2, 2))}_{3172}), \\
 114726534 &= P_4(\underbrace{P_4(3, P_4(1, 3))}_{757}, \underbrace{P_4(P_4(1, 4), P_4(1, 5))}_{9277}) = \\
 &= P_4(\underbrace{P_4(3, P_4(2, 4))}_{3377}, \underbrace{P_4(P_4(2, 2), P_4(2, 3))}_{5497}), \\
 245140197 &= P_4(\underbrace{P_4(1, 3)}_{22}, \underbrace{P_4(2, P_4(4, 5))}_{15613}) = \\
 &= P_4(\underbrace{P_4(P_4(1, 3), P_4(1, 4))}_{4477}, \underbrace{P_4(P_4(1, 2), P_4(2, 5))}_{8518}), \\
 112385977 &= P_4(\underbrace{P_4(6, P_4(2, 4))}_{3988}, \underbrace{P_4(P_4(1, 2), P_4(1, 5))}_{4677}) = \\
 &= P_4(\underbrace{P_4(3, P_4(1, 3))}_{757}, \underbrace{P_4(4, P_4(2, 6))}_{9168}).
 \end{aligned}$$

On en déduit que $a = f(2)$, $b = f(3)$, $c = f(4)$ et $d = f(5)$ vérifient le système d'équations polynomiales ci-dessous :

$$\{Q_1(a, b, c, d) = 0, \quad Q_2(a, b, c, d) = 0, \quad Q_3(a, b, c, d) = 0, \\ Q_4(a, b, c, d) = 0, \quad Q_5(a, b, c, d) = 0\},$$

où Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 sont les polynômes de $\mathbb{Q}[A, B, C, D]$ suivants:

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_4(D, P_4(B, 6)) - P_4(P_4(1, C), P_4(B, C)), \\ Q_2 &= P_4(P_4(C, 6), P_4(D, P_4(A, D))) - \\ &\quad - P_4(P_4(D, P_4(A, B)), P_4(P_4(1, B), P_4(A, A))), \\ Q_3 &= P_4(P_4(B, P_4(1, B)), P_4(P_4(1, C), P_4(1, D))) - \\ &\quad - P_4(P_4(B, P_4(A, C)), P_4(P_4(A, A), P_4(A, B))), \\ Q_4 &= P_4(P_4(1, B), P_4(A, P_4(C, D))) - \\ &\quad - P_4(P_4(P_4(1, B), P_4(1, C)), P_4(P_4(1, A), P_4(A, D))), \\ Q_5 &= P_4(P_4(6, P_4(A, C)), P_4(P_4(1, A), P_4(1, D))) - \\ &\quad - P_4(P_4(B, P_4(1, B)), P_4(C, P_4(A, 6))). \end{aligned}$$

Giac/Xcas (confirmé par Maple) fournit la base de Gröbner de l'idéal de $\mathbb{Q}[A, B, C, D]$ engendré par $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ suivante:

$$\mathcal{BG} = (A - 2, B - 3, C - 4, D - 5),$$

ce qui implique que $(a, b, c, d) = (2, 3, 4, 5)$.

D'après la propriété 1, il suffit désormais de démontrer que $\forall n \in [7, 52]$, $f(n) = n$.

- 13, 22, 24, 33, 37, 46 et 52 s'écrivent sous la forme $P_4(m, n)$, avec m et n dans $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, donc $(f(13), f(22), f(24), f(33), f(37), f(46), f(52)) = (13, 22, 24, 33, 37, 46, 52)$.

- On a $P_4(7, P_4(3, 3)) = P_4(22, 33)$,
et $P_4(13, P_4(1, 46)) = P_4(P_4(4, 7), P_4(13, 24))$,
donc $P_4(z, P_4(3, 3)) = P_4(22, 33)$,
et $P_4(13, P_4(1, 46)) = P_4(P_4(4, z), P_4(13, 24))$, en posant $z = f(7)$.

$f(7)$ est donc racine des deux polynômes $Z^2 + 216Z - 1561$ et $Z^4 + 32Z^3 + 8260Z^2 + 128064Z - 1314565$, dont le PGCD vaut $Z - 7$, ce qui prouve que $f(7) = 7$.

- On a $P_4(37, P_4(8, 13)) = P_4(P_4(6, 7), P_4(7, 8))$,
et $P_4(P_4(5, 8), P_4(1, P_4(3, 5))) = P_4(P_4(1, 52), P_4(22, 37))$,
donc $P_4(37, P_4(z, 13)) = P_4(P_4(6, 7), P_4(7, z))$
et $P_4(P_4(5, z), P_4(1, P_4(3, 5))) = P_4(P_4(1, 52), P_4(22, 37))$, en posant $z = f(8)$.

$f(8)$ est donc racine des deux polynômes $48Z^3 + 1296Z^2 - 5808Z - 61056$ et $Z^4 + 40Z^3 + 37302Z^2 + 738040Z - 8316224$, dont le PGCD vaut $Z - 8$, ce qui prouve que $f(8) = 8$.

• En raisonnant de même, on obtient successivement les résultats résumés dans le tableau suivant. Sur chaque ligne, on a indiqué deux polynômes Q_1 et Q_2 qui possèdent $f(n)$ pour racine et qui permettent de conclure que $f(n) = n$.

n	$Q_1(Z)$	$Q_2(Z)$
9	$P_4(Z, 22) - P_4(2, 33)$	$P_4(1, P_4(3, Z)) - P_4(33, P_4(3, 7))$
10	$P_4(8, P_4(1, Z)) - P_4(13, P_4(2, 8))$	$P_4(Z, P_4(3, 5)) - P_4(46, 46)$
11	$P_4(2, P_4(8, Z)) - P_4(33, P_4(7, Z))$	$P_4(8, P_4(6, Z))$ $- P_4(P_4(2, 8), P_4(3, 10))$
12	$P_4(7, P_4(2, Z)) - P_4(52, P_4(3, 8))$	$P_4(Z, P_4(3, 9))$ $- P_4(P_4(3, 3), P_4(2, 8))$
14	$P_4(1, Z) - P_4(6, 7)$	$P_4(Z, 33) - P_4(1, P_4(3, 3))$
15	$P_4(1, Z) - P_4(5, 9)$	$P_4(Z, P_4(1, 10))$ $- P_4(P_4(2, 5), P_4(2, 5))$
16	$P_4(11, Z) - P_4(5, 24)$	$P_4(Z, P_4(3, 4)) - P_4(7, P_4(2, 6))$
17	$P_4(2, Z) - P_4(7, 10)$	$P_4(16, Z) - P_4(4, 33)$
18	$P_4(Z, P_4(2, 14))$ $- P_4(P_4(1, 7), P_4(6, 6))$	$P_4(Z, P_4(5, 13))$ $- P_4(P_4(1, 9), P_4(7, 7))$
19	$P_4(2, Z) - P_4(6, 13)$	$P_4(3, Z) - P_4(9, 11)$
20	$P_4(1, Z) - P_4(4, 15)$	$P_4(3, Z) - P_4(8, 13)$
21	$P_4(4, Z) - P_4(11, 12)$	$P_4(Z, P_4(2, 6)) - P_4(4, P_4(3, 6))$
23	$P_4(3, Z) - P_4(7, 17)$	$P_4(7, Z) - P_4(1, 33)$
25	$P_4(1, Z) = P_4(11, 11)$	$P_4(6, Z) - P_4(14, 15)$
26	$P_4(1, Z) - P_4(9, 14)$	$P_4(5, Z) - P_4(10, 19)$
27	$P_4(2, Z) - P_4(5, 22)$	$P_4(4, Z) - P_4(8, 21)$
28	$P_4(1, Z) - P_4(8, 17)$	$P_4(2, Z) - P_4(12, 14)$
29	$P_4(6, Z) - P_4(11, 22)$	$P_4(7, Z) - P_4(13, 21)$
30	$P_4(2, Z) - P_4(10, 18)$	$P_4(29, Z) - P_4(6, P_4(1, 6))$
31	$P_4(5, Z) - P_4(9, 25)$	$P_4(3, Z) - P_4(13, 17)$
32	$P_4(3, Z) - P_4(12, 19)$	$P_4(7, Z) - P_4(12, 25)$
34	$P_4(4, Z) - P_4(14, 20)$	$P_4(9, Z) - P_4(15, 26)$
35	$P_4(6, Z) - P_4(10, 29)$	$P_4(8, Z) - P_4(13, 28)$
36	$P_4(1, Z) - P_4(15, 16)$	$P_4(5, Z) - P_4(16, 21)$
38	$P_4(3, Z) - P_4(10, 27)$	$P_4(4, Z) - P_4(12, 26)$
39	$P_4(7, Z) - P_4(11, 33)$	$P_4(2, Z) - P_4(17, 18)$
40	$P_4(2, Z) - P_4(8, 30)$	$P_4(6, Z) - P_4(16, 26)$
41	$P_4(4, Z) - P_4(7, 36)$	$P_4(1, Z) - P_4(11, 25)$
42	$P_4(5, Z) - P_4(13, 30)$	$P_4(3, Z) - P_4(18, 21)$
43	$P_4(4, Z) - P_4(11, 32)$	$P_4(2, Z) - P_4(13, 26)$

44	$P_4(11, Z) - P_4(16, 37)$	$P_4(13, Z) - P_4(19, 36)$
45	$P_4(3, Z) - P_4(15, 27)$	$P_4(4, Z) - P_4(19, 24)$
47	$P_4(3, Z) - P_4(9, 37)$	$P_4(9, Z) - P_4(13, 41)$
48	$P_4(1, Z) - P_4(17, 24)$	$P_4(10, Z) - P_4(22, 32)$
49	$P_4(4, Z) - P_4(16, 31)$	$P_4(8, Z) - P_4(17, 36)$
50	$P_4(1, Z) - P_4(6, 41)$	$P_4(7, Z) - P_4(15, 38)$
51	$P_4(10, Z) - P_4(14, 45)$	$P_4(1, Z) - P_4(15, 29)$

4. Cas où $D = 5$

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème 2 lorsque $D = 5$. Soit f une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_5)$ et telle que $f(1) = 1$. On a $f(P_5(1, 1)) = P_5(f(1), f(1))$, donc $f(7) = 7$.

On peut remarquer que:

$$\begin{aligned}
85 &= P_5(3, 4) = P_5(1, 7), \\
2725 &= P_5(4, \underbrace{P_5(2, 3)}_{43}) = P_5(\underbrace{P_5(1, 2)}_{15}, \underbrace{P_5(1, 3)}_{25}), \\
3901 &= P_5(1, \underbrace{P_5(2, 4)}_{60}) = P_5(5, \underbrace{P_5(1, 5)}_{51}), \\
15745 &= P_5(1, \underbrace{P_5(2, 7)}_{123}) = P_5(7, \underbrace{P_5(3, 5)}_{109}), \\
31501 &= P_5(1, \underbrace{P_5(5, 5)}_{175}) = P_5(\underbrace{P_5(1, 5)}_{51}, \underbrace{P_5(1, 7)}_{85}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $a = f(2)$, $b = f(3)$, $c = f(4)$ et $d = f(5)$ vérifient le système d'équations polynomiales ci-dessous:

$$\begin{aligned}
\{Q_1(a, b, c, d) = 0; Q_2(a, b, c, d) = 0; Q_3(a, b, c, d) = 0; \\
Q_4(a, b, c, d) = 0; Q_5(a, b, c, d) = 0\},
\end{aligned}$$

où Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 sont les polynômes de $\mathbb{Q}[A, B, C, D]$ suivants :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= P_5(B, C) - P_5(1, 7), \\
Q_2 &= P_5(C, P_5(A, B)) - P_5(P_5(1, A), P_5(1, B)), \\
Q_3 &= P_5(1, P_5(A, C)) - P_5(D, P_5(1, D)), \\
Q_4 &= P_5(1, P_5(A, 7)) - P_5(7, P_5(B, D)), \\
Q_5 &= P_5(1, P_5(D, D)) - P_5(P_5(1, D), P_5(1, 7)).
\end{aligned}$$

Giac/Xcas (confirmé par Maple) fournit la base de Gröbner de l'idéal de $\mathbb{Q}[A, B, C, D]$ engendré par $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$ suivante :

$$\mathcal{BG} = (A - 2, \quad B - 3, \quad C - 4, \quad D - 5),$$

ce qui implique que $(a, b, c, d) = (2, 3, 4, 5)$.

D'après la propriété 1, il suffit désormais de démontrer que $\forall n \in [6, 60]$, $f(n) = n$.

• 15, 25, 28, 37, 43, 51 et 60 s'écrivent sous la forme $P_5(m, n)$, avec m et n dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, donc $(f(15), f(25), f(28), f(37), f(43), f(51), f(60)) = (15, 25, 28, 37, 43, 51, 60)$.

• On a $124525 = P_5(4, \underbrace{P_5(7, 7)}_{343}) = P_5(25, \underbrace{P_5(6, 7)}_{295})$,
 et $4396074685 = P_5(\underbrace{P_5(2, P_5(3, 3))}_{4603}, \underbrace{P_5(60, P_5(2, 7))}_{55629}) =$
 $P_5(\underbrace{P_5(4, P_5(2, 5))}_{7837}, \underbrace{P_5(43, P_5(3, 6))}_{49099}),$

donc $P_5(4, P_5(7, 7)) = P_5(25, P_5(z, 7))$,
 et $P_5(P_5(2, P_5(3, 3)), P_5(60, P_5(2, 7))) = P_5(P_5(4, P_5(2, 5)), P_5(43, P_5(3, z)))$,
 en posant $z = f(6)$.

$f(6)$ est donc racine des deux polynômes $Z^4 + 70Z^3 + 1448Z^2 + 7805Z - 115374$ et $Z^8 + 60Z^7 + 1816Z^6 + 34470Z^5 + 466379Z^4 + 4608870Z^3 + 33702095Z^2 + 163967925Z - 4168267866$,
 dont le PGCD vaut $Z - 6$, ce qui prouve que $f(6) = 6$.

• On a $133525 = P_5(28, \underbrace{P_5(1, 15)}_{301}) = P_5(\underbrace{P_5(1, 8)}_{105}, \underbrace{P_5(5, 5)}_{175})$,
 et $345625 = P_5(\underbrace{P_5(3, 7)}_{163}, \underbrace{P_5(5, 8)}_{289}) = P_5(\underbrace{P_5(4, 7)}_{205}, \underbrace{P_5(4, 8)}_{240})$,

donc $P_5(28, P_5(1, 15)) = P_5(P_5(1, z), P_5(5, 5))$,
 et $P_5(P_5(3, 7), P_5(5, z)) = P_5(P_5(4, 7), P_5(4, z))$,
 en posant $z = f(8)$.

$f(8)$ est donc racine des deux polynômes $Z^4 + 10Z^3 + 902Z^2 + 4385Z - 102024$ et $10Z^3 + 33Z^2 + 485Z - 11112$, dont le PGCD vaut $Z - 8$, ce qui prouve que $f(8) = 8$.

• En raisonnant de même, on obtient successivement les résultats résumés dans le tableau suivant. Sur chaque ligne, on a indiqué deux polynômes Q_1 et Q_2 qui possèdent $f(n)$ pour racine et qui permettent de conclure que $f(n) = n$.

n	$Q_1(Z)$	$Q_2(Z)$
9	$P_5(2, Z) - P_5(5, 5)$	$P_5(Z, 28) - P_5(4, 37)$
10	$P_5(3, P_5(1, Z)) - P_5(Z, P_5(3, 6))$	$P_5(Z, P_5(3, Z)) - P_5(P_5(1, 8), P_5(3, 5))$
11	$P_5(3, Z) - P_5(6, 7)$	$P_5(8, Z) - P_5(5, 15)$
12	$P_5(1, Z) - P_5(4, 7)$	$P_5(11, Z) - P_5(1, 28)$
13	$P_5(1, Z) - P_5(2, 11)$	$P_5(4, Z) - P_5(7, 9)$

14	$P_5(2, Z) - P_5(6, 8)$	$P_5(13, Z) - P_5(5, 25)$
16	$P_5(3, Z) - P_5(8, 9)$	$P_5(12, Z) - P_5(4, 28)$
17	$P_5(1, Z) - P_5(5, 10)$	$P_5(6, Z) - P_5(9, 13)$
18	$P_5(1, Z) - P_5(3, 14)$	$P_5(5, Z) - P_5(7, 15)$
19	$P_5(2, Z) - P_5(7, 11)$	$P_5(7, Z) - P_5(10, 15)$
20	$P_5(11, 37) - P_5(Z, 25)$	$P_5(Z, P_5(1, 8)) - P_5(9, P_5(1, 9))$
21	$P_5(2, Z) - P_5(3, 19)$	$P_5(3, Z) - P_5(9, 12)$
22	$P_5(1, Z) - P_5(6, 13)$	$P_5(9, Z) - P_5(1, 37)$
23	$P_5(1, Z) - P_5(4, 17)$	$P_5(4, Z) - P_5(11, 13)$
24	$P_5(2, Z) - P_5(8, 14)$	$P_5(1, Z) - P_5(9, 11)$
26	$P_5(2, Z) - P_5(4, 22)$	$P_5(8, Z) - P_5(14, 18)$
27	$P_5(1, Z) - P_5(7, 16)$	$P_5(2, Z) - P_5(7, 18)$
29	$P_5(3, Z) - P_5(4, 27)$	$P_5(8, Z) - P_5(1, 43)$
30	$P_5(5, Z) - P_5(14, 17)$	$P_5(15, Z) - P_5(3, 51)$
31	$P_5(6, Z) - P_5(9, 26)$	$P_5(3, Z) - P_5(11, 18)$
32	$P_5(1, Z) - P_5(8, 19)$	$P_5(3, Z) - P_5(8, 23)$
33	$P_5(1, Z) - P_5(6, 23)$	$P_5(4, Z) - P_5(13, 19)$
34	$P_5(2, Z) - P_5(10, 20)$	$P_5(17, Z) - P_5(11, 43)$
35	$P_5(9, Z) - P_5(16, 25)$	$P_5(15, Z) - P_5(18, 31)$
36	$P_5(2, Z) - P_5(6, 28)$	$P_5(3, Z) - P_5(12, 21)$
38	$P_5(1, Z) - P_5(7, 26)$	$P_5(5, Z) - P_5(13, 25)$
39	$P_5(3, Z) - P_5(6, 33)$	$P_5(1, Z) - P_5(11, 21)$
40	$P_5(13, Z) - P_5(15, 37)$	$P_5(5, Z) - P_5(16, 23)$
41	$P_5(2, Z) - P_5(7, 31)$	$P_5(3, Z) - P_5(13, 24)$
42	$P_5(4, Z) - P_5(6, 38)$	$P_5(5, Z) - P_5(10, 33)$
44	$P_5(3, Z) - P_5(7, 36)$	$P_5(2, Z) - P_5(12, 26)$
45	$P_5(2, Z) - P_5(15, 23)$	$P_5(7, Z) - P_5(15, 32)$
46	$P_5(2, Z) - P_5(8, 34)$	$P_5(3, Z) - P_5(14, 27)$
47	$P_5(4, Z) - P_5(7, 41)$	$P_5(1, Z) - P_5(11, 28)$
48	$P_5(1, Z) - P_5(9, 32)$	$P_5(4, Z) - P_5(16, 28)$
49	$P_5(4, Z) - P_5(11, 36)$	$P_5(2, Z) - P_5(13, 29)$
50	$P_5(11, Z) - P_5(14, 45)$	$P_5(12, Z) - P_5(20, 38)$
52	$P_5(4, Z) - P_5(8, 44)$	$P_5(1, Z) - P_5(12, 31)$
53	$P_5(6, Z) - P_5(7, 51)$	$P_5(4, Z) - P_5(17, 31)$
54	$P_5(3, Z) - P_5(9, 42)$	$P_5(2, Z) - P_5(14, 32)$
55	$P_5(8, Z) - P_5(17, 40)$	$P_5(4, Z) - P_5(20, 29)$
56	$P_5(1, Z) - P_5(16, 29)$	$P_5(3, Z) - P_5(16, 33)$
57	$P_5(4, Z) - P_5(9, 47)$	$P_5(1, Z) - P_5(13, 34)$
58	$P_5(6, Z) - P_5(8, 54)$	$P_5(4, Z) - P_5(18, 34)$
59	$P_5(5, Z) - P_5(15, 41)$	$P_5(11, Z) - P_5(19, 46)$

5. Cas où $D = 6$

L'objectif de cette partie est de prouver le théorème 2 lorsque $D = 6$. Soit f une fonction arithmétique vérifiant $(\mathcal{E}_6)$ et telle que $f(1) = 1$. On a $f(P_6(1, 1)) = P_6(f(1), f(1))$, donc $f(8) = 8$.

On peut remarquer que:

$$\begin{aligned} 14129 &= P_6(2, \underbrace{P_6(1, 8)}_{113}) = P_6(8, \underbrace{P_6(3, 4)}_{97}), \\ 6272 &= P_6(4, \underbrace{P_6(2, 4)}_{68}) = P_6(\underbrace{P_6(1, 3)}_{28}, \underbrace{P_6(1, 3)}_{28}), \\ 13448 &= P_6(1, \underbrace{P_6(1, 8)}_{113}) = P_6(\underbrace{P_6(1, 4)}_{41}, \underbrace{P_6(1, 4)}_{41}), \\ 48392 &= P_6(1, \underbrace{P_6(3, 8)}_{217}) = P_6(\underbrace{P_6(2, 3)}_{49}, \underbrace{P_6(1, 8)}_{113}). \end{aligned}$$

On en déduit que $a = f(2)$, $b = f(3)$ et $c = f(4)$ vérifient le système d'équations polynomiales ci-dessous:

$$\{Q_1(a, b, c) = 0, Q_2(a, b, c) = 0, Q_3(a, b, c) = 0, Q_4(a, b, c) = 0\},$$

où Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 sont les polynômes de $\mathbb{Q}[A, B, C]$ suivants :

$$\begin{aligned} Q_1 &= P_6(A, P_6(1, 8)) - P_6(8, P_6(B, C)), \\ Q_2 &= P_6(C, P_6(A, C)) - P_6(P_6(1, B), P_6(1, B)), \\ Q_3 &= P_6(1, P_6(1, 8)) - P_6(P_6(1, C), P_6(1, C)), \\ Q_4 &= P_6(1, P_6(B, 8)) - P_6(P_6(A, B), P_6(1, 8)). \end{aligned}$$

Giac/Xcas (confirmé par Maple) fournit la base de Gröbner de l'idéal de $\mathbb{Q}[A, B, C]$ engendré par $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ suivante:

$$\mathcal{BG} = (A - 2, B - 3, C - 4),$$

ce qui implique que $(a, b, c) = (2, 3, 4)$.

D'après la propriété 1, il suffit désormais de démontrer que $\forall n \in [5, 68]$, $f(n) = n$.

• 17, 28, 32, 41, 49 et 68 s'écrivent sous la forme $P_6(m, n)$, avec m et n dans $\{1, 2, 3, 4\}$, donc

$$(f(17), f(28), f(32), f(41), f(49), f(68)) = (17, 28, 32, 41, 49, 68).$$

• On a $P_6(P_6(4, 5), P_6(4, 5)) = P_6(P_6(2, 3), P_6(5, 8))$,
et $P_6(P_6(2, 4), P_6(2, 4)) = P_6(P_6(1, 3), P_6(3, 5))$,
donc $P_6(P_6(4, z), P_6(4, z)) = P_6(P_6(2, 3), P_6(z, 8))$,
et $P_6(P_6(2, 4), P_6(2, 4)) = P_6(P_6(1, 3), P_6(3, z))$,
en posant $z = f(5)$.

$f(5)$ est donc racine des deux polynômes $7Z^4 + 288Z^3 + 2138Z^2 - 14112Z - 23265$ et $Z^4 + 36Z^3 + 510Z^2 + 3348Z - 34615$, dont le PGCD vaut $Z - 5$, ce qui prouve que $f(5) = 5$.

• On a $56 = P_6(1, 5)$, donc $f(56) = 56$.

• On a $P_6(P_6(2, 4), P_6(4, 6)) = P_6(P_6(3, 5), P_6(3, 5))$,
et $P_6(8, P_6(8, 6)) = P_6(P_6(4, 4), P_6(2, 8))$,
donc $P_6(P_6(2, 4), P_6(4, z)) = P_6(P_6(3, 5), P_6(3, 5))$,
et $P_6(8, P_6(8, z)) = P_6(P_6(4, 4), P_6(2, 8))$, en posant $z = f(6)$.

$f(6)$ est donc racine des deux polynômes $Z^4 + 48Z^3 + 1016Z^2 + 10560Z - 111600$ et $Z^4 + 96Z^3 + 2480Z^2 + 8448Z - 162000$, dont le PGCD vaut $Z - 6$, ce qui prouve que $f(6) = 6$.

• En raisonnant de même, on obtient successivement les résultats résumés dans le tableau suivant. Sur chaque ligne, on a indiqué deux polynômes Q_1 et Q_2 qui possèdent $f(n)$ pour racine et qui permettent de conclure que $f(n) = n$.

n	$Q_1(Z)$	$Q_2(Z)$
7	$P_6(Z, Z) - P_6(1, P_6(1, 2))$	$P_6(Z, P_6(1, 3)) - P_6(5, P_6(2, 2))$
9	$P_6(7, P_6(1, Z)) - P_6(17, P_6(2, 6))$	$P_6(17, P_6(2, Z))$ $- P_6(P_6(1, 6), P_6(3, 4))$
10	$P_6(1, Z) - P_6(4, 5)$	$P_6(32, P_6(3, Z))$ $- P_6(P_6(2, 5), P_6(3, 7))$
11	$P_6(8, Z) - P_6(4, 17)$	$P_6(Z, 41) - P_6(7, 49)$
12	$P_6(1, Z) - P_6(3, 8)$	$P_6(4, P_6(2, Z))$ $- P_6(P_6(1, 7), P_6(3, 5))$
13	$P_6(4, Z) - P_6(2, 17)$	$P_6(2, Z) - P_6(5, 8)$
14	$P_6(13, P_6(2, Z))$ $- P_6(28, P_6(2, 13))$	$P_6(17, P_6(5, Z)) - P_6(41, P_6(8, 9))$
15	$P_6(Z, 68) - P_6(13, P_6(3, 3))$	$P_6(P_6(3, 4), P_6(2, Z))$ $- P_6(1, P_6(5, 14))$
16	$P_6(3, Z) - P_6(6, 11)$	$P_6(Z, 17) - P_6(2, 41)$
18	$P_6(28, P_6(2, Z))$ $- P_6(68, P_6(4, 12))$	$P_6(P_6(1, 6), P_6(5, Z))$ $- P_6(P_6(1, 10), P_6(7, 12))$
19	$P_6(1, Z) - P_6(5, 11)$	$P_6(4, Z) - P_6(7, 14)$
20	$P_6(2, Z) - P_6(8, 10)$	$P_6(Z, P_6(3, 4)) - P_6(13, P_6(2, 6))$
21	$P_6(2, Z) - P_6(7, 12)$	$P_6(Z, P_6(2, 6)) - P_6(4, P_6(3, 6))$
22	$P_6(3, Z) - P_6(5, 18)$	$P_6(5, Z) - P_6(8, 17)$
23	$P_6(3, Z) - P_6(9, 13)$	$P_6(16, Z) - P_6(2, 49)$
24	$P_6(2, Z) - P_6(6, 16)$	$P_6(1, Z) - P_6(9, 10)$
25	$P_6(6, Z) - P_6(9, 20)$	$P_6(4, Z) - P_6(11, 14)$
26	$P_6(4, Z) - P_6(10, 16)$	$P_6(Z, P_6(3, 4)) - P_6(13, P_6(3, 5))$
27	$P_6(4, Z) - P_6(6, 23)$	$P_6(2, Z) - P_6(11, 12)$

29	$P_6(3, Z) - P_6(7, 21)$	$P_6(10, Z) - P_6(4, 41)$
30	$P_6(1, Z) - P_6(6, 19)$	$P_6(3, Z) - P_6(12, 15)$
31	$P_6(2, Z) - P_6(8, 19)$	$P_6(1, Z) - P_6(11, 13)$
33	$P_6(1, Z) - P_6(9, 17)$	$P_6(4, Z) - P_6(13, 18)$
34	$P_6(4, Z) - P_6(8, 26)$	$P_6(9, Z) - P_6(12, 29)$
35	$P_6(2, Z) - P_6(5, 28)$	$P_6(7, Z) - P_6(13, 25)$
36	$P_6(1, Z) - P_6(8, 21)$	$P_6(3, Z) - P_6(9, 24)$
37	$P_6(2, Z) - P_6(7, 26)$	$P_6(3, Z) - P_6(15, 17)$
38	$P_6(2, Z) - P_6(10, 22)$	$P_6(1, Z) - P_6(13, 16)$
39	$P_6(5, Z) - P_6(9, 31)$	$P_6(6, Z) - P_6(15, 24)$
40	$P_6(1, Z) - P_6(11, 20)$	$P_6(3, Z) - P_6(12, 23)$
42	$P_6(4, Z) - P_6(14, 24)$	$P_6(19, Z) - P_6(26, 33)$
43	$P_6(1, Z) - P_6(7, 29)$	$P_6(3, Z) - P_6(11, 27)$
44	$P_6(1, Z) - P_6(5, 34)$	$P_6(6, Z) - P_6(10, 36)$
45	$P_6(2, Z) - P_6(12, 25)$	$P_6(1, Z) - P_6(15, 19)$
46	$P_6(5, Z) - P_6(11, 34)$	$P_6(13, Z) - P_6(16, 41)$
47	$P_6(8, Z) - P_6(10, 43)$	$P_6(1, Z) - P_6(13, 23)$
48	$P_6(4, Z) - P_6(12, 32)$	$P_6(2, Z) - P_6(18, 20)$
50	$P_6(3, Z) - P_6(13, 30)$	$P_6(12, Z) - P_6(18, 40)$
51	$P_6(4, Z) - P_6(9, 40)$	$P_6(6, Z) - P_6(12, 39)$
52	$P_6(1, Z) - P_6(17, 22)$	$P_6(3, Z) - P_6(18, 25)$
53	$P_6(4, Z) - P_6(7, 46)$	$P_6(1, Z) - P_6(11, 31)$
54	$P_6(8, Z) - P_6(12, 46)$	$P_6(1, Z) - P_6(15, 26)$
55	$P_6(16, Z) - P_6(19, 50)$	$P_6(9, Z) - P_6(21, 35)$
57	$P_6(2, Z) - P_6(6, 47)$	$P_6(10, Z) - P_6(12, 53)$
58	$P_6(1, Z) - P_6(8, 41)$	$P_6(5, Z) - P_6(10, 47)$
59	$P_6(9, Z) - P_6(13, 51)$	$P_6(2, Z) - P_6(16, 31)$
60	$P_6(1, Z) - P_6(10, 39)$	$P_6(2, Z) - P_6(12, 38)$
61	$P_6(1, Z) - P_6(17, 29)$	$P_6(3, Z) - P_6(9, 47)$
62	$P_6(2, Z) - P_6(22, 26)$	$P_6(4, Z) - P_6(16, 38)$
63	$P_6(4, Z) - P_6(21, 32)$	$P_6(6, Z) - P_6(21, 36)$
64	$P_6(3, Z) - P_6(17, 36)$	$P_6(5, Z) - P_6(26, 29)$
65	$P_6(3, Z) - P_6(25, 27)$	$P_6(7, Z) - P_6(23, 37)$
66	$P_6(2, Z) - P_6(18, 34)$	$P_6(8, Z) - P_6(26, 36)$
67	$P(3, Z) - P(13, 45)$	$P(5, Z) - P(17, 43)$

References

- [1] **Eisenbud, D.**, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150, Springer-Verlag, 1995.

- [2] **Khanh, B.M.M.**, Characterization of the identity function with an equation function, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **52** (2021), 195–216.
- [3] **Park, P.-S.**, Multiplicative functions commutable with binary quadratic forms $x^2 \pm xy + y^2$, *Bull. Korean Math. Soc.*, **60(1)** (2023), 5–81.
- [4] **Phong, B.M. and R.B. Szeidl**, On the equation $f(n^2 + nm + m^2) = f(n)^2 + f(n)f(m) + f(m)^2$, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **52** (2021), 255–278.
- [5] **Phong, B.M. and R.B. Szeidl**, On the equation $f(n^2 - Dnm + m^2) = f^2(n) - Df(n)f(m) + f^2(m)$, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **28(2)** (2022), 240–251.

B. Langlois

Lycée Blaise Pascal

18-20, rue Alexandre Fleming

91400

Orsay

France

`bruno.langlois@ac-versailles.fr`

