Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 39 (2013) 449–458

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN FUNKTIONENALGEBREN VON ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN UND MENGENALGEBREN

Robert Wagner (Paderborn, Germany)

Dedicated to Professor Karl-Heinz Indlekofer on his 70th birthday

Communicated by Imre Kátai

(Received December 25, 2012; accepted January 10, 2013)

Abstract. Spaces of number theoretical functions are often determinated by an algebra of sets of $\mathbb{N}$. In other examples one starts from an algebra $\mathcal{F}$ of bounded functions on $\mathbb{N}$. By taking the sets $f^{-1}((-\infty, a])$, f real-valued, $f \in \mathcal{F}$, and the set-algebra generated by these sets one gets an easy connection between function algebras and set algebras. But even in the case, that $\mathcal{F}$ is selfadjoint, $\mathcal{F}$ separates the points, $\mathcal{F}$ contains the constants, $\mathcal{F}$ is complete in the sup-norm and each $f \in \mathcal{F}$ possesses a mean-value, there can occur, that for some $f \in \mathcal{F}$, f real-valued, $a \in \mathbb{R}$, the set $f^{-1}((-\infty, a])$ does not possess an asymptotic density.
Now, if the function-algebra is taken as above, each $f \in \mathcal{F}$, f real-valued, possesses a limit distribution ρ_f. For the set-algebra W generated by the sets $f^{-1}((-\infty, a])$, $f \in \mathcal{F}$, f real-valued, a point of continuity of ρ_f, it can be proved, that each $w \in W$ possesses an asymptotic density.

1. Einleitung

Bei der Mittelwerttheorie zahlentheoretischer Funktionen spielen oft Mengenalgebren (von Teilmengen von $\mathbb{N}$) eine wichtige Rolle. Wenn man von einer solchen Mengenalgebra $\mathcal{A}$ ausgeht, bei der jedes $A \in \mathcal{A}$ eine asymtotische Dichte

https://doi.org/10.71352/ac.39.449

δ besitzt, so kann man δ zu einem Maß auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ fortsetzen, wobei als σ-Algebra die von den $\bar{A}^{\beta(\mathbb{N})}$, $A \in \mathcal{A}$, erzeugte σ-Algebra genommen wird (siehe K.H. Indlekofer [1] and [2]). Man kann auch, angepasst an das jeweilige Beispiel, die Mengenalgebra als Z-System nehmen und als Kompaktifizierung die Menge der Z-Ultrafilter nehmen und δ zu einem Maß auf dieser Kompaktifizierung fortsetzen. Der Vorteil einer solchen Vorgehensweise ist bei beiden Methoden, dass man nun das Instrumentarium der Maßtheorie benutzen kann.

Bei anderen Beispielen geht man von einer Algebra $\mathcal{F}$ von Funktionen auf $\mathbb{N}$ aus, bei denen jedes $f \in \mathcal{F}$ einen Mittelwert besitzt. Als direkte Konstruktion einer zu $\mathcal{F}$ gehörigen Mengenalgebra scheint es sich anzubieten, als Erzeugendensystem für eine solche Mengenalgebra die Mengen $f^{-1}(I)$, $f \in \mathcal{F}$, I Intervall zu nehmen. Es zeigt sich aber, dass es möglich ist, dass $f^{-1}(I)$ keine asymptotische Dichte besitzt.

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Funktionenalgebra C auf $\mathbb{N}$ definiert durch $C := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) \text{ existiert}\}$. Für jedes $f \in C$ existiert der Mittelwert. Es sei $T \subset \mathbb{N}$ so gewählt, dass die asymptotosche Dichte nicht existiert. $f_0 \in C$ sei definiert durch $f_0(n) = \frac{-1}{n}$ für $n \in T$, $f_0(n) = \frac{1}{n}$ für $n \notin T$. $f_0^{-1}((-\infty, 0]) = T$ besitzt keine asymptotische Dichte.

Als Ausweg aus dieser Situation, wird eine Einschränkung bei der Auswahl der Intervalle vorgenommen.

2. Konstruktion einer geeigneten Menegenalgebra

Zunächst einige Bezeichnungen.

Definition 2.1. S sei eine nichtleere Menge. $P(S)$ sei die Menge aller Teilmengen von S. $\mathcal{A} \subset P(S)$ heißt *Mengenalgebra*, wenn $\emptyset \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{A} := S \setminus A \in \mathcal{A}$, $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

Bezeichnungen 2.2.
(i) Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei

$$M(f) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f(n) \qquad (M(f) \text{ Mittelwert von } f),$$

falls dieser Grenzwert existiert.

(ii) Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sei

$$\overline{M}(f) := \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f(n)$$

und

$$\underline{M}(f) := \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f(n).$$

(iii) Für $T \subset \mathbb{N}$ sei

$$\mathbf{1}_T(n) := \begin{cases} 1, & \text{für } n \in T \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iv) Es sei für $T \subset \mathbb{N}$

$$\delta(T) := M(\mathbf{1}_T) \qquad \text{(Asymptotische Dichte von } T,)$$

falls $M(\mathbf{1}_T)$ existiert.

(v) Es sei für $T \subset \mathbb{N}$

$$\overline{\delta}(T) := \overline{M}(\mathbf{1}_T),$$

$$\underline{\delta}(T) := \underline{M}(\mathbf{1}_T).$$

(vi) Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir eine Algebra von Funktionen $f\colon N \to \mathbb{C}$ mit

(I) Jedes $f \in \mathcal{F}$ ist beschränkt.

(II) Mit $f \in \mathcal{F}$ ist auch $Re(f) \in \mathcal{F}$ und $Im(f) \in \mathcal{F}$ (d.h. $\mathcal{F}$ ist selbstadjungiert).

(III) $\mathcal{F}$ trennt die Punkte, d.h. zu $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(n) \neq f(m)$.

(IV) Jedes $f \in \mathcal{F}$ besitzt einen Mittelwert.

(V) $\mathcal{F}$ ist vollständig bzgl, der Norm:

$$||f||_u := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|.$$

Weiter führen wir folgende Bezeichnung ein:

(vii) Es sei $\mathcal{H}$ der Raum der reellwertigen stetigen, beschränkten, auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen.

Als einfache Folgerung aus dem Weierstraßschen Approxiationssatzes erhalten wir das folgende

Lemma 2.3. *Es sei $H \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{F}$ reellwertig. Dann ist $H \circ f \in \mathcal{F}$.*

Desweiteren benutzen wir folgende

Definition 2.4. Für $f \in \mathcal{F}$, f reellwertig, definieren wir $\rho_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\rho_f(a) := \inf_{H \in \mathcal{H}, H \geq \mathbf{1}_{(-\infty,a]}} (M(H \circ f)) \qquad \text{wobei } \mathbf{1}_{(\infty,a]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } t \in (\infty, a] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedeutung von ρ_f zeigen die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 2.5. *ρ_f ist eine Verteilungsfunktion.*

Beweis. ρ_f ist monoton. Wegen der Beschränktheit von f gilt

$$\lim_{a \to -\infty} \rho_f(a) = 0, \quad \lim_{a \to \infty} \rho_f(a) = 1.$$

Es bleibt zu zeigen: ρ_f ist rechtsstetig.

Es sei also $\{a_k\}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$a_k > a \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{k \to \infty} a_k = a.$$

Wir zeigen

$$\lim_{k \to \infty} \rho_f(a_k) = \rho_f(a).$$

Zunächst folgt aus der Monotonie, dass

$$\lim_{k \to \infty} \rho_f(a_k) \quad \text{existiert.}$$

Wir geben uns nun $\varepsilon > 0$ vor. Es sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|\rho_f(a_{k_0}) - \lim_{k \to \infty} \rho_f(a_k)| < \varepsilon$$

gilt. Für $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\tau_\delta(H)(t) = H(t - \delta)$. Wir wählen nun $H \in \mathcal{H}$ so, dass

a) $H \geq \mathbf{1}_{(-\infty,a]}$, $|\rho_f(a) - M(H \circ f)| < \varepsilon$,

b) H gleichmäßig stetig ist,

c) $\tau_\delta(H) \leq \mathbf{1}_{(-\infty,a_{k_0}]}$ für $\delta > 0$ genügend klein gilt.

d) Damit gilt auch $\sup_{t\in\mathbb{R}} |H(t) - \tau_\delta(H)(t)| < \varepsilon$, wenn δ nur genügend klein ist.

Wir wählen $k_1 > k_0$ so groß. dass für $\delta_1 = a_{k_1} - a$ Bedingung c) und d) gilt. Es ist $\tau_{\delta_1}(H) \geq \mathbf{1}_{(-\infty,a_{k_1}]}$. Man hat nun folgende Ungleichungen:

$$|\rho_f(a) - M(H \circ f)| < \varepsilon$$

$$|M(H \circ f) - M(\tau_{\delta_1}(H) \circ f)| < 2\varepsilon$$

$$|(\tau_{\delta_1}(H) \circ f) - \rho_f(a_{k_0})| \leq |\rho_f(a_{k_1}) - \rho_f(a_{k_0}))| < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt schließlich

$$|\rho_f(a) - \lim_{k\to\infty} \rho_f(a_k)| < 6\varepsilon,$$

womit gezeigt ist

$$\rho_f(a) = \lim_{k\to\infty} \rho_f(a_k). \qquad \blacksquare$$

Weiter können wir zeigen

Lemma 2.6. *Wenn a ein Stetigkeitspunkt von ρ_f ist, exisitert $M(\mathbf{1}_{(-\infty,a]})$ und ist gleich $\rho_f(a)$.*

Beweis. Es sei a ein Stetigkeitspunkt von ρ_f. Es sei $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{a} < a$. Zunächst gilt für $G \in \mathcal{H}$ mit $G \geq \mathbf{1}_{(-\infty,a]}$:

$$\underline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq \overline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq M(G \circ f).$$

Da G beliebig gewählt war, erhält man

$$\underline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq \overline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq \rho_f(a).$$

Es sei $H \in \mathcal{H}$ nun so gewählt, dass $H \geq \mathbf{1}_{(-\infty,\tilde{a}]}$ und $H \leq \mathbf{1}_{(-\infty,a]}$ gilt. Man hat dann

$$\rho_f(\tilde{a}) \leq M(H \circ f) \leq \underline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq \overline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) \leq \rho_f(a).$$

Mit $\lim_{\tilde{a}\to a} \rho_f(\tilde{a}) = \rho_f(a)$ folgt

$$\underline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) = \overline{M}(\mathbf{1}_{(-\infty,a]} \circ f) = \rho_f(a). \qquad \blacksquare$$

Als Ergebnis haben wir nun

Lemma 2.7. *$\mathcal{F}$ sei eine Funktionenalgebra wie in* **(vi)**, *dann besitzt jedes $f \in \mathcal{F}$, f reellwertig, eine Grenzverteilung und diese ist gleich ρ_f.*

(Lemma 2.7 ist sicher wohlbekannt, hier aber doch wegen Geschlossenheit der Darstellung bewiesen worden).

Bemerkung 2.8. Für komplexwertige $f \in \mathcal{F}$ gilt: Es existiert

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid Re\,(f)(n) \leq a \text{ und } Im\,(f)(n) \leq b\}),$$

falls a Stetigkeitspunkt von $\rho_{Re\,(f)}$, b Stetigkeitspunkt von $\rho_{Im\,(f)}$ ist.

Im Folgenden wollen wir zeigen:

Satz 2.9. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Funktionenalgebra auf $\mathbb{N}$ wie in* **(vi)**. *Bei der von den Mengen*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq a, f \in \mathcal{F}, f \text{ reellwertig, } a \text{ Stetigkeitspunkt von } \rho_f\}$$

erzeugten Mengenalgebra $\mathcal{W}$ besitzt jedes Element (der Mengenalgebra) eine asymptotische Dichte.

Bemerkung 2.10. Man kann die in Satz 2.9 angegebene Mengenalgebra als die $\mathcal{F}$ zugeordnete Mengenalgebra mit Dichte bezeichnen.

Um Satz 2.9 zu zeigen, benötigen wir weiter folgende Lemmata.

Lemma 2.11. *Es sei $f \in \mathcal{F}$, f reellwertig, a Stetigkeitspunkt von ρ_f. Dann ist $\bar{\delta}(\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = a\}) = 0$.*

Beweis. Es wird wie auch in den folgenden Beweisen benutzt, dass die Stetigkeitspunkte von ρ_f in $\mathbb{R}$ dicht liegen.

Für $\tilde{a} < a$, $\tilde{a}, a$ Stetigkeitspunkte gilt

$$\rho_f(a) - \rho_f(\tilde{a}) = \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a} < f(n) \leq a\}) \geq \bar{\delta}(\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = a\}).$$

Mit

$$\lim_{\substack{\tilde{a} \to a \\ \tilde{a} \text{ Stetigkeitspunkt}}} \rho_f(\tilde{a}) = \rho_f(a)$$

folgt

$$\bar{\delta}(\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = a\}) = 0.$$ ■

Lemma 2.12. *Es sei S eine nicht leere Menge. Es sei $\mathcal{K} \subset P(S)$. $\mathcal{W}$ sei die kleinste Mengenalgebra die $\mathcal{K}$ enthält (d.h. die von $\mathcal{K}$ erzeugte Mengenalgebra). Dann hat jedes $W \in \mathcal{W}$ die Gestalt*

$$W = \bigcup_{j=1}^{r}{}^{*} \bigcap_{k=1}^{t_j} A_{j,k} \qquad r, t_j \in \mathbb{N},$$

wobei $A_{j,k} \in \mathcal{K}$ oder $\overline{A_{j,k}} \in \mathcal{K}$ ist.

Beweisidee. Man überlegt sich leicht, dass jedes W mit der obigen Darstellung zu der von $\mathcal{K}$ erzeugten Algebra gehört. Umgekehrt ist das System der obigen Ausdrücke stabil bzgl. Durschnittsbildung und Komplementbildung. ■

Eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.12 ist

Lemma 2.13. *Es sei $\mathcal{K} \subset P(\mathbb{N})$, es sei $\mathcal{W}$ die von $\mathcal{K}$ erzeugte Algebra. Jedes $W \in \mathcal{W}$ besitzt eine asymptotische Dichte, wenn für alle Tupel $(K_1, \ldots, K_r)$ mit $K_j \in \mathcal{K}$ oder $\bar{K}_j \in \mathcal{K}$ gilt:*
$\delta(K_1 \cap \ldots \cap K_r)$ existiert.

Hieraus folgert man: Um Satz 2.9 zu zeigen, genügt es, folgendes Lemma zu beweisen.

Lemma 2.14. *Für $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$, $f_1, \ldots, f_r$ reellwertig, a_j Stetigkeitspunkt von ρ_{f_j} $j = 1, \ldots, r$ und $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}$, $g_1, \ldots, g_m$ reellwertig, b_k Stetigkeispunkt von ρ_{g_k}, $k = 1, \ldots, m$ gilt:*

$$\delta(\bigcap_{j=1}^{r} \{n \in \mathbb{N} \mid f_j(n) \leq a_j\} \cap \bigcap_{k=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} \mid g_k(n) > b_k\}) \qquad \textit{existiert.}$$

Bemerkung 2.15. Lemma 2.14 ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, dass

$$\delta(\bigcap_{j=1}^{r} \{n \in \mathbb{N} \mid f_j(n) \leq a_j\} \cap \bigcap_{k=1}^{m} \{n \in \mathbb{N} \mid g_k(n) \geq b_k\})$$

existiert.
(Man benutzt dabei, dass $\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid g_k(n) = b_k\}) = 0$ ist.)

Im weiteren ist folgende Lemmas nützlich.

Lemma 2.16. *Es sei $f \in \mathcal{F}$ reellwertig, $a \in \mathbb{R}$ ist Stetigkeitspunkt von ρ_f, wenn es eine Folge $\{a_k\}$ und eine Folge $\{\tilde{a}_k\}$ gibt mit $a_k \searrow a, \tilde{a}_k \nearrow a$, $a_k, \tilde{a}_k$ Stetigkeitspunkte von ρ_f, so dass*

$$\lim_{k \to \infty} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < f(n) \leq a_k\}) = 0.$$

Beweis. Lemma 2.15 ist klar, da

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < f(n) \leq a_k\}) = \rho_f(a_k) - \rho_f(\tilde{a_k})$$

und ρ_f monoton ist. ■

Nun werden einige Normierungen vorgenommen.

Lemma 2.17.

(i) $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \geq b\} = \{n \in \mathbb{N} \mid (-f)(n) \leq -b\}$ *wenn* b *Stetigkeitspunkt von* ρ_f *ist, so ist* $-b$ *Stetigkeitspunkt von* ρ_{-f} *ist.*

(ii) a *sei Stetigkeitspunkt von* ρ_f*. Es sei* g *definiert durch* $g(n) = f(n)+c-a$*. Dann gilt* $g \in \mathcal{F}$ *und* c *ist Stetigkeitspunkt von* ρ_g*.*

Beweis. (i) Es sei $b_k \searrow b$, $\tilde{b_k} \nearrow b$. Dabei seien die $b_k, \tilde{b_k}$ so gewählt, dass $b_k, \tilde{b_k}$ Stetigkeitspunkte von ρ_f und $-b_k, -\tilde{b_k}$ Stetigkeitspunkte von ρ_{-f} für alle $k \in \mathbb{N}$ sind. Dann hat man $-b_k \nearrow -b, -\tilde{b_k} \searrow -b$ und

$$\lim_{k\to\infty} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{b_k} \leq f(n) \leq b_k\}) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid -b_k \leq (-f)(n) \leq -\tilde{b_k}\}) = 0$$

(Man wende nun Lemma 2.16 an.)

(ii) Es sei $a_k \searrow a$, $\tilde{a_k} \nearrow a$. $a_k, \tilde{a_k}$ seien so gewählt, dass $a_k, \tilde{a_k}$ Stetigkeitspunkte von ρ_f sind und $a_k + c - a$, $\tilde{a_k} + c - a$ Stetigkeitspunkte von ρ_g sind. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < f(n) \leq a_k\}) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid c + \tilde{a_k} - a < g(n) \leq c + a_k - a\}) = 0$$

und $c + \tilde{a_k} - a \nearrow c$, $c + a_k - a \searrow c$.

Aus dieser Normierung folgt nun, dass Lemma 2.14 und damit Satz 2.9 gezeigt ist, wenn das folgende Lemma bewiesen ist:

Lemma 2.18. *Es seien* $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$*,* $f_1, \ldots, f_r$ *reellwertig.* a *sei Stetigkeitspunkt aller* $\rho_{f_1}, \ldots, \rho_{f_r}$*. Dann existiert*

$$\delta(\bigcap_{j=1}^{r} \{n \in \mathbb{N} \mid \ f_j(n) \leq a\}).$$

Wir geben nun einen Beweis von Lemma 2.18 und liefern damit einen Beweis von Satz 2.9.

Beweis von Lemma 2.18. Es ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f_1(n \leq a \wedge \ldots \wedge f_r(n) \leq a)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \max(f_1, \ldots, f_r)(n) \leq a\};$$

dabei ist $h := \max(f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{F}$ und ist reellwertig. Lemma 2.18 ist gezeigt, wenn gezeigt ist: a ist ein Stetigkeitspunkt von ρ_h. Wir wählen nun $\{a_k\}$, $\{\tilde{a_k}\}$

so, dass $a_k \searrow a$, $\tilde{a_k} \nearrow a$, a_k und $\tilde{a_k}$ Stetigkeitspunkt aller ρ_{f_j}, $j = 1, \ldots, r$ und von ρ_h ist. Nun gilt:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < h(n) \leq a_k\} \subset \bigcup_{j=1}^{r} \{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < f_j(n) \leq a_k\}.$$

Nun folgt

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < h(n) \leq a_k\}) \leq \sum_{j=1}^{r} \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < f_j(n) \leq a_k\}).$$

Bei der rechten Seite dieser Ungleichung geht jeder Summand gegen 0 für $k \to \to \infty$. Damit gilt auch

$$\lim_{k \to \infty} (\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{a_k} < h(n) \leq a_k\}) = 0,$$

und nach Lemma 2.16 ist a ein Stetigkeitspunkt von ρ_h. Damit haben wir Lemma 2.18 bewiesen. ■

3. Hauptergebnis

Wir beschreiben zunächst kurz das Modell, das von Indlekofer in [1] und [2] eingeführt wurde.

Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra in $\mathbb{N}$, auf der eine endlich additive Funktion (Inhalt) δ definiert ist. Bettet man $\mathbb{N}$ (und $\mathcal{A}$) in die Stone–Čech Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ ein,

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \beta\mathbb{N}$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \bar{\mathcal{A}} := \{\bar{A}^{\beta\mathbb{N}},\ A \in \mathcal{A}\}$$

so ist $\bar{\mathcal{A}}$ eine Mengenalgebra in $\beta\mathbb{N}$ und

$$\bar{\delta} : \bar{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$$

$$\bar{\delta}(\bar{A}) := \delta(A)$$

ein Prämaß auf $\bar{\mathcal{A}}$, das sich auf die von $\bar{\mathcal{A}}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\bar{\mathcal{A}})$ (eindeutig) zu einem Maß μ_δ fortsetzen lässt.

Startend von den auf $\mathbb{N}$ stetigen Treppenfunktionen

$$s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j 1_{A_j} \qquad \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{A}\,(j = 1, \ldots, r),$$

die sich eindeutig zu stetigen Treppenfunktionen

$$\bar{s} = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j 1_{\bar{A}_j}$$

fortsetzen lassen, führt das Modell zu den Räumen $\mathcal{L}^p(\beta\mathbb{N}, \sigma(\bar{\mathcal{A}}), \mu_\delta))$.

Wir können nun von der von den Mengen

$$V := \{n \in \mathbb{N} | f(n) \leq a,\ f \in \mathcal{F}\,\text{reellwertig}, a\,\text{Stetigkeitspunkt von}\,\rho_f\}$$

erzeugten Mengenalgebra $\mathcal{W}$ ausgehen. Jedes $W \in \mathcal{W}$ besitzt eine asymptotische Dichte $\delta(W)$. Man bildet nun die Mengenalgebra $\tilde{\mathcal{W}} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \{\bar{W}\}$. δ lässt sich zu einem Maß μ_δ auf $\sigma(\bar{\mathcal{W}})$ fortsetzen. Weiter bilden wir nun $\tilde{\mathcal{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{\tilde{f}\}$, wobei $\tilde{f}$ eindeutige stetige Fortsetzung von f auf $\beta(\mathbb{N})$ ist. Jedes $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ ist bzgl. $\sigma(\tilde{\mathcal{W}})$ messbar. $\tilde{\mathcal{F}}$ liegt direkt in $\mathcal{L}^p(\beta(\mathbb{N}), \sigma(\tilde{\mathcal{W}}), \mu_\delta)$.

Mit diesen Bezeichnungen haben wir

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{F}$ eine Funktionenalgebra wie in* **(vi)**. *Für jedes $f \in \mathcal{F}$ sei $\bar{f}$ die eindeutige Fortsetzung auf $\beta\mathbb{N}$. Dann gilt*

$$M(f) = \int_{\beta\mathbb{N}} \bar{f}\, d\mu_\delta, \qquad M(|f|^p) = \int_{\beta\mathbb{N}} |\bar{f}|^p\, d\mu_\delta \quad (p > 0).$$

References

[1] **Indlekofer, K.-H.,** A new method in probabilistic number theory, *Probability Theory and Applications, Math. Appl.*, **80** (1992), 299–308.

[2] **Indlekofer, K.-H.,** New approach to probabilistic number theory-compactifications and integration, *Advenced Studies in Pure Mathematics*, **49** (2005), 133–170.

R. Wagner
Faculty of Computer Science,
Electrical Engineering and Mathematics
University of Paderborn
Warburger Straße 100
D-33098 Paderborn, Germany
Robert.Wagner43@gmx.de