SUR UN PROBLÈME D'ERDŐS ET KÁTAI

A. Smati (Limoges, France)

*Au Professeur Imre Kátai pour son 70e anniversaire,
ce travail est dédié avec respect et admiration*

Abstract. Let $d_1(n) = d(n)$ be the function number of divisors of the integer $n \geq 1$. For all integer $k \geq 2$, we denote by $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$ the iterated k -fold of $d(n)$. In this paper, we give the maximal order of the function $\omega(d_{k-1}(n))$, number of prime divisors of $d_{k-1}(n)$ and we improve a result of Erdős and Kátai on the maximal order of $d_k(n)$.

Résumé. Désignons par $d_1(n) = d(n)$ la fonction nombre de diviseurs de l'entier naturel $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 2$, on note $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$ la k -ième itérée de $d(n)$. Dans cet article, nous déterminons l'ordre maximum de la fonction $\omega(d_{k-1}(n))$, nombre de diviseurs premiers de $d_{k-1}(n)$ et nous améliorons un résultat d'Erdős et Kátai sur l'ordre maximum de $d_k(n)$.

1. Introduction

En 1907, S. Wigert, (cf. [7]), étudie l'ordre maximum du nombre de diviseurs $d(n)$ de l'entier naturel $n \geq 1$. Il a montré que, pour tout $\epsilon > 0$ et n suffisamment grand,

$$d(n) \leq e^{(1+\epsilon) \log 2 \frac{\log n}{\log \log n}}$$

et, pour une infinité d'entiers n ,

$$d(n) \geq e^{(1-\epsilon) \log 2 \frac{\log n}{\log \log n}}.$$

Ainsi, l'ordre maximum de $\log d(n)$ est la fonction

$$\log 2 \frac{\log n}{\log \log n}.$$

En 1915, S. Ramanujan, (cf. [4] et [5] No.15), reprit cette étude dans un long mémoire intitulé "Highly Composite Numbers". Il a considérablement amélioré en précision le résultat de Wigert. L'idée, majeure, de Ramanujan est l'introduction d'une suite d'entiers attachée à $d(n)$ dits nombres hautement composés - c'est les entiers qui possèdent plus de diviseurs que tout entier les précédant - et d'une suite d'entiers, contenus dans la précédente, qualifiés d'entiers hautement composés supérieurs qui lui ont permis d'obtenir des améliorations de la formule de Wigert énoncée plus haut.

Notons $d_1(n) = d(n)$ et pour tout entiers $k \geq 2$,

$$d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$$

la k -ième itérée de $d(n)$. Dans le même article, cité plus haut, Ramanujan s'intéresse aux itérées de $d(n)$. Il détermine l'ordre de grandeur de $d_2(N)$ sur la suite des nombres hautement composés en montrant que, pour N hautement composé,

$$d_2(N) = (\log N)^{\frac{1}{\log 2}} (\log \log \log \log N + \gamma + O(\frac{1}{\log \log \log N}))$$

où γ étant la constante d'Euler. Enfin, dans les dernières lignes de cette article, Ramanujan donne des bornes inférieures à l'ordre maximum de $d_2(n)$ et $d_3(n)$ posant, ainsi, implicitement le problème de l'étude de l'ordre maximum des itérées de $d(n)$. Il note, notamment, en considérant les entiers de la forme $N = 2^{2^{-1}} 3^{3^{-1}} \dots p^{p^{-1}}$ que

$$d_2(n) > 4^{\frac{\sqrt{2 \log n}}{\log \log n}}$$

pour une infinité d'entiers n . Cependant, ce n'est qu'en 1969 que P. Erdős et I. Kátai, (cf. [1], [3]) posent le problème général, c'est-à-dire celui de la détermination de l'ordre maximum de la k -ième itérée de la fonction nombre des diviseurs et donnent une solution partielle, citée ci-dessous.

On pose

$$F_{-1} = 0, F_0 = 1$$

et, pour tout entier $k \geq 1$, on note F_k le k -ième terme de la suite de Fibonacci, c'est-à-dire

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}.$$

Ainsi, les sept premiers termes sont

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21.$$

Erdős et Kátai ont montré que, pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout $\epsilon > 0$, on a, pour n suffisamment grand,

$$d_k(n) < e^{(\log n)^{\frac{1}{F_k} + \epsilon}}$$

et pour une infinité d'entiers n ,

$$d_k(n) > e^{(\log n)^{\frac{1}{F_k} - \epsilon}}.$$

Enfin, P. Erdős et A. Ivić, (cf.[2]), reprennent, en 1989, l'étude de ce problème pour $k = 2$ et montrent que, pour une constante $c > 0$ convenable et n assez grand,

$$d_2(n) < e^c \sqrt{\log n} \sqrt{\frac{\log \log n}{\log \log \log n}}.$$

Notons par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier n . Dans cet article, nous déterminons l'ordre maximum de $\omega(d_{k-1})$ et nous en déduisons une amélioration du résultat d'Erdős et Kátai sur l'ordre maximum de $d_k(n)$ pour tout $k \geq 2$. Dans la note [6], nous avons étudié le cas particulier $k = 2$ et nous avons mis en évidence une amélioration du résultat d'Erdős et Ivić. Nous obtenons, les résultats suivants.

Théorème 1.1. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement. On pose, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{16} \frac{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1} F_{k+1}} \frac{F_4^{F_{k-3}} F_5^{k-4} \dots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}$$

et

$$\begin{cases} b_2 = 1, \\ b_3 = 1/\sqrt[3]{3^2} \\ b_k = \left(\frac{2^{F_{k-3}}}{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2} \frac{1}{F_4^{F_{k-6}} \dots F_{k-3}^{F_1}} \right)^{1/F_k} \quad (k \geq 4). \end{cases}$$

1. On a, pour n suffisamment grand,

$$\omega(d_{k-1}(n)) \leq (1 + \epsilon) a_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log \log n}.$$

2. Il existe une infinité d'entiers n tels que

$$\omega(d_{k-1}(n)) \geq (1 - \epsilon) b_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log \log n}.$$

Remarque 1.1. 1. La table suivante montre, à titre d'exemple, les premières valeurs des constantes a_k et b_k .

k	2	3	4	5	6	7	8
F_k	2	3	5	8	13	21	34
a_k	55,42	228,58	610,68	1637,27	3579,02	7354,68	13895,66
b_k	1	0,4807	0,5479	0,5267	0,5132	0,5071	0,5021

k	9	10
F_k	55	89
a_k	25115,95	43737,87
b_k	0,4996	0,4979

Tab. 1. Les neuf premières valeurs des constantes a_k et b_k

2. Asymptotiquement, on a (cf. Lemme 2.4 pour la démonstration), en posant

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

et

$$H_1(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j+2})}{\Phi^j},$$

$$H_2(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$H_3(\Phi) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$a_k \sim \frac{6}{\sqrt{5}} (\Phi)^{3/\Phi} 4^{\Phi^2} e^{H_1(\Phi) - H_2(\Phi)} \Phi^{k+1} \quad (k \rightarrow \infty),$$

et

$$b_k \sim \left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2} \Phi^4 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)} \quad (k \rightarrow \infty).$$

3. On a les valeurs numériques suivantes:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots;$$

$$H_1(\Phi) = 0,001544\dots;$$

$$H_2(\Phi) = -0,030892\dots;$$

$$H_3(\Phi) = 0,000364\dots$$

et

$$\frac{6}{\sqrt{5}} (\Phi)^{3/\Phi} 4^{\Phi^2} e^{H_1(\Phi)-H_2(\Phi)} = 254,947785\dots;$$

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2} \Phi^4 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)} = 0,495266\dots$$

Corollaire 1.1. Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement et k un entier, $k \geq 2$.

1. On a, pour n suffisamment grand,

$$d_k(n) \leq 3 e^{(1+\epsilon) a_k (\log n)^{1/F_k}}.$$

2. Il existe une infinité d'entiers n tels que

$$d_k(n) \geq e^{(1-\epsilon) b_k \log 2 \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log \log n}}.$$

Introduisons, quelques notations supplémentaires. Soit n un entier arbitraire et k un entier fixé, $k \geq 2$. On définit la suite

$$N_1, N_2, \dots, N_j, \dots, N_k$$

de la manière suivante: on pose $N_k = n$ et pour tout $1 \leq j \leq k - 1$

$$N_j = d(N_{j+1}).$$

Ainsi, pour $k \geq 2$,

$$N_1 = d(N_2) = d_2(N_3) = d_3(N_4) = \dots = d_{k-1}(N_k) = d_{k-1}(n).$$

Donc

$$d(N_1) = d_k(N_k) = d_k(n).$$

On note

$$S_1 = \omega(N_1)$$

le nombre de diviseurs premiers de N_1 . On a donc

$$S_1 = \omega(d_{k-1}(N_k)) = \omega(d_{k-1}(n)).$$

Maintenant, nous allons montrer comment s'obtient le Corollaire 1.1.

Démonstration du Corollaire 1.1.

1. Pour $k \geq 2$, on applique le Lemme 2.5, (cf. §2 ci-dessous), avec N_1 . On obtient

$$(1) \quad d_k(n) = d_k(N_k) = d(N_1) \leq 3 e^{\omega(N_1) \log \log N_1}.$$

Ensuite, on reporte dans (1) l'inégalité 1 du Théorème 1.1,

$$\omega(N_1) = \omega(d_{k-1}(n)) \leq (1 + \epsilon) a_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log \log n}$$

et enfin, on remarque que

$$\log \log N_1 = \log \log d_{k-1}(N_k) \leq \log \log N_k = \log \log n.$$

2. Découle immédiatement de la remarque

$$d_k(n) \geq e^{\log^2 \omega(d_{k-1}(n))}$$

et de l'inégalité 2 du Théorème 1.1.

La proposition suivante est le fondement de la méthode. C'est un raffinement d'un lemme d'Erdős et Kátai (cf. [2], Lemma, p.271).

Proposition 1.1. *Soient $k \geq 2$ un entier et $\epsilon > 0$ un nombre réel fixé arbitrairement. Supposons que pour tout entier j , $1 \leq j \leq k - 1$, il existe un entier naturel M_j :*

$$M_j | N_j$$

dont la décomposition en facteurs premiers, $M_j = Q_1^{\gamma_1-1} Q_2^{\gamma_2-1} \dots Q_A^{\gamma_A-1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes

$$(1.1) \quad \begin{cases} A \geq c_j (1 - \epsilon)^{F_{j-1}-1} S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}-1}, \\ Q_i \geq \tilde{c}_j (1 - \epsilon)^{F_{j-1}} S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}} & (i = 1, 2, \dots, A), \\ \gamma_i \geq \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_{j-2}} S_1^{F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-2}} & (i = 1, 2, \dots, A), \end{cases}$$

où $c_j, \tilde{c}_j, \bar{c}_j$ sont des constantes dépendant de j . Alors, on a l'une ou l'autre des deux assertions suivantes:

1.

$$\log N_{j+1} \geq (S_1(\log S_1)^2)^{F_k}.$$

2. Il existe un entier naturel M_{j+1} :

$$M_{j+1} | N_{j+1}$$

dont la décomposition en facteurs premiers, $M_{j+1} = R_1^{\beta_1-1} R_2^{\beta_2-1} \dots R_B^{\beta_B-1}$, possède les propriétés suivantes

$$(1.2) \quad \begin{cases} B \geq c_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j-1}, \\ R_i \geq \tilde{c}_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j} & (i = 1, 2, \dots, B), \\ \beta_i \geq \bar{c}_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j-1} (\log S_1)^{F_j-1} & (i = 1, 2, \dots, B), \end{cases}$$

avec, pour $2 \leq j \leq k - 1$,

$$(1.3) \quad \begin{cases} c_{j+1} = \frac{1}{8F_k} c_j \bar{c}_j, \\ \tilde{c}_{j+1} = \frac{F_j}{8F_k} c_j \bar{c}_j = F_j c_{j+1}, \\ \bar{c}_{j+1} = \tilde{c}_j = F_{j-1} c_j, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c_2 = \frac{1}{8F_k} c_1 \bar{c}_1, \\ \tilde{c}_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{8F_k} c_1 \bar{c}_1 = \frac{1}{2} c_2, \\ \bar{c}_2 = \tilde{c}_1. \end{cases}$$

Les constantes $c_1, \tilde{c}_1, \bar{c}_1$ sont données dans le Lemme 2.2.

2. Lemmes

Lemme 2.1. Soit $\epsilon > 0$. Pour S_1 assez grand, l'entier N_1 possède au moins $[S_1/2]$ diviseurs premiers supérieurs à

$$\frac{1}{2}(1 - \epsilon)S_1 \log S_1.$$

Démonstration. Ecrivons

$$N_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{[S_1/2]}^{\alpha_{[S_1/2]}} \dots p_{S_1}^{\alpha_{S_1}} \quad (S_1 = \omega(N_1), \alpha_i \geq 1),$$

la décomposition de N_1 en produits de facteurs premiers. Alors, les facteurs premiers de N_1 suivants

$$p_{[S_1/2]} < p_{[S_1/2]+1} < \dots < p_{S_1}$$

sont en nombre supérieur ou égal à

$$S_1 - [S_1/2] \geq S_1/2 \geq [S_1/2]$$

et $p_{[S_1/2]}$ est supérieur ou égal au $[S_1/2]$ -ième nombre premier. Donc, pour S_1 assez grand, on a

$$p_{[S_1/2]} \geq (1 + 0(1))[S_1/2] \log[S_1/2] = (1 + 0(1)) \frac{1}{2} S_1 \log S_1 \geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1.$$

Lemme 2.2. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier naturel $M_1 : M_1 | N_1$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_1 = Q_1^{\gamma_1-1} Q_2^{\gamma_2-1} \dots Q_A^{\gamma_A-1}$, possède, pour S_1 assez grand, les propriétés suivantes*

$$(2.1) \quad \begin{cases} A \geq \frac{1}{3} S_1, \\ Q_i \geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1 & (i = 1, 2, \dots, A), \\ \gamma_i \geq 2 & (i = 1, 2, \dots, A). \end{cases}$$

Avec les notations de la proposition, on a donc $c_1 = \frac{1}{3}$, $\tilde{c}_1 = \frac{1}{2}$ et $\bar{c}_1 = 2$.

Démonstration. D'après la démonstration du Lemme 2.1, on prend

$$\begin{cases} A = [S_1/2], \\ Q_1 = p_{[S_1/2]+j}, \dots, Q_A = p_{S_1} \quad (j = 1 \text{ ou } 2), \\ \gamma_1 = \alpha_{[S_1/2]+j} + 1, \dots, \gamma_A = \alpha_{S_1} + 1. \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{cases} A = [S_1/2] \geq S_1/3 & (S_1 \geq 6), \\ Q_i \geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) S_1 \log S_1 & (i = 1, 2, \dots, A), \\ \gamma_i \geq 2 & (i = 1, 2, \dots, A), \end{cases}$$

et le lemme est prouvé.

Lemme 2.3. 1. Soit la suite récurrente

$$\begin{cases} c_{k+1} = \frac{F_{k-2}}{8F_{k+1}} c_k c_{k-1} & (k \geq 2), \\ c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{8F_2}. \end{cases}$$

On a

$$c_{k+1} = \frac{8}{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}} \frac{F_1^{F_{k-3}} \dots F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}} \dots F_{k+1}^{F_0}}.$$

2. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout entier $k \geq 3$, fixé, considérons le système

$$\begin{cases} S_{j+2} \leq (1 + \epsilon) S_{j+1} S_j \log S_j & 1 \leq j \leq k - 2, \\ S_2 = S_1, S_1 \text{ donné.} \end{cases}$$

On a, pour $1 \leq j \leq k - 2$ et S_1 assez grand,

$$S_{j+2} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{j-1}-1} F_0^{F_{j-1}} F_1^{F_{j-2}} \dots F_{j-1}^{F_0} (1 + \epsilon)^{F_{j+1}-1} S_1^{F_{j+1}} (\log S_1)^{F_{j+1}-1}.$$

Démonstration. 1. On montre, par récurrence, que

$$c_{k+1} = 2^{F_{k-3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{F_{k-1}} F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0} \left(\frac{1}{8F_2}\right)^{F_{k-1}} \left(\frac{1}{8F_3}\right)^{F_{k-2}} \dots \left(\frac{1}{8F_{k+1}}\right)^{F_0}.$$

Puis, on utilise l'identité: $F_0 + F_1 + \dots + F_N = F_{N+2} - 1$. On obtient

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{2^{F_{k-3}}}{3^{F_{k-1}}} 8^{F_{k+1}-1} F_2^{F_{k-1}} \frac{F_0^{F_{k-2}} F_1^{F_{k-3}} \dots F_{k-2}^{F_0}}{F_3^{F_{k-2}} F_4^{F_{k-3}} \dots F_{k+1}^{F_0}} = \\ &= \frac{8}{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}} \frac{F_1^{F_{k-3}} \dots F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}} \dots F_{k+1}^{F_0}}. \end{aligned}$$

2. L'inégalité s'obtient par une simple récurrence sur k . Les facteurs $3/2$ proviennent des majorations

$$\log S_j \leq \frac{3}{2} F_{j-1} \log S_1$$

valables pour $\epsilon > 0$ fixé, et pour chaque $j \geq 3$ fixé et S_1 assez grand. On omet les détails.

Lemme 2.4. *Posons, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{16} \frac{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1} F_{k+1}} \frac{F_4^{F_{k-3}} F_5^{k-4} \dots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}$$

et

$$b_k = \left(\frac{2^{F_{k-3}}}{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2} \frac{1}{F_4^{F_{k-6}} \dots F_{k-3}^{F_1}} \right)^{1/F_k}.$$

Notons

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

et

$$H_1(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j+2})}{\Phi^j},$$

$$H_2(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$H_3(\Phi) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1 - (-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j}.$$

On a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

1.

$$a_k \sim \frac{6}{\sqrt{5}} (\Phi)^{3/\Phi} 4^{\Phi^2} e^{H_1(\Phi) - H_2(\Phi)} \Phi^{k+1},$$

2.

$$b_k \sim \left(\frac{2}{32} \right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2} \Phi^4 \left(\frac{1}{\Phi} \right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)}.$$

Démonstration. Posons

$$\alpha = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad u = \frac{\beta}{\alpha} \quad (|u| < 1).$$

La formule de Binet pour la suite de Fibonacci décalée (F_k) s'écrit

$$F_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

et donne

$$(2) \quad F_k = \frac{\alpha^{k+1}}{\sqrt{5}}(1 - u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \frac{F_{k+r}}{F_k} = \alpha^r \frac{1 - u^{k+r+1}}{1 - u^{k+1}}.$$

1. Etudions la suite a_k . Posons

$$A = \frac{F_4^{F_{k-3}} F_5^{F_{k-4}} \dots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0}} = \left(\frac{F_4}{F_1}\right)^{F_{k-3}} \left(\frac{F_5}{F_2}\right)^{F_{k-4}} \dots \left(\frac{F_{k+1}}{F_{k-2}}\right)^{F_1}.$$

On a donc

$$\log A^{1/F_k} = \frac{1}{F_k} \log A = \sum_{j=3}^k \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{F_{j+1}}{F_{j-2}},$$

la formule de droite de (2), permet d'écrire

$$(3) \quad \log A^{1/F_k} = A_1 + A_2.$$

Avec

$$A_1 := \log \alpha^3 \sum_{j=3}^k \frac{F_{k-j}}{F_k} \quad \text{et} \quad A_2 := \sum_{j=3}^k \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{1 - u^{j+2}}{1 - u^{j-1}}.$$

Maintenant, en appliquant l'identité: $F_0 + F_1 + \dots + F_N = F_{N+2} - 1$, à A_1 , on obtient

$$A_1 = 3 \log \alpha \frac{F_{k-1} - 1}{F_k} = 3 \log \alpha \frac{F_{k-1}}{F_k} \left(1 - \frac{1}{F_{k-1}}\right)$$

et en utilisant les formules (2), on obtient

$$(4) \quad A_1 = \frac{3}{\alpha} \log \alpha \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k}{2}}\right)\right)$$

car $\sqrt{|u|} = 1/\alpha$. Quant à A_2 , on la décompose en deux quantités: $A_2 = A_{2,1} - A_{2,2}$, avec

$$A_{2,1} := \sum_{j=3}^k \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1 - u^{j+2}) \quad \text{et} \quad A_{2,2} := \sum_{j=3}^k \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1 - u^{j-1}).$$

Considérons $A_{2,1}$. On applique la formule de droite de (2). On obtient

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \sum_{j=3}^k \frac{\log(1 - u^{j+2})}{\alpha^j} + O\left(\sum_{j=3}^k \frac{|\log(1 - u^{j+2})|}{\alpha^j} |u|^{k-j+1}\right) =: \\ &=: S_k(\alpha) + O(R). \end{aligned}$$

On a

$$R \ll |u|^{k+3} \sum_{j=3}^k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^j \ll |u|^{k+3}.$$

Maintenant, on remarque que $S_k(\alpha)$ est la somme partielle d'une série convergente, puisque

$$\frac{|\log(1 - u^{j+2})|}{\alpha^j} \sim |u|^2 \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^j.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_k(\alpha) &= \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - u^{j+2})}{\alpha^j} + O\left(\sum_{j \geq k+1} \frac{|\log(1 - u^{j+2})|}{\alpha^j}\right) = \\ &= H_1(\alpha) + O(|u|^{k+3}), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$H_1(\alpha) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - u^{j+2})}{\alpha^j}.$$

On a, donc, obtenu

$$A_{2,1} = H_1(\alpha) + O(|u|^{k+3}).$$

De la même façon, on montre que

$$A_{2,2} = H_2(\alpha) + O(|u|^{k+3})$$

où

$$H_2(\alpha) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1 - u^{j-1})}{\alpha^j}.$$

Finalement, en regroupant les deux quantités, on obtient

$$(5) \quad A_2 = (H_1(\alpha) - H_2(\alpha))(1 + O(|u|^{k+3})).$$

Enfin, en reportant (5) et (4) dans (3), on obtient

$$(6) \quad A^{1/F_k} = (\alpha)^{3/\alpha} e^{H_1(\alpha) - H_2(\alpha)} (1 + O(|u|^{\frac{k}{2}})).$$

Maintenant, considérons la quantité

$$B := \left(\frac{1}{16} \frac{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1} F_{k+1}} \right)^{1/F_k}.$$

En appliquant les formules de (2), on obtient, immédiatement,

$$\begin{aligned} 4^{\frac{F_{k+2}}{F_k}} &= 4^{\alpha^2} (1 + O(|u|^{k+1})), \\ \left(\frac{1}{F_{k-1}} \right)^{1/F_k} &= e^{-\frac{1}{F_k} \log F_{k-1}} = (1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}})), \\ \left(\frac{1}{F_{k+1}} \right)^{1/F_k} &= (1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}})), \\ \left(\frac{1}{16} \right)^{1/F_k} &= (1 + O(|u|^{k+1})) \end{aligned}$$

et par suite,

$$(7) \quad B = 3 (4)^{\alpha^2} \left(1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}}) \right).$$

Enfin, la formule de gauche de (2), donne

$$(8) \quad C := 2F_k = \frac{2}{\sqrt{5}} \alpha^{k+1} (1 + O(|u|^k)).$$

En remarquant que $a_k = C B A^{1/F_k}$, en regroupant (6), (7) et (8), et en posant $\Phi = \alpha$, on obtient

$$a_k = \frac{6}{\sqrt{5}} (\Phi)^{3/\Phi} 4^{\Phi^2} e^{H_1(\Phi) - H_2(\Phi)} \Phi^{k+1} (1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}})).$$

2. Etudions la suite b_k . On pose $b_k = E + G + D$, avec

$$E := \left(\frac{2}{3^2} \right)^{\frac{F_{k-3}}{F_k}},$$

$$G := \frac{1}{F_{k-1}^{2/F_k}},$$

$$D := \left(\frac{1}{F_4^{F_{k-6}} \cdots F_{k-3}^{F_1}} \right)^{1/F_k}.$$

Comme dans la partie 1 de la démonstration, on a

$$E = \left(\frac{2}{3^2} \right)^{1/\alpha^3} (1 + O(|u|^{k-2})) \quad \text{et} \quad G = 1 + O\left(|u|^{\frac{k+1}{4}}\right).$$

Il reste à étudier la quantité D . En utilisant la formule de gauche de (2), on peut écrire

$$\log D = -D_1 - D_2$$

avec

$$D_1 = \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{\alpha^{j-1}}{\sqrt{5}},$$

$$D_2 = \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1 - u^{j-1}).$$

La même étude que celle faite dans la partie 1, ci-dessus, donne

$$D_2 = H_3(\alpha) + O(|u|^{k+3})$$

avec

$$H_3(\alpha) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1 - u^{j-1})}{\alpha^j}.$$

Considérons, maintenant, D_1 . On écrit $D_1 = D_{1,1} - D_{1,2}$ avec

$$D_{1,1} := \log \alpha \sum_{j=6}^{k-1} (j-1) \frac{F_{k-j}}{F_k},$$

$$D_{1,2} := \log \sqrt{5} \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k}.$$

La formule de droite de (2) et l'identité sommatoire, citée plus haut, donnent

$$D_{1,2} = \frac{\log \sqrt{5}}{\alpha^4} \left(1 + O \left(|u|^{\frac{k-4}{2}} \right) \right).$$

Maintenant, considérons $D_{1,1}$. L'application de la formule de droite de (2) permet d'écrire

$$D_{1,1} = \bar{D} + O(\bar{R})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \log \alpha \sum_{j=6}^{k-1} (j-1) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^j, \\ \bar{R} &= \sum_{j=6}^{k-1} (j-1) \frac{|u|^{k-j+1}}{\alpha^j}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \bar{R} &\leq (k-2) \sum_{j=6}^{k-1} \frac{1}{\alpha^j} \frac{|\beta|^{k-j+1}}{\alpha^{k-j+1}} \leq \\ &\leq (k-2) \frac{1}{\alpha^{k+1}} \sum_{j=6}^{k-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k-j+1} \ll \\ &\ll (k-2) \frac{1}{\alpha^{k+1}} \ll \\ &\ll (k-2) |u|^{\frac{k+1}{2}} \ll \\ &\ll |u|^{\frac{k+1}{4}}. \end{aligned}$$

Enfin, l'estimation de $\bar{D}$ s'obtient avec un petit calcul :

$$\bar{D} = \frac{5\alpha - 4}{\alpha^5(\alpha - 1)^2} \log \alpha + O \left(|u|^{\frac{k-2}{4}} \right).$$

Finalement, en regroupant nos estimations et en posant $\Phi = \alpha$, on obtient

$$b_k = \left(\frac{2}{3^2} \right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2 \Phi^4} \left(\frac{1}{\Phi} \right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)} \left(1 + O \left(|u|^{\frac{k-4}{2}} \right) \right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Lemme 2.5. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$d(n) \leq 3 e^{\omega(n) \log \log n}.$$

Démonstration. Soit

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s} \quad \text{avec} \quad (s := \omega(n) \geq 1)$$

la décomposition de l'entier $n \geq 3$ en facteurs premiers, et posons

$$N = p_1 p_2 \dots p_s$$

le noyau de n . On a,

$$n.N = p_1^{n_1+1} p_2^{n_2+1} \dots p_s^{n_s+1}.$$

En utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log n.N}{s} &= \frac{1}{s} ((n_1 + 1) \log p_1 + (n_2 + 1) \log p_2 + \dots + (n_s + 1) \log p_s) \geq \\ &\geq ((n_1 + 1) (n_2 + 1) \dots (n_s + 1))^{\frac{1}{s}} \log 2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$d(n) = (n_1 + 1) (n_2 + 1) \dots (n_s + 1) \leq \frac{(\log n.N)^s}{(s \log 2)^s}.$$

Comme $N \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned} d(n) &\leq \frac{(\log n^2)^s}{(s \log 2)^s} \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{s \log 2} \right)^s e^{s \log \log n} \leq \\ &\leq 3 e^{s \log \log n}. \end{aligned}$$

Car, un petit calcul montre que

$$\max_{s \geq 1} \left(\frac{2}{s \log 2} \right)^s = \left(\frac{2}{s \log 2} \right)^s \Bigg|_{s = \frac{2}{e \log 2}} = e^{\frac{2}{e \log 2}} = 2,8906\dots < 3.$$

Enfin, on vérifie que le résultat est vraie pour $n = 2$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

3. Démonstration de la Proposition 1.1

Posons $S_{j+1} = \omega(N_{j+1})$ et écrivons la décomposition de N_{j+1} en facteurs premiers:

$$N_{j+1} = t_1^{\delta_1-1} t_2^{\delta_2-1} \dots t_{S_{j+1}}^{\delta_{S_{j+1}}-1}.$$

On a, par définition, pour $j \geq 1$, $N_j = d(N_{j+1})$. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de la proposition,

$$M_j = Q_1^{\gamma_1-1} Q_2^{\gamma_2-1} \dots Q_A^{\gamma_A-1} |N_j = d(N_{j+1}) = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{S_{j+1}}.$$

Maintenant, nous envisageons deux situations.

Première situation. Supposons qu'il existe un δ_m qui possède au moins $2F_k$ diviseurs premiers, non nécessairement distincts, parmi $Q_1, Q_2, \dots, Q_A$. On a, alors,

$$\log N_{j+1} = \sum_{i=1}^{S_{j+1}} (\delta_i - 1) \log t_i \geq (\delta_m - 1) \log t_m \geq \frac{\log 2}{2} \delta_m.$$

En utilisant la condition (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \log N_{j+1} &\geq \frac{\log 2}{2} \left(\tilde{c}_j (1 - \epsilon)^{F_{j-1}} S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}} \right)^{2F_k} \geq \\ &\geq \left(\frac{(\log 2)^2}{4} (\tilde{c}_j)^2 (1 - \epsilon)^{2F_{j-1}} S_1^{2F_{j-1}} (\log S_1)^{2F_{j-1}} \right)^{F_k}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour S_1 assez grand,

$$\log N_{j+1} \geq (S_1 (\log S_1)^2)^{F_k}.$$

Ceci prouve l'assertion 1 de la proposition.

Deuxième situation. Supposons que les δ_i possèdent moins de $2F_k$ diviseurs premiers parmi $Q_1, Q_2, \dots, Q_A$. Notons C le nombre des δ_i dont chacun possède au moins un diviseur parmi $Q_1, Q_2, \dots, Q_A$. On a

$$C \geq \frac{1}{2F_k} \sum_{i=1}^A (\gamma_i - 1) \geq \frac{1}{4F_k} \sum_{i=1}^A \gamma_i \geq \frac{1}{4F_k} \min_{1 \leq i \leq A} (\gamma_i) A.$$

On utilise, maintenant, la condition (1.1). On obtient

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{4F_k} \left((1 - \epsilon)^{F_{j-2}} \bar{c}_j S_1^{F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-2}} \right) \times \\ &\quad \times \left((1 - \epsilon)^{F_{j-1}-1} c_j S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}-1} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{4F_k} c_j \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_{j-1}+F_{j-2}-1} S_1^{F_{j-1}+F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-1}+F_{j-2}-1} \geq \\ &\geq \frac{1}{4F_k} c_j \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j-1}. \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, notons ces δ_i : $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_C$ et les facteurs premiers correspondants $t_1 > t_2 > \dots > t_C$. Comme, par hypothèse, chacun de ces δ_i possède au moins un facteur premier parmi $Q_1, Q_2, \dots, Q_A$, alors en utilisant la condition (1.1), on obtient, pour chaque i : $i = 1, 2, \dots, C$,

$$\delta_i \geq \tilde{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j-1} (\log S_1)^{F_j-1}.$$

Maintenant, pour S_1 assez grand, on a

$$\begin{aligned} t_{[C/2]} &= (1 + o(1)) [C/2] \log [C/2] = \\ &= \frac{1}{2} (1 + o(1)) C \log C \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (1 - \epsilon) C \log C \geq \\ &\geq \frac{\widetilde{F}_j}{8F_k} c_j \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j}, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{F}_j = \begin{cases} 1/2 & \text{si } j = 1, \\ F_j & \text{si } j \geq 2. \end{cases}$$

La dernière inégalité est obtenue en utilisant les minoration

$$\log C \geq F_j \log S_1$$

valable pour $j \geq 2$, k , ϵ fixés et S_1 assez grand et

$$\log C \geq \frac{1}{2} \log S_1$$

valable pour $j = 1$, k , fixé et S_1 assez grand. On pose $B = C - [C/2]$. On obtient

$$B \geq \frac{C}{2} \geq \frac{1}{8F_k} c_j \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j-1}.$$

On pose $\beta_i = \delta_i$ pour chaque i : $i = 1, 2, \dots, B$. On a, pour chaque i ,

$$\beta_i \geq \tilde{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j-1} (\log S_1)^{F_j-1}.$$

Enfin, on pose pour chaque i : $[C/2] + 1 \leq i \leq C$, $R_i = t_i$. Ainsi

$$R_i = t_i \geq t_{[C/2]+1} \geq \frac{\widetilde{F}_j}{8F_k} c_j \bar{c}_j (1 - \epsilon)^{F_j} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j}.$$

Finalement, en récapitulant ces résultats, on obtient

$$\begin{cases} B \geq c_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j-1}, \\ R_i \geq \tilde{c}_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j}, \\ \beta_i \geq \bar{c}_{j+1} (1 - \epsilon)^{F_j-1} S_1^{F_j-1} (\log S_1)^{F_j-1}, \end{cases}$$

et où l'on a posé pour $1 \leq j \leq k - 1$,

$$\begin{cases} c_{j+1} = \frac{1}{8F_k} c_j \bar{c}_j, \\ \tilde{c}_{j+1} = \frac{\tilde{F}_j}{8F_k} c_j \bar{c}_j = \widetilde{F}_j c_{j+1}, \\ \bar{c}_{j+1} = \tilde{c}_j = F_{j-1} c_j. \end{cases}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition.

4. Démonstration du Théorème 1.1

Démonstration du point 1. Soit $k \geq 2$. S'il existe un entier $j : 1 \leq j \leq k - 1$, tel que N_j vérifie le résultat 1 de la Proposition 1.1, alors on obtient l'inégalité 1 du Théorème 1.1. En effet, on a

$$\log N_{j+1} \geq ((1 - \epsilon) S_1 (\log S_1)^2)^{F_k}$$

et donc

$$S_1 \leq (1 + \epsilon) \frac{(\log N_{j+1})^{1/F_k}}{(\log S_1)^2}.$$

Maintenant, on peut supposer que

$$(9) \quad S_1 := \omega(d_{k-1}(N_k)) \geq (\log N_k)^{\frac{1}{2F_k}}$$

car sinon le résultat 1 du théorème est trivialement vérifié. Il s'ensuit que

$$\omega(d_{k-1}(N_k)) = S_1 \leq (2F_k)^2 (1 + \epsilon) \frac{(\log N_{j+1})^{1/F_k}}{(\log \log N_k)^2}$$

et cette dernière inégalité implique le résultat 1, puisque

$$N_{j+1} = d_{k-j}(N_k) \leq N_k = n.$$

Maintenant, supposons que pour tout j : $1 \leq j \leq k-1$, N_j ne vérifie pas le résultat 1 de la Proposition 1.1. Montrons, d'abord, par récurrence, que pour tout entier $k \geq 2$, N_k vérifie le résultat 2 de la Proposition 1.1. Pour $k = 2$, le Lemme 2.2, montre que $N_j = N_1$ vérifie les hypothèses de la Proposition 1.1. Donc $N_{j+1} = N_2 = N_k$ vérifie les conclusions 2 de cette proposition. Supposons que N_{k-1} vérifie les hypothèses de la Proposition 1.1. Comme N_1 vérifie les hypothèses de cette proposition, alors, pour tout $1 \leq j \leq k-2$, N_j les vérifie aussi et finalement, $N_{(k-1)+1} = N_k$ vérifie les conclusions 2 de la Proposition 1.1. Maintenant, on va minorer $\log N_k$. Ecrivons

$$N_k = p_1^{\rho_1-1} p_2^{\rho_2-1} \dots p_{S_k}^{\rho_{S_k}-1}$$

la décomposition de N_k en facteurs premiers et où l'on a noté $S_k = \omega(N_k)$. Comme N_k vérifie le résultat 2 de la Proposition 1.1, alors il possède au moins

$$B \geq c_k (1 - \epsilon)^{F_{k-1}-1} S_1^{F_{k-1}} (\log S_1)^{F_{k-1}-1}$$

facteurs premiers dont les exposants vérifient

$$\rho_i = \beta_i \geq \bar{c}_k (1 - \epsilon)^{F_{k-2}} S_1^{F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-2}}.$$

Notons ces B facteurs premiers (q_ℓ n'étant pas nécessairement le ℓ -ième nombre premier, mais q_ℓ est supérieur ou égale au ℓ -ième nombre premier)

$$q_1 < q_2 < \dots < q_B.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \log N_k &\geq \sum_{i=1}^{S_k} (\rho_i - 1) \log p_i \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^B \rho_i \log q_i \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \bar{c}_k (1 - \epsilon)^{F_{k-2}} S_1^{F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-2}} \sum_{i=1}^B \log q_i. \end{aligned}$$

Maintenant, on a, en remarquant que $q_{[B/2]}$ est supérieur ou égal au $[B/2]$ -ième nombre premier,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^B \log q_i &\geq \sum_{i=[B/2]}^B \log q_i \geq \\ &\geq \log q_{[B/2]}(B - [B/2]) \geq \\ &\geq (1 - \epsilon) \frac{B}{2} \log B \geq \\ &\geq (1 - \epsilon) \left(\frac{1}{2} c_k (1 - \epsilon)^{F_{k-1}-1} S_1^{F_{k-1}} (\log S_1)^{F_{k-1}-1} \right) (F_{k-1} \log S_1) \geq \\ &\geq \frac{F_{k-1}}{2} c_k (1 - \epsilon)^{F_{k-1}} S_1^{F_{k-1}} (\log S_1)^{F_{k-1}}. \end{aligned}$$

Finalement, en reportant dans la minoration de $\log N_k$, on obtient

$$\begin{aligned} \log N_k &\geq \frac{F_{k-1}}{4} c_k \bar{c}_k (1 - \epsilon)^{F_{k-1}+F_{k-2}} S_1^{F_{k-1}+F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-1}+F_{k-2}} \geq \\ &\geq \hat{c}_k (1 - \epsilon)^{F_k} S_1^{F_k} (\log S_1)^{F_k} \end{aligned}$$

où, on a noté $\hat{c}_k = \frac{F_{k-1}}{4} c_k \bar{c}_k$. Maintenant, on peut montrer l'inégalité 1 du Théorème 1.1. De l'inégalité précédente, on obtient

$$S_1 \leq (1 + \epsilon) \left(\frac{1}{\hat{c}_k} \right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log S_1}.$$

Enfin, en utilisant la minoration (2) de S_1 , on obtient

$$\begin{aligned} \omega(d_{k-1}(n)) &= \omega(d_{k-1}(N_k)) \leq \\ &\leq (1 + \epsilon) 2F_k \left(\frac{1}{\hat{c}_k} \right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log \log N_k} \leq \\ &\leq (1 + \epsilon) 2F_k \left(\frac{1}{\hat{c}_k} \right)^{1/F_k} \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log \log n}. \end{aligned}$$

Maintenant, on pose

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{\hat{c}_k} \right)^{1/F_k}.$$

On a, en utilisant (1.3) de la Proposition 1.1, avec $k+1$ à la place de k et avec $j = k$,

$$\widehat{c}_k = 2 F_{k-1} F_{k+1} c_{k+1}$$

et on remarque que (1.3) de la Proposition 1.1 et le Lemme 2.2 donnent

$$\begin{cases} c_{k+1} = \frac{F_{k-2}}{8F_{k+1}} c_k c_{k-1} & (k \geq 2), \\ c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{8F_2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit, en appliquant le Lemme 2.3, que

$$\widehat{c}_k = \frac{16 F_{k-1} F_{k+1}}{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}} \frac{F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}} F_5^{F_{k-4}} \dots F_{k+1}^{F_0}}.$$

Finalement, on obtient

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{16} \frac{3^{F_k} 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1} F_{k+1}} \frac{F_4^{F_{k-3}} F_5^{F_{k-4}} \dots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}.$$

Ceci termine la démonstration du point 1.

Démonstration du point 2. On utilise la même construction qu'Erdős et Kátai et on raffine leurs arguments. Posons

$$N_1 = 2.3.5 \dots p_{S_1} \quad (S_1 = \omega(N_1)),$$

le produit des S_1 premiers nombres premiers. On définit la suite des nombres $N_2, N_3, \dots, N_k$ de la façon suivante: pour $j \geq 1$, si

$$N_j = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{S_j}^{r_{S_j}} \quad (S_j = \omega(N_j)),$$

alors

$$N_{j+1} = \left(\prod_{i=1}^{r_1} p_i \right)^{p_1-1} \left(\prod_{i=1}^{r_2} p_{r_1+i} \right)^{p_2-1} \dots \left(\prod_{i=1}^{r_{S_j}} p_{r_1+r_2+\dots+r_{S_j-1+i}} \right)^{p_{S_j-1}}$$

Notons que

$$N_2 = p_1^{p_1-1} p_2^{p_2-1} \dots p_{S_2}^{p_{S_2}-1} \quad (S_2 \geq 1)$$

est la suite d'entiers considérées par Ramanujan pour donner une borne inférieure de l'ordre maximum de $d_2(n)$. On a clairement

$$d(N_{j+1}) = N_j$$

et donc

$$N_1 = d(N_2) = d_2(N_3) = d_3(N_4) = \dots = d_{k-1}(N_k)$$

et

$$S_1 = \omega(d_{k-1}(N_k)).$$

Erdős et Kátai ont montré les deux inégalités suivantes. Pour $j \geq 1$ et S_1 assez grand,

$$(10) \quad S_{j+2} \leq (1 + \epsilon) S_{j+1} S_j \log S_j$$

et

$$(11) \quad \log N_{j+1} \leq (1 + \epsilon) S_j S_{j+1} (\log S_{j+1})^2.$$

Donnons-en la démonstration pour la commodité du lecteur. On remarque que

$$S_1 = \omega(N_1) = \Omega(N_1) \quad \text{et} \quad S_{j+1} = \omega(N_{j+1}) = \Omega(N_j)$$

où $\Omega(N_j)$ désigne le nombre total de facteurs premiers de N_j . On a

$$S_{j+2} = \Omega(N_{j+1}) = \sum_{i=1}^{S_j} r_i(p_i - 1) \leq p_{S_j} \sum_{i=1}^{S_j} r_i = p_{S_j} \Omega(N_j) = p_{S_j} S_{j+1}.$$

Et (10) s'obtient en utilisant, pour S_1 assez grand, l'inégalité

$$p_{S_j} \leq (1 + \epsilon) S_j \log S_j.$$

Maintenant, montrons (11). On a, pour $j \geq 1$,

$$\log N_{j+1} \leq p_{S_j} \sum_{i=1}^{\Omega(N_j)} \log p_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{\Omega(N_j)} \log p_i = (1 + o(1)) p_{\Omega(N_j)} = (1 + o(1)) \Omega(N_j) \log \Omega(N_j),$$

on obtient, pour $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \log N_{j+1} &\leq (1 + o(1)) S_j \Omega(N_j) \log S_j \log \Omega(N_j) \leq \\ &\leq (1 + \epsilon) S_j \Omega(N_j) \log \omega(N_j) \log \Omega(N_j) \leq \\ &\leq (1 + \epsilon) S_j \Omega(N_j) (\log \Omega(N_j))^2 \leq \\ &\leq (1 + \epsilon) S_j S_{j+1} (\log S_{j+1})^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'inégalité (11). Maintenant, nous allons majorer $\log N_k$ pour tout entier $k \geq 2$. Pour $k = 2$, on obtient immédiatement de (11)

$$(12) \quad \log N_2 \leq (1 + \epsilon)(S_1 \log S_1)^2$$

et pour $k = 3$, on utilise (11) avec $j = 2$ et (10) avec $j = 1$, on obtient

$$(13) \quad \log N_3 \leq (1 + \epsilon)^2 3^2 (S_1 \log S_1)^3.$$

Maintenant, supposons que $k \geq 4$. L'inégalité (11), appliquée avec $j = k - 1$, donne

$$(14) \quad \log N_k \leq (1 + \epsilon) S_{k-1} S_k (\log S_k)^2.$$

On applique le Lemme 2.3, 2. une fois avec $j = k - 3$ et une fois avec $j = k - 2$, on obtient, pour s_1 assez grand,

$$\begin{aligned} S_{k-1} &= S_{(k-3)+2} \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-4}-1} F_0^{F_{k-4}} F_1^{F_{k-5}} \dots F_{k-4}^{F_0} (1 + \epsilon)^{F_{k-2}-1} S_1^{F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-2}-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_k &= S_{(k-2)+2} \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-3}-1} F_0^{F_{k-3}} F_1^{F_{k-4}} \dots F_{k-4}^{F_1} F_{k-3}^{F_0} (1 + \epsilon)^{F_{k-1}-1} S_1^{F_{k-1}} (\log S_1)^{F_{k-1}-1}. \end{aligned}$$

On note que, pour S_1 assez grand,

$$\log S_k \leq \frac{3}{2} F_{k-1} \log S_1.$$

En reportant ces trois dernières inégalités dans (14), on obtient,

$$\log N_k \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-4}+F_{k-3}} F_0^{F_{k-4}+F_{k-3}} F_1^{F_{k-5}+F_{k-4}} F_2^{F_{k-6}+F_{k-5}} \dots \times \\
 &\quad \times F_{k-4}^{F_0+F_1} F_{k-3}^{F_0} (F_{k-1})^2 (1+\epsilon)^{F_{k-2}+F_{k-1}-1} (S_1 \log S_1)^{F_{k-2}+F_{k-1}} \leq \\
 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-2}} F_0^{F_{k-2}} F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots \times \\
 &\quad \times F_{k-4}^{F_2} F_{k-3}^{F_1} (F_{k-1})^2 (1+\epsilon)^{F_{k-1}} (S_1 \log S_1)^{F_k} = \\
 &= \frac{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}{2^{F_{k-3}}} F_4^{F_{k-6}} F_5^{F_{k-7}} \dots F_{k-3}^{F_1} (1+\epsilon)^{F_{k-1}} (S_1 \log S_1)^{F_k}.
 \end{aligned}$$

En posant, pour $k \geq 4$,

$$e_k = \frac{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}{2^{F_{k-3}}} F_4^{F_{k-6}} F_5^{F_{k-7}} \dots F_{k-3}^{F_1},$$

on obtient, pour tout entier $k \geq 4$ et S_1 assez grand,

$$(15) \quad \log N_k \leq e_k (1+\epsilon)^{F_{k-1}} (S_1 \log S_1)^{F_k}.$$

Maintenant, on a, pour S_1 assez grand,

$$\log N_1 = \sum_{p \leq p_{S_1}} \log p = (1+o(1))p_{S_1} = (1+o(1))S_1 \log S_1$$

et par suite

$$\log S_1 = (1+o(1)) \log \log N_1,$$

et enfin, pour tout $k \geq 2$, fixé,

$$\begin{aligned}
 &(\log S_1)^{F_k} = \\
 &= (1+o(1)) (\log \log N_1)^{F_k} \leq (1+\epsilon) (\log \log N_1)^{F_k} \leq (1+\epsilon) (\log \log N_k)^{F_k}.
 \end{aligned}$$

Finalement, en reportant cette dernière inégalité dans (12) pour $k = 2$, dans (13) pour $k = 3$ et dans (15) pour $k \geq 4$, on obtient, avec la convention : $e_2 = 1$ et $e_3 = 3^2$, que pour tout $k \geq 2$

$$\log N_k \leq e_k ((1+\epsilon) S_1 \log \log N_k)^{F_k}.$$

Et par conséquent,

$$\omega(d_{k-1}(n)) = S_1 \geq (1-\epsilon) \left(\frac{1}{e_k}\right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log \log N_k}.$$

Ce qui termine la démonstration.

Références

- [1] **Erdős P.**, Ramanujan and I, *Number Theory, Madras 1987, Proc. of the International Ramanujan Centenary Conference, Anna University, Madras, India*, ed. K. Alladi, Lecture Notes in Mathematics **1395**, Springer Verlag, 1-20.
- [2] **Erdős P. and Ivić A.**, On the iterates of the enumerating function of finite abelian groups, *Bulletin Acad. Serbe, Sciences Mathématiques*, **17** (1989), 13-22.
- [3] **Erdős P. and Kátai I.**, On the growth of $d_k(n)$, *Fibonacci Quart.*, **7** (1969), 267-274.
- [4] **Ramanujan S.**, Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc.*, Serie 2, **14** (1915), 347-409, and *Collected papers*, Chelsea, 2nd edition, 1962.
- [5] **Ramanujan S.**, *Collected papers*, Chelsea, 2nd edition, 1962.
- [6] **Smati A.**, Sur un problème de S. Ramanujan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, **340** (2005), 1-4.
- [7] **Wigert S.**, Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier, *Arkiv för Matematik*, **3** (18) (1907), 1-9.

A. Smati

XLIM-DMI, UMR-CNRS 6090

Université de Limoges

123 Avenue Albert Thomas

87060 Limoges cedex, France

smati@unilim.fr