Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 22 (2003) 365-371

EIN EINDEUTIGKEITSPROBLEM FÜR ADDITIVE FUNKTIONEN MIT GRENZVERTEILUNG

R. Wagner (Paderborn, Deutschland)

Herrn Prof.Dr. Indlekofer zum 60. Geburtstag gewidmet

Abstract. If two additive functions have the same limit distribution, is it true, that they are equal? In general this is not true. But in the case, that the function is both bounded on the primes and completely additive and that the series of reciproces of primes, for which f and g are not vanishing, are convergent, the equality of limit distributions implies the equality of the functions themselves.

(1) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt additiv, wenn $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ für alle teilerfremden $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. f heißt vollständig additiv, wenn $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

(2) Grundlegend für die Betrachtung von additiven Funktionen mit Grenzverteilung ist der Satz von Erdős-Wintner, der besagt, daß für eine additive Funktion genau dann eine Grenzverteilung existiert, wenn die drei Reihen

$$\sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{|f(p)|^2}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}$$

konvergieren.

Damit hängt zusammen, daß eine additive Funktion f genau dann eine Grenzverteilung besitzt, wenn der Mittelwert der multiplikativen Funktion $\exp(if(\cdot)t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und von 0 verschieden ist.

Für diesen Mittelwert gilt

$$M(\exp(if(\cdot)t)) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(if(p^k)t)}{p^k} \right) \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Dabei ist $M(\exp(if(\cdot)t))$ die Fourier-Transformierte des von der Grenzverteilung von f erzeugten Wahrscheinlichkeitsmaßes. Die additiven Funktionen f und g haben also genau dann die gleiche Grenzverteilung, wenn diese Fourier-Tranformierten übereinstimmen.

(3) Im allgemeinen Fall folgt aus der Gleichheit der Grenzverteilungen der additiven Funktionen f und g nicht die Gleichheit der Funktionen selbst. Dies zeigt schon das folgende Beispiel:

Beispiel 1. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ additiv mit $f(2) = 1$ und $f(p^k) = 0$ für $p \neq 2$ oder $k \geq 2$ und es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ additiv mit $g(2^k) = 1$ für $k \geq 2$ und $g(p^k) = 0$ fr $p \neq 2$ oder $k = 1$. f und g haben die gleiche Grenzverteilung, aber sie sind verschieden.

Die Tatsache, daß es solche Gegenbeispiele gibt, liegt nicht an der Besonderheit der Primzahl 2.

Beispiel 2. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ additiv mit $f(3^{3k+2}) = 1$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f(p^j) = 0$ für $p \neq 3$ oder $j \not\equiv 2 \bmod 3$. Und es sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ additiv mit $g(13^k) = 1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $g(p^k) = 0$ für $p \neq 13$.

(4) Wir betrachten nun vollständig additive Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty$. (Die Bedingungen des Satzes von Erdős-Wintner sind also erfüllt.) Es gilt:

$$\begin{aligned}\log(M(\exp(if(\cdot)t))) &= \sum_p \left(-\log\left(1 - \frac{\exp(if(p)t)}{p}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) = \\ &= \sum_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\exp(if(p)t \cdot k)}{p^k} + \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right).\end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung ist diese Reihe gleichmäßig in t absolut konvergent. (Man beachte, daß nur über solche p summiert wird, für die $f(p) \neq 0$ ist.) Nach dem großen Umordnungssatz läßt sich diese Reihe in der Form $\sum c(\alpha) \exp(i\alpha t)$ schreiben, wobei diese verallgemeinerte Fourier-Reihe gleichmäßig in t absolut konvergiert. Dabei sind bei einer gleichmäßig in t absolut konvergenten verallgemeinerten Fourier-Reihe die Koeffizienten $c(\alpha)$ wegen der Beziehung

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\alpha}c(\alpha)\exp(i\alpha t)\exp(-i\beta t)=c(\beta)$$

eindeutig bestimmt.

Sind nun f und g vollständig additive Funktionen, die der oben genannten Bedingung genügen, so gilt: f und g haben genau die gleiche Grenzverteilung, wenn bei der Darstellung von $\log(M(\exp(if(\cdot)t)))$ und $\log(M(\exp(ig(\cdot)t)))$ als verallgemeinerte Fourier-Reihe man zu den gleichen Fourier-Koeffizienten kommt.

(5) **Satz.** *Es seien f und g vollständig additive Funktionen, die auf der Primzahlmenge beschränkt sind und für die gilt* $\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}<\infty$, $\sum_{g(p)\neq 0}\frac{1}{p}<\infty$. *Dann folgt aus der Gleichheit der Grenzverteilungen, die Gleichheit der Funktionen selbst.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\min_{f(p)\neq 0}p\leq\min_{g(p)\neq 0}p$. Es sei $q_0:=\min_{f(p)\neq 0}p$ und $f(q_0)=$ $=\alpha$. Der Fourier-Koeffizient von $\log(M(\exp(if(\cdot)t)))$ bei $\exp(i\alpha j)$ sei $c(\alpha\cdot j)$ Wir zeigen: $\liminf_{j\to\infty}(c(\alpha j))^{\frac{1}{j}}=\frac{1}{q_0}$.

Ganz allgemein zeigen wir, daß für $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $k\cdot f(p)=\beta$ für wenigstens eine Primzahl p und ein $k\in\mathbb{N}$ gilt: $\liminf_{j\to\infty}c(\beta\cdot j)=\frac{1}{p_0^{k_0}}$, wobei $p_0^{k_0}:=\min_{k\cdot f(p)=\beta}p^k$ sein soll. Es gilt: $c(\beta\cdot j)=\sum_{k\cdot f(p)=\beta j}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^k}$. Wir bilden $W_{\beta,j}:=\sum_{\substack{kf(p)=\beta\cdot j\\ p^k\neq p_0^{k_0}}}\frac{k_0jp_o^{k_0j}}{kp^k}$. Es gilt $c(\beta\cdot j)=\frac{1}{k_0\cdot j}\frac{1}{p_0^{k_0\cdot j}}(1+W_{\beta,j})$. Wegen $W_{\beta,j}\geq 0$ gilt: $\liminf_{j\to\infty}(c(\beta\cdot j))^{\frac{1}{j}}\geq\frac{1}{p_0^{k_0}}$. Wenn nun $\{W_{\beta,j}\}$ eine beschränkte Teilfolge hat, so hat man auch $\liminf_{j\to\infty}(c(\beta\cdot j)^{\frac{1}{j}}\leq\frac{1}{p_0^{k_0}}$. Es gilt:

$$W_{\beta,j}=\sum_{kf(p)=j\cdot\beta}\frac{k_0\cdot j}{k}\exp\left(\left(k_0\frac{\log p_0}{\log p}-\frac{k}{j}\right)j\cdot\log p\right).$$

Nun gilt: $|f(p)| \leq M$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Damit gilt: $\dfrac{j}{k} = \dfrac{f(p)}{\beta} = \left|\dfrac{f(p)}{\beta}\right| \leq \dfrac{M}{|\beta|}$. Und es gilt: $-\dfrac{k}{j} \leq -\dfrac{|\beta|}{M}$. Für $p > p_1$ gilt also:

$$\frac{k_0 \log p_0}{\log p} - \frac{k}{j} \leq \frac{k_0 \log p_0}{\log p_1} - \frac{|\beta|}{M} < 0.$$

Wir können nun so aufspalten:

$$W_{\beta,j} = \underbrace{\sum_{kf(p)=j\beta,\, p\leq p_1} \frac{k_0 j}{k} \exp\left(\left(k_0 \frac{\log p_0}{\log p} - \frac{k}{j}\right) j \log p\right) +}_{\sum'}$$
$$+ \underbrace{\sum_{kf(p)=j\beta,\, p>p_1} \frac{k_0 j}{k} \exp\left(\left(k_0 \frac{\log p_0}{\log p} - \frac{k}{j}\right) j \log p\right).}_{\sum''}$$

Man sieht, daß $\sum''$ bzgl. j monoton fallend ist, und für $j \geq j_0$ ist die Reihe $\sum''$ kovergent. Nun zu $\sum'$. Aus $kf(p) = j \cdot \beta$ folgt: $\dfrac{\beta}{f(p)} = \dfrac{k}{j} = \dfrac{r}{s}$ mit teilerfremden r und s. Es gilt also $jr = ks$. Hieraus folgt $s|j$. Für $s \neq 1$ kann durch geeignete Wahl von j dieser Fall vermieden werden, es kommen ja nur endlich viele p in der Summe $\sum'$ vor. Im Fall $\dfrac{\beta}{f(p)} = \dfrac{r}{s}$ mit $s = 1$ gilt $rf(p) = \beta$. Damit ist aber $p^r > p_0^k$, also $\dfrac{p_0^{k_0 \cdot j}}{p^k} = \left(\dfrac{p_0^{k_0}}{p^r}\right)^j$ und $\dfrac{p_0^{k_0}}{p^r} < 1$. Also kann man $\sum'$ als Funktion von j bei einer geeigneten Wahl einer Teilfolge beschränkt halten. Wäre nun $g(q_0) \neq f(q_0)$, so müßte $\liminf\limits_{j\to\infty} (c(\alpha j))^{\frac{1}{j}} = \dfrac{1}{p_0^{k_0}}$ sein. Dabei müßte dann aber $\dfrac{1}{p_0^k} < \dfrac{1}{q_0}$ sein, was ein Widerspruch darstellt.

Nun kann man in beiden verallgemeinerten Fourier-Reihen die gleichen Summanden

$$\frac{1}{k} \frac{\exp(ikf(q_0)t)}{q_0^k} \quad \text{und} \quad \log\left(1 - \frac{1}{q_0}\right)$$

streichen und dann induktiv mit dem Vergleich der Koeffizienten der verbleibenden verallgemeinerten Fourier-Reihen fortfahren. So erhält man induktiv $f(p) = g(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

(6) **Beispiel 3.** Es soll nun ein Beispiel, dafür gegeben werden, daß zwei vollständig additive Funktionen zwar die gleiche Grenzverteilung besitzen, aber als Funktionen verschieden sind, allerdings sind beide Funktionen auf der Primzahlmenge unbeschränkt.

Bei der Konstruktion dieses Beispiels wird im wesentlichen benutzt, daß man eine divergente Reihe, deren Glieder positiv sind und eine Nullfolge bilden, so ausdünnen kann, daß man eine konvergente Reihe mit einem vorgeschriebenen Grenzwert erhält, dabei kann man diese durch Ausdünnung entstehende Reihe beliebig spät anlaufen lassen. Man kann, da die nach Weglassen der ausgedünnten Reihe entstandene Restreihe wieder divergent ist, aus der Restreihe wieder durch Ausdünnung eine konvergente Reihe mit einem vorgegebenen Grenzwert gewinnen. Man kann so induktiv fortfahren und konvergente Reihen mit vorgegebenen Grenzwerten und paarweise disjunkten Indexmengen erhalten. Als divergente Grundreihe wird hier $\sum \frac{1}{p}$, wobei p über die Primzahlen läuft, genommen.

Nun zur konkreten Konstruktion: Man nimmt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, α und β $\mathbb{Q}$-linear unabhängig. Es genügt die vollständig additiven Funktionen f und g auf der Primzahlmenge anzugeben. Es sei $f(2) = \alpha$ und es sei $f(p)$ kein rationales Vielfaches von α für $p \neq 2$, falls $f(p) \neq 0$ ist. (Die genaue Konstruktion von f wird in einem Schritt angegeben). Bei $\log(M(\exp(if(\cdot)t)))$ ist der Fourier-Koeffizient zu $j\alpha$ dann $c(\alpha \cdot j, f) = \frac{1}{j \cdot 2^j}$. Bei g werden nun nacheinander eine Folge disjunkter Teilmengen P_m von $\mathbb{P}$ so konstruiert, daß $g(p) = j\alpha$ für $p \in P_j$ gilt und der Fourier-Koeffizient zu $j\alpha : c(j\alpha, g) = \frac{1}{j}\frac{1}{2^j}$ ist. Für kein j soll gelten $2 \in P_j$. Außerdem ist (wegen $c(j\alpha, g) = \frac{1}{j}\frac{1}{2^j}$) sicher zu stellen, daß

$$\sum_{kg(p)=j\alpha} \frac{1}{k}\frac{1}{p^k} = \sum_m \sum_{\substack{p\in P_m \\ kg(p)=j\alpha}} \frac{1}{kp^k} = \frac{1}{j \cdot 2^j} \quad \text{gilt.}$$

Wegen $g(p) = m\alpha$ für $p \in P_m$ folgt aus $kg(p) = j\alpha$ jetzt: $k \cdot m = j$. Es sind also die Gleichungen zu erfüllen:

$$\sum_{m|j} \sum_{p\in P_m} \frac{1}{\frac{j}{m}} \frac{1}{p^{\frac{j}{m}}} = \frac{1}{j}\frac{1}{2^j}.$$

Die Konstruktion läßt sich genau dann induktiv fortsetzen, wenn

$$\sum_{\substack{m|j \\ m\neq j}} \sum_{p\in P_m} \frac{1}{\frac{j}{m}} \frac{1}{p^{\frac{j}{m}}} < \frac{1}{j}\frac{1}{2^j}$$

ist.

Dabei möchte man allerdings auch die Bedingungen des Satzes von Erdős-Wintner erfüllen und die Umordnung von $\log M(\exp(ig(\cdot)t)))$ in eine gleichmäßig in t absolut konvergente verallgemeinerte Fourier-Reihe sichern. Dies ist aber sicher erfüllt, wenn die obige Ungleichung gilt, da dann $\sum\limits_{p\in P_j}\frac{1}{p}<\frac{1}{j}\frac{1}{2^j}$ ist (Summand $m=j$), wobei hieraus folgt $\sum\limits_{p\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}P_m}\frac{1}{p}<\infty$. $g(p)$ wird 0 gesetzt für $p\notin\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}P_m\cup\{2\}$.

Jetzt wird ausgenutzt, daß man die Mengen P_m beliebig spät anlaufen lassen kann, d.h. man kann zu jeder streng monotonen Folge $\{W_m\}, W_m\in\mathbb{N}$ die Folge $\{P_m\}$ so konstruieren, daß $\min\limits_{p\in P_m} p>W_m$ gilt. Es gilt nun für $k\in \in\mathbb{N}\setminus\{1\}$:

$$\sum_{p\in P_m}\frac{1}{p^k}\le\sum_{n>W_m}\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{W_m^{k-1}}.$$

Man erhält also:

$$\sum_{\substack{m|j\\ m\neq j}}\sum_{p\in P_m}\frac{1}{\frac{j}{m}}\frac{1}{p^{\frac{j}{m}}}\le\sum_{\substack{m|j\\ m\neq j}}\frac{1}{\frac{j}{m}}\frac{1}{W_m^{\frac{j}{m}-1}}.$$

Wir schätzen weiter ab:

$$\sum_{\substack{m|j\\ m\neq j}}\frac{1}{\frac{j}{m}}\frac{1}{W_m^{\frac{j}{m}-1}}\le\sum_{m\le\frac{j}{2}}\frac{1}{W_m^{\frac{j-m}{m}}}$$

Z.B. mit der Wahl $W_m:=2^{6m}$ erhält man:

$$\sum_{m\le\frac{j}{2}}\frac{1}{W_m^{\frac{j-m}{m}}}=\sum_{m\le\frac{j}{2}}\frac{1}{2^{6(j-m)}}\le\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{2^{3j}}.$$

Nun gilt aber $\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{2^{3j}}<\frac{1}{j\cdot 2^j}\Leftrightarrow\frac{j^2}{2}<2^{2j}$. (Wegen $2^{2j}=(1+1)^{2j}> >\frac{2j(2j-1)}{2}\ge\frac{j^2}{2}$ ist dies aber sicher richtig.) Nun setzt man $g(2)=\beta$ und $f(p)=m\beta$ für $p\in P_m$. Für $p\notin\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}P_m\cup\{2\}$ setzt man $f(p)=g(p)=0$. f und g haben somit bzgl. $\log(M(\exp(if(\cdot)t)))$ bzw. $\log(M(\exp(ig(\cdot)t)))$ die gleichen Fourier-Koeffizienten, sind aber als Funktionen nicht gleich.

References

[1] **Elliott P.D.T.A.,** *Probabilistic number theory I-II.,* Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1979, 1980.

[2] **Erdős P.,** On the distribution of additive functions, *Ann. of Math.,* **47** (1946), 1-20.

[3] **Indlekofer K.-H.,** Cesàro means of additive functions, *Analysis,* **6** (1986), 1-24.

R. Wagner
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn, Deutschland