Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 16 (1996) 197-205

LAKUNÄRE INTERPOLATION MIT SPLINE–FUNKTIONEN II. DIE FÄLLE (0;2;3) MIT FUNKTIONSWERTE IN GRUNDPUNKTE

J. Györvári (Veszprém, Ungarn)

Herrn Professor János Balázs zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Der Verfasser definierte in [1] die modifizierten lakunären Spline-Funktionen $S_\Delta(x)$, welche in [1] in jedem Interwall aus Polinomen fünften oder sechsten Grades bestehen und die folgenden Bedingungen erfüllen ($S_\Delta(x) = S_k(x)$, wenn $x_k \le x \le x_{k+1}$, wo $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $f \in C^5([0;1])$).

$$S_k^{(q)}(x_k) = f^{(q)}(x_k) = y_k^{(q)} \qquad (q = 0, 2, 3;\ k = 0, 1, \dots, n-1), \tag{1.1}$$

$$S_{n-1}^{(q)}(x_n) = f^{(q)}(x_n) = y_n^{(q)} \qquad (q = 0, 2, 3), \tag{1.2}$$

$$S_0'(x_0) = f'(x_0) = y_0^{(1)}, \tag{1.3}$$

$$S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n) = y_n^{(1)}, \tag{1.4}$$

$$S_k^{(q)}(x_{k+1}) = S_{k+1}^{(q)}(x_{k+1}) \qquad (q = 0, 2, 3;\ k = 0, 1, \dots, n-2). \tag{1.5}$$

Wir bewiesen Existenz-, Unizität- und Konvergenz-Sätze (Satz 2.1 und 3.1 in [1]).

Satz A. (2.1. in [1]) *Es sei*

$$S_\Delta(x) := \begin{cases} S_0(x), & \textit{wenn } x_0 \le x \le x_1, \\ S_k(x), & \textit{wenn } x_k \le x \le x_{k+1} \quad (k = 1, 2 \dots, n-2), \\ S_{n-1}(x), & \textit{wenn } x_{n-1} \le x \le x_n, \end{cases}$$

wo

$$S_0(x) = y_0^{(0)} + y_0^{(1)}(x - x_0) + \frac{y_0^{(2)}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}(x - x_0)^3 + \\ + a_{0,4}(x - x_0)^4 + a_{0,5}(x - x_0)^5 + a_{0,6}(x - x_0)^6, \tag{1.6}$$

$$S_k(x) = y_k^{(0)} + a_{k,1}(x - x_k) + \frac{y_k^{(2)}}{2}(x - x_k)^2 + \frac{y_k^{(3)}}{6}(x - x_k)^3 + \\ + a_{k,4}(x - x_k)^4 + a_{k,5}(x - x_k)^5, \tag{1.7}$$

$$S_{n-1}(x) = \\ = y_{n-1}^{(0)} + a_{n-1,1}(x - x_{n-1}) + \frac{y_{n-1}^{(2)}}{2}(x - x_{n-1})^2 + \frac{y_{n-1}^{(3)}}{6}(x - x_{n-1})^3 + \\ + a_{n-1,4}(x - x_{n-1})^4 + a_{n-1,5}(x - x_{n-1})^5 + a_{n-1,6}(x - x_{n-1})^6. \tag{1.8}$$

Dann sind die Koeffizienten des Polynoms durch die Bedingungen (1.1-1.5) eindeutig bestimmt.

Für die Koeffizienten bekamen wir

$$a_{0,4} = \frac{5}{h^4}\{F_0^{(0)} - y_1^{(1)}h\} - \frac{1}{2h^2}F_0^{(2)} + \frac{1}{12h}F_0^{(3)}, \tag{1.9}$$

$$a_{0,5} = -\frac{6}{h^5}\{F_0^{(0)} - y_0^{(1)}h\} + \frac{4}{5h^3}F_0^{(2)} - \frac{3}{20h^2}F_0^{(3)}, \tag{1.10}$$

$$a_{0,6} = \frac{2}{h^6}\{F_0^{(0)} - y_0^{(1)}h\} - \frac{3}{10h^4}F_0^{(2)} + \frac{1}{15h^3}F_0^{(3)}, \tag{1.11}$$

$$a_{k,1} = \frac{1}{h}F_k^{(0)} - \frac{3}{20}hF_k^{(2)} + \frac{1}{30}h^2F_k^{(3)}, \tag{1.12}$$

$$a_{k,4} = \frac{1}{4h^2}F_k^{(2)} - \frac{1}{12h}F_k^{(3)}, \tag{1.13}$$

$$a_{k,5} = -\frac{1}{10h^3}F_k^{(2)} + \frac{1}{20h^2}F_k^{(3)}, \tag{1.14}$$

$$a_{n-1,1} = \frac{2}{h}F_{n-1}^{(0)} - F_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{5}hF_{n-1}^{(2)} - \frac{1}{60}h^2F_{n-1}^{(3)}, \tag{1.15}$$

$$a_{n-1,4} = -\frac{5}{h^4}F_{n-1}^{(0)} + \frac{5}{h^3}F_{n-1}^{(1)} - \frac{3}{2h^2}F_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6h}F_{n-1}^{(3)}, \tag{1.16}$$

$$a_{n-1,5} = \frac{6}{h^5}F_{n-1}^{(0)} - \frac{6}{h^4}F_{n-1}^{(1)} + \frac{2}{h^3}F_{n-1}^{(2)} - \frac{1}{4h^2}F_{n-1}^{(3)}, \tag{1.17}$$

$$a_{n-1,6} = -\frac{2}{h^6}F_{n-1}^{(0)} + \frac{2}{h^5}F_{n-1}^{(1)} - \frac{7}{10h^4}F_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{10h^3}F_{n-1}^{(3)}, \tag{1.18}$$

wo

$$(1.19)\quad F_k^{(0)} = y_{k+1}^{(0)} - y_k^{(0)} - \frac{y_k^{(2)}}{2}h^2 - \frac{y_k^{(3)}}{6}h^3 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$(1.20)\quad F_k^{(2)} = y_{k+1}^{(2)} - y_k^{(2)} - y_k^{(3)}h \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$(1.21)\quad F_k^{(3)} = y_{k+1}^{(3)} - y_k^{(3)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$(1.22)\quad F_{n-1}^{(1)} = y_n^{(1)} - y_{n-1}^{(2)}h - \frac{y_{n-1}^{(3)}}{2}h^2 \qquad \textit{und}\ \ h = \frac{1}{n}.$$

Satz B (3.1 in [1]). *Es sei $f \in C^5([0,1])$ und $S_\Delta(x)$ die vorher konstruierte Spline Funktion. Dann gelten*

$$|f^{(q)}(x) - S_\Delta^{(q)}(x)| \leq K\omega(f^{(5)}, h) \qquad (q = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

wo

$$\begin{aligned} K &= \ \ 52 \quad \textit{wenn} \quad x \in [x_0, x_1], \\ K &= \ \ \ 3 \quad \textit{wenn} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2), \\ K &= 142 \quad \textit{wenn} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{aligned}$$

und $\omega(f^{(5)}, h) = \sup\limits_{|x-x_1| \leq h} |f^{(5)}(x) - f^{(5)}(x_1)|$.

Zur Konstruktion der "echten" modifizierten lakunären Spline Funktionen benutzten wir die Werte $y_k^{(q)} = f^{(q)}(x_k)$ $(q = 0, 2, 3)$, $y_0^{(1)} = f'(x_0)$ und $y_n^{(1)} = f'(x_n)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. In der naturwissenschaftlichen Praxis sind oft nur $y_k^{(0)} = f(x_k)$ bekannt. In dieser Arbeit konstruieren wir die Näherungswerte $\overline{y}_k^{(q)}$ $(q = 0, 2, 3;\ k = 0, , \ldots, n)$, $\overline{y}_0^{(1)}$ und $\overline{y}_n^{(1)}$ mit Hilfe der Werte $y_k^{(0)}$ und dann - ähnlich wie in [1] - konstruieren wir die modifizierten lakunären "Näherung"-Spline-Funktionen. Zuletzt geben wir Konvergenzsätze.

2. Erstes Konvergenz-Verfahren

In diesem Teil definieren wir die Näherungswerte $\overline{y}_k^{(q)}$ $(q = 0, 1, \ldots, 5;\ k = 0, 1, \ldots, n)$ und wir untersuchen auch die Distanz der Werten $y_k^{(q)}$ und $\overline{y}_k^{(q)}$ $(q = 0, 1, \ldots, 5;\ k = 0, 1, \ldots, n)$.

Definition $\overline{y}_k^{(q)}$. Es sei $\Delta_{k,j} = f(x_{k+j}) - f(x_k) = y_{k+j}^{(0)} - y_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; $j = -5, -4, \ldots, 4, 5$). Zur Definition von $\overline{y}_k^{(q)}$ benutzen wir die Werte $\Delta_{k,j}$.

Für $k = 0, 1, \ldots, n$ seien

$$\overline{y}_k^{(0)} := f(x_k) = y_k^{(0)}.$$

Für $k = 0$ seien

$$\overline{y}_0^{(1)} := \frac{1}{60h}\{300\Delta_{0,1} - 300\Delta_{0,2} + 200\Delta_{0,3} - 75\Delta_{0,4} + 12\Delta_{0,5}\},$$

$$\overline{y}_0^{(2)} := \frac{1}{12h^2}\{154\Delta_{0,1} - 214\Delta_{0,2} + 156\Delta_{0,3} - 61\Delta_{0,4} + 10\Delta_{0,5}\},$$

$$\overline{y}_0^{(3)} := \frac{1}{12h^3}\{213\Delta_{0,1} - 354\Delta_{0,2} + 294\Delta_{0,3} - 123\Delta_{0,4} + 21\Delta_{0,5}\},$$

$$\overline{y}_0^{(4)} := \frac{1}{h^4}\{-14\Delta_{0,1} + 26\Delta_{0,2} - 24\Delta_{0,3} + 11\Delta_{0,4} - 2\Delta_{0,5}\},$$

$$\overline{y}_0^{(5)} := \frac{1}{h^5}\{5\Delta_{0,1} - 10\Delta_{0,2} + 10\Delta_{0,3} - 5\Delta_{0,4} + \Delta_{0,5}\}.$$

Für $k = n$ seien

$$\overline{y}_n^{(1)} := \frac{1}{60h}\{12\Delta_{n,-5} - 75\Delta_{n,-4} + 200\Delta_{n,-3} - 300\Delta_{n,-2} + 300\Delta_{n,-1}\},$$

$$\overline{y}_n^{(2)} := -\frac{1}{12h^2}\{10\Delta_{n,-5} - 61\Delta_{n,-4} + 156\Delta_{n,-3} - 214\Delta_{n,-2} + 154\Delta_{n,-1}\},$$

$$\overline{y}_n^{(3)} := \frac{1}{12h^3}\{21\Delta_{n,-5} - 123\Delta_{n,-4} + 294\Delta_{n,-3} - 354\Delta_{n,-2} + 213\Delta_{n,-1}\},$$

$$\overline{y}_n^{(4)} := -\frac{1}{h^4}\{-2\Delta_{n,-5} + 11\Delta_{n,-4} - 24\Delta_{n,-3} + 26\Delta_{n,-2} - 14\Delta_{n,-1}\},$$

$$\overline{y}_n^{(5)} := \frac{1}{h^5}\{\Delta_{n,-5} - 5\Delta_{n,-4} + 10\Delta_{n,-3} - 10\Delta_{n,-2} + \Delta_{n,-1}\}.$$

Für $k = 1$ seien

$$\overline{y}_1^{(1)} := -\frac{1}{60h}\{12\Delta_{1,-1} - 120\Delta_{1,1} + 60\Delta_{1,2} - 20\Delta_{1,3} + 3\Delta_{1,4}\},$$

$$\overline{y}_1^{(2)} := \frac{1}{12h^2}\{10\Delta_{1,-1} - 4\Delta_{1,1} + 14\Delta_{1,2} - 6\Delta_{1,3} + \Delta_{1,4}\},$$

$$\overline{y}_1^{(3)} := -\frac{1}{4h^3}\{7\Delta_{1,-1} + 31\Delta_{1,1} - 22\Delta_{1,2} + 7\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\},$$

$$\overline{y}_1^{(4)} := \frac{1}{h^4}\{2\Delta_{1,-1} + 16\Delta_{1,1} - 14\Delta_{1,2} + 6\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\},$$

$$\overline{y}_1^{(5)} := -\frac{1}{h^5}\{\Delta_{1,-1} + 10\Delta_{1,1} - 10\Delta_{1,2} + 5\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\}.$$

Für $k = n-1$ seien

$$\overline{y}^{(1)}_{n-1} := \frac{1}{60h}\{3\Delta_{n-1,-4} - 20\Delta_{n-1,-3} + 60\Delta_{n-1,-2} - 120\Delta_{n-1,-1} + \\ + 12\Delta_{n-1,1}\}$$

$$\overline{y}^{(2)}_{n-1} := \frac{1}{12h^2}\{\Delta_{n-1,-4} - 6\Delta_{n-1,-3} + 14\Delta_{n-1,-2} - 4\Delta_{n-1,-1} + 10\Delta_{n-1,1}\},$$

$$\overline{y}^{(3)}_{n-1} := \frac{1}{4h^3}\{-\Delta_{n-1,-4} + 7\Delta_{n-1,-3} - 22\Delta_{n-1,-2} + 32\Delta_{n-1,-1} + 7\Delta_{n-1,1}\},$$

$$\overline{y}^{(4)}_{n-1} := \frac{1}{h^4}\{-\Delta_{n-1,-4} + 6\Delta_{n-1,-3} - 14\Delta_{n-1,-2} + 16\Delta_{n-1,-1} + 2\Delta_{n-1,1}\},$$

$$\overline{y}^{(5)}_{n-1} := \frac{1}{h^5}\{-\Delta_{n-1,-4} + 5\Delta_{n-1,-3} - 10\Delta_{n-1,-2} + 10\Delta_{n-1,-1} + \Delta_{n-1,1}\}.$$

Für $k = n-2$ seien

$$\overline{y}^{(1)}_{n-2} := \frac{1}{60h}\{2\Delta_{n-2,-3} - 15\Delta_{n-2,-2} + 60\Delta_{n-2,-1} - 30\Delta_{n-2,1} + 3\Delta_{n-2,2}\},$$

$$\overline{y}^{(2)}_{n-2} := -\frac{1}{12h^2}\{-\Delta_{n-2,-2} + 16\Delta_{n-2,-1} + 16\Delta_{n-2,1} - \Delta_{n-2,2}\},$$

$$\overline{y}^{(3)}_{n-2} := \frac{1}{4h^3}\{-\Delta_{n-2,-3} + 7\Delta_{n-2,-2} - 14\Delta_{n-2,-1} - \Delta_{n-2,1} - \Delta_{n-2,2}\},$$

$$\overline{y}^{(4)}_{n-2} := -\frac{1}{h^4}\{\Delta_{n-2,-2} - 4\Delta_{n-2,-1} - 4\Delta_{n-2,1} + \Delta_{n-2,2}\},$$

$$\overline{y}^{(5)}_{n-2} := \frac{1}{h^5}\{\Delta_{n-2,-3} - 5\Delta_{n-2,-2} + 10\Delta_{n-2,-1} + 5\Delta_{n-2,1} + \Delta_{n-2,2}\}.$$

Für $k = 2, 3, \ldots, n-3$ seien

$$\overline{y}^{(1)}_{k} := \frac{1}{60h}\{3\Delta_{k,-2} - 30\Delta_{k,-1} + 60\Delta_{k,1} - 15\Delta_{k,2} + 2\Delta_{k,3}\},$$

$$\overline{y}^{(2)}_{k} := \frac{1}{12h^2}\{-\Delta_{k,-2} + 16\Delta_{k,-1} + 16\Delta_{k,1} - \Delta_{k,2}\},$$

$$\overline{y}^{(3)}_{k} := \frac{1}{4h^3}\{-\Delta_{k,-2} - \Delta_{k,-1} - 14\Delta_{k,1} + 7\Delta_{k,2} - \Delta_{k,3}\},$$

$$\overline{y}^{(4)}_{k} := \frac{1}{h^4}\{\Delta_{k,-2} - 4\Delta_{k,-1} - 4\Delta_{k,1} + \Delta_{k,2}\},$$

$$\overline{y}^{(5)}_{k} := \frac{1}{h^5}\{-\Delta_{k,-2} + 5\Delta_{k,-1} + 10\Delta_{k,1} - 5\Delta_{k,2} + \Delta_{k,3}\}.$$

Satz 2.1. *Es sei $f \in C^5([0,1])$, $y_k^{(q)} := f^{(q)}(x_k)$ und $\overline{y}_k^{(q)}$ die vorher konstruierten Näherungswerte. Dann gelten*

$$|y_k^{(q)} - \overline{y}_k^{(q)}| \le M_{k,q} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h) \quad (k = 0, 1, \dots, n;\ q = 1, 2, 3, 4, 5),$$

wo

$$h = \frac{1}{n}; \qquad \omega(f^{(5)}, h) = \sup_{|x - x_1| \le h} |f^{(5)}(x) - f^{(5)}(x_1)|$$

und für $M_{k,q}$ bekommen wir

$k \setminus q$	1	2	3	4	5
$0; n$	24	96,3	176,8	201,6	96,4
$1; n-1$	1,4	2,1	7,3	24,6	22,5
$2 \le k \le n-2$	0,2	0,2	1,3	1,2	6,1

Beweis des Satzes 2.1. Es sei $x_0 \le x \le x_1$. Wir können die nachstehende Taylor-Formel aufschreiben, die sich aus der Bedingung $f \in C^5([0;1])$ ergibt

$$f(x) = y_0^{(0)} + y_0^{(1)}(x - x_0) + \frac{y_0^{(2)}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}(x - x_0)^3 +$$
$$+ \frac{y_0^{(4)}}{24}(x - x_0)^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120}(x - x_0)^5 + \frac{f^{(5)}(\xi) - y_0^{(5)}}{120}(x - x_0)^5$$
$$(x_0 < \xi < x).$$

Bei $x = x_j$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ erhalten wir das nachstehende Gleichung-System

$$\Delta_{0,1} = y_1^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)} h + \frac{y_0^{(2)}}{2} h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6} h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24} h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120} h^5 +$$
$$+ \frac{h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_1) - y_0^{(5)}\},$$

$$\Delta_{0,2} = y_2^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)} 2h + \frac{y_0^{(2)}}{2} 4h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6} 8h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24} 16h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120} 32h^5 +$$
$$+ \frac{32h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_2) - y_0^{(5)}\},$$

$$\Delta_{0,3} = y_3^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)} 3h + \frac{y_0^{(2)}}{6} 9h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6} 27h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24} 81h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120} 243h^5 +$$
$$+ \frac{243h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_3) - y_0^{(5)}\},$$

$$\Delta_{0,4} = y_4^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)}4h + \frac{y_0^{(2)}}{2}16h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}64h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}256h^4 +$$
$$+ \frac{y_0^{(5)}}{120}1024h^5 + \frac{1024h^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_4) - y_0^{(5)}\},$$
$$\Delta_{0,5} = y_5^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)}5h + \frac{y_0^{(2)}}{2}25h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}125h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}625h^4 +$$
$$+ \frac{y_0^{(5)}}{120}3125h^5 + \frac{3125h^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_5) - y_0^{(5)}\},$$

wo $x_0 < \xi_i < x_i$ $(i = 1,2,3,4,5)$.

Aus diesem System bekommt man

$$y_0^{(1)} = \frac{1}{60h}\{300\Delta^*_{0,1} - 300\Delta^*_{0,2} + 200\Delta^*_{0,3} - 75\Delta^*_{0,4} + 12\Delta^*_{0,5}\},$$
$$y_0^{(2)} = \frac{1}{12h^2}\{154\Delta^*_{0,1} - 214\Delta^*_{0,2} + 156\Delta^*_{0,3} - 61\Delta^*_{0,4} + 10\Delta^*_{0,5}\},$$
$$y_0^{(3)} = \frac{1}{12h^3}\{213\Delta^*_{0,1} - 354\Delta^*_{0,2} + 294\Delta^*_{0,3} - 123\Delta^*_{0,4} + 21\Delta^*_{0,5}\},$$
$$y_0^{(4)} = \frac{1}{h^4}\{-14\Delta^*_{0,1} + 26\Delta^*_{0,2} - 24\Delta^*_{0,3} + 11\Delta^*_{0,4} - 2\Delta^*_{0,5}\},$$
$$y_0^{(5)} = \frac{1}{h^5}\{5\Delta^*_{0,1} - 10\Delta^*_{0,2} + 10\Delta^*_{0,3} - 5\Delta^*_{0,4} + \Delta^*_{0,5}\},$$

wo $\Delta^*_{0,1} = \Delta_{0,1} - \frac{(ih)^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_i) - y_0^{(5)}\}, \quad (i = 1,2,3,4,5).$

Jetzt bekommen wir

$$|y_0^{(1)} - \overline{y}_0^{(1)}| =$$
$$= \frac{1}{60h}\Bigg| 300\frac{-h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_1) - y_0^{(5)}] + 300\frac{32h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_2) - y_0^{(5)}] -$$
$$-200\frac{243h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_3) - y_0^{(5)}] + 75\frac{1024h^5}{120}[f^{(5)}(\xi_4) - y_0^{(5)}] - 12\frac{3125}{1024}[f^{(5)}(\xi_5) - y_0^{(5)}]\Bigg| =$$
$$= \frac{h^4}{24}\Big| -125[f^{(5)}(\xi_5) - f^{(5)}(\xi_4)] + 131[f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_3)] - 31[f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_2)] +$$
$$+ [f^{(5)}(\xi_2) - f^{(5)}(\xi_1)]\Big| \le \frac{h^4}{24}\{125 + 131 + 31 + 1\}\omega(f^{(5)}, 2h) \le$$
$$\le \frac{288}{24}h^4 2\omega(f^{(5)}, h) = 24h^4\omega(f^{(5)}, h).$$

Die weitere Ungleichungen für ($k = 0$; $q = 2,3,4,5$) und ($k = 1,2,\dots,n$; $q = 1,2,3,4,5$) bekommt man ähnlicherweise.

3. Zweites Konvergenz-Verfahren

In diesem Teil geben wir einen Konvergenzsatz für die modifizierten lakunären "Näherung"-Spline Funktionen $\overline{S}_\Delta(x)$. Zur Konstruktion der "Näherung"-Spline Funktionen benutzen wir die vorher definierten Näherungswerten $\overline{y}_k^{(q)}$ ($q = 0,2,3$; $k = 0,1,\dots,n$); $\overline{y}_1^{(1)}$, $\overline{y}_n^{(1)}$ und die Formeln (1.1)-(1.22).

Satz 3.1. *Es seien $f \in C^5([0,1])$ und $\overline{S}_\Delta(x)$ die vorher konstruierte "Näherung"-Spline Funktionen. Dann gelten für $x_k \le x \le x_{k+1}$*

$$|f^{(q)}(x) - \overline{S}_k^{(q)}(x)| \le C_{k,q} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h) \qquad (k = 0,1,..,n-1;\ q = 0,1,2,3,4,5)$$

und für $C_{k,q}$ bekommen wir

$k \setminus q$	0	1	2	3	4	5
0	2409,6	12297,2	52201,9	179414,8	467766,4	823888
1	9,74	22,58	57,7	69,23	116,64	117
$2 \le k \le n-3$	6,64	17,4	50,93	125,58	208,92	172,2
$n-2$	6,99	17	47,7	117,1	195	161,4
$n-1$	619,63	2460,37	9325,48	28484,72	63611,6	91100,8

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die nächsten Lemmata, welche man mit der Hilfe des Satzes 2.1 leicht beweisen kann.

Lemma 3.1. *Seien $a_{j,k}$ die "echte" Koeffizienten, $\overline{a}_{j,k}$ die "Näherung"-Koeffizienten. Dann gelten*

$$|a_{j,k} - \overline{a}_{j,k}| \le B_{j,k} h^{5-j} \omega(f^{(5)}, h)$$

und für $B_{j,k}$ bekommen wir

$k \setminus j$	1	4	5	6
0		541,1	713,5	1025,3
1	1,64	1,86	0,95	
$2 \le k \le n-3$	0,49	1,53	1,41	
$n-2$	0,95	1,4	0,79	
$n-1$	0,66	147,75	240,73	86,21

Lemma 3.2.

$$|S_k^{(q)}(x) - \overline{S}_k^{(q)}| \le K_{q,k} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h)$$

und für $K_{q,k}$ bekommen wir

$k \setminus q$	0	1	2	3	4	5
0	2357,6	12245,2	52149,9	179362,8	467714,4	823836
1	6,74	19,58	51,7	66,23	158,64	114
$2 \le k \le n-3$	3,64	14,4	47,93	122,58	205,92	169,2
$n-2$	3,99	14	44,7	114,1	192	158,7
$n-1$	477,63	2318,37	9183,48	28342,72	63469,6	90958,8

Beweis des Satzes 3.1. Benutzen wir die Ungleichung

$$|f^{(q)}(x) - \overline{S}_k^{(q)}(x)| \le |f^{(q)}(x) - S_k^{(q)}(x)| + |S_k^{(q)}(x) - \overline{S}_k^{(q)}(x)|$$

und Satz B, Lemma 3.2, dann bekommen wir Satz 3.1.

Hier möchte ich Herrn Prof.Dr. J. Balázs für seine wertvolle Hilfe [2] meinen Dank ausdrücken.

Literaturverzeichnis

[1] **Győrvári J.**, Lakunäre Interpolation mit Spline-Funktionen. Die Fälle $(0,2,3)$ und $(0,2,4)$, *Acta Math. Hungar.*, **42** (1983), 25-33.

[2] **Balázs J.**, Privatkommunikation

J. Győrvári
Lehrstuhl für Mathematik und Rechentechnik
Universität Veszprém
H-8201 Veszprém Pf. 158.
Ungarn