Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 16 (1996) 185-195

APPROXIMATION DURCH LINEARKOMBINATIONEN VON MODIFIZIERTEN SZÁSZ–OPERATOREN

J. Gróf (Veszprém, Ungarn)

Herrn Prof. János Balázs zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Die Definition des Szász-(Mirakjan-)Operators S_n lautet folgenderweise

$$S_n(f;x) := e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \qquad (x \geq 0, n \in \mathbb{N}^+ := \{1,2,3,\dots\}).$$

O. Szász bewies in [5] die folgende Behauptung: "*Es sei die Funktion f in allen beschränkten Intervallen beschränkt und $f(t) = O(t^k)$ $(t \to \infty)$, mit einer positiven Zahl k. Ist f im Punkt x_0 zweimal differenzierbar, so gilt*

$$n[S_n(f;x_0) - f(x_0)] \to \frac{1}{2}x_0 f''(x_0) \qquad (n \to \infty)."$$

Im Falle $x_0 f''(x_0) \neq 0$ kann also die Ordnung der Approximation nicht besser sein, als $1/n$. Um die Ordnung zu verbessern, definierte M. Frentiu die folgende Linearkombinationen von Szász-Operatoren

$$S_n^{[r]}(f) := \alpha_1 S_n(f) + \alpha_2 S_{2n}(f) + \ldots + \alpha_r S_{rn}(f) \qquad (r \in \mathbb{N}^+)$$

mit den Koeffizienten

$$\text{(1)} \qquad \alpha_j := \frac{(-1)^{r-j} j^r}{(r-j)!j!} \qquad (j = 1,2,\dots,r).$$

Er bewies den folgenden

Satz F. ([1], S.67.) *Es sei die Funktion f im Intervall $[0,\infty)$ beschränkt und im Punkt x_0 $2r$-mal differenzierbar. Dann gilt*

$$\left|S_n^{[r]}(f;x_0)-f(x_0)\right|=O\left(\frac{1}{n^r}\right),\qquad n\to\infty. \tag{2}$$

Der Operator S_n ist nur auf der nichtnegativen Seite der Zahlengeraden zur Approximation geeignet. Um die Beschränkung $x\geq 0$ zu beseitigen, definierte der Verfasser in [3] den Operator H_n durch

$$H_n(f;x):=\frac{1}{2\mathrm{ch}nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$(-\infty<x<\infty,\, n\in\mathbb{N}^+).$$

Auch H_n besitzt die nachteilige Eigenschaft: im Falle $x_0f''(x_0)\neq 0$ ist die Ordnung der Konvergenz $H_n(f;x_0)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$ nicht besser als $1/n$. Der Verfasser zeigte in [4], daß der mit den obigen Koeffizienten α_j definierte Operator

$$H_n^{[r]}(f):=\alpha_1H_n(f)+\alpha_2H_{2n}(f)+\ldots+\alpha_rH_{rn}(f)$$

ähnliche Eigenschaften besitzt wie $S_n^{[r]}$:

Satz G. [4] *Wir nehmen an, daß die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der Bedingung*

$$|f(t)|\leq A|t|^{\beta|t|}\quad (t\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

genügt. (Hier sind A,β positive Zahlen.) Ist die Funktion f in den Punkten x_0 und $-x_0$ $2r$-mal differenzierbar, so ist

$$\left|H_n^{[r]}(f;x_0)-f(x_0)\right|=O\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad (n\to\infty).$$

Bemerkung. Die Bedingung bezüglich des Punktes $-x_0$ darf man nicht verglassen (Gegenbeispiel in [4]).

M. Frentiu bewies auch die folgende Behauptung ([1], S. 67.): *"Ist f in $[0,\infty)$ beschränkt, in $[0,a]$ $2r$-mal differenzierbar und $f^{(2r)}$ beschränkt, so gilt die Konvergenzgeschwindigkeit (2) im Intervall $[0,a]$ gleichmäßig."* Eine analoge Behauptung ist für $H_n^{[r]}$ leider nicht gültig.

Gegenbeispiel. Betrachten wir die Funktion $f(t) := t^2$ und den Operator $H_n^{[3]}$. Man verifiziert leicht, daß

$$H_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{n}\operatorname{th} nx$$

ist. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ erhalten wir aus (1) mit $r = 3$:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -4, \quad \alpha_3 = \frac{9}{2}. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich

$$H_n^{[3]}(t^2; x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x}{n}\operatorname{th} nx\right) - 4\left(x^2 + \frac{x}{2n}\operatorname{th} 2nx\right) + \frac{9}{2}\left(x^2 + \frac{x}{3n}\operatorname{th} 3nx\right) =$$

$$= x^2 - \frac{x}{n}\left[\frac{1}{2}(1 - \operatorname{th} nx) - 2(1 - \operatorname{th} 2nx) + \frac{3}{2}(1 - \operatorname{th} 3nx)\right] =:$$

$$=: x^2 - \Delta_n(x).$$

Daraus und aus der Identität $1 - \operatorname{th} y = 2/(e^{2y} + 1)$ ist es klar: Zu jede Zahl x existiert eine Zahl $K > 0$ derart, daß die Abschätzung

$$\left|H_n^{[3]}(t^2; x) - x^2\right| \leq \frac{K}{n^3} \tag{5}$$

zutrifft. Es gibt aber keine, von x unabhängige Konstante K so, daß (5) für alle $x \in [0, a]$ gültig ist. Ist nämlich $x = 1/n$, so bekommt man

$$\Delta_n(x) = \Delta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{th} 1 - 2\operatorname{th} 2 + \frac{3}{2}\operatorname{th} 2\right).$$

Da die zweite Faktor der rechten Seite von Null verschieden ist, konvergiert $\Delta_n\left(\frac{1}{n}\right)$ nur in der Ordnung n^{-2}.

In der vorliegenden Arbeit modifizieren wir den Operator $H_n^{[3]}$ in der Weise, daß der neue Operator $\tilde{H}_n^{[3]}$ – unter entsprechender Bedingungen – im Intervall $[-a, a]$ eine gleichmäßige Approximation von der Ordnung $1/n^3$ liefert. In dieser Arbeit befassen wir uns also nur mit dem Fall $r = 3$.

II. Die Definition von $\tilde{H}_n^{[3]}$ und der Satz

Die Modifizierung von $H_n^{[3]}$ besteht eigentlich in der Modifizierung von H_n; die Koeffizienten der Linearkombination bleiben die Zahlen (4):

$$\tilde{H}_n(f;x) := H_n(f;x) - \left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\frac{nx}{2}\mathrm{th}nx$$

$$(-\infty < x < \infty,\ n \in \mathbb{N}^+).$$

$$\tilde{H}_n^{[3]}(f) := \frac{1}{2}\tilde{H}_n(f) - 4\tilde{H}_{2n}(f) + \frac{9}{2}\tilde{H}_{3n}(f).$$

Im Abschnitt V beweisen wir die folgende Behauptung.

Satz. *Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, in jedem Punkt des endlichen Intervalls $[-a,a]$ 6-mal differenzierbar, die Ableitung $f^{(6)}$ in $[-a,a]$ beschränkt. Dann existiert eine positive Zahl A derart, daß die folgende gleichmäßige Abschätzung gilt*

$$\left|\tilde{H}_n^{[3]}(f;x) - f(x)\right| \leq \frac{A}{n^3} \qquad (-a \leq x \leq a).$$

Bemerkung. 1. Die Beschränktheit von f ist nicht notwendig, es würde auch die Bedinung (3) genügen, aber dann wäre der Beweis komplizierter.

2. Würden wir anstelle von $[-a,a]$ ein beliebiges Intervall $[a,b]$ schreiben, so wäre der Satz falsch.

III. Bezeichnungen

In den folgenden Bezeichungen ist $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N} :=$ $:= \{0,1,2,\ldots\}$, $j \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(6) $$f_*(x) := f(-x);$$

$$h_n(f;x) := \left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\frac{nx}{2}\mathrm{th}nx;$$

$$g_n(f;x) := f''(0)\frac{x}{2n}\mathrm{th}nx;$$

(7) $$p_{n,k}(x) := e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}, \quad q_{n,k}(x) := \frac{1}{2\mathrm{ch}nx}\frac{(nx)^k}{k!};$$

$$V_{n,j}(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^j p_{n,k}(x);$$

(8) $$U_{n,j}(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^j p_{n,k}(-x);$$

(9) $$Z_{n,j}(y) := e^y\sum_{k=0}^{\infty}(k-y)^j\frac{(-y)^k}{k!}.$$

Das Symbol $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ soll im weiteren eine Funktion φ bedeuten, die der Bedingung

$$|\varphi(x)| \le \frac{C}{n^3}$$

mit einer von x und n unabhängigen Konstante C für alle $x \in [0,a]$, $n \in \mathbb{N}^+$ genügt.

IV. Hilfssätze

Hilfssatz 1.

(10) $$\tilde{H}_n^{[3]}(f_*;-x) = \tilde{H}_n^{[3]}(f;x).$$

Beweis. Aus den Definitionen von H_n und h_n bekommt man leicht

$$H_n(f_*;-x) = H_n(f;x), \quad h_n(f_*;-x) = h_n(f;x),$$

daraus ergibt sich (10) unmittelbar.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$|g_n(f;x) - h_n(f;x)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (0 \le x \le a).$$

Beweis. Auf Grund der Taylor-Formel erhält man

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) - f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} - \frac{f'''(0)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{1}{n^4},$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{f'''(0)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\frac{1}{n^4}.$$

Demnach ist

$$n^2\left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = f''(0) + \frac{1}{4!}\left[f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\eta)\right]\frac{1}{n^2},$$

also gibt es eine Zahl $C > 0$ derart, daß für $x \in [0, a]$

$$|g_n(f;x) - h_n(f;x)| \leq \left|\frac{C}{n^2}\frac{x}{2n}\operatorname{th} nx\right| = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ist.

Hilfssatz 3.

$$V_{n,0}(x) = 1, \quad V_{n,1}(x) = 0, \quad V_{n,2}(x) = \frac{x}{n}, \quad V_{n,3}(x) = \frac{x}{n^2},$$

$$V_{n,4}(x) = \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3}, \quad V_{n,5}(x) = \frac{10x^2}{n^3} + \frac{x}{n^4},$$

$$V_{n,6}(x) = \frac{15x^3}{n^3} + \frac{25x^2}{n^4} + \frac{x}{n^5} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+).$$

Beweis. Die obigen Gleichungen können wir durch einfache Rechnungen bzw. mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel (s. [2], S. 35-36) verifizieren.

$$V_{n,j+1}(x) = \frac{x}{n}V'_{n,j}(x) + \frac{jx}{n}V_{n,j-1}(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Hilfssatz 4.

(11) $$Z_{n,0}(y) = 1, \quad Z_{n,1}(y) = -2y \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Es gilt die Rekursionsformel

(12) $$Z_{n,j+1}(y) = yZ'_{n,j}(y) - 2yZ_{n,j}(y) + jyZ_{n,j-1}(y) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Beweis. (11) ergibt sich durch einfache Rechnungen. Weiterhin ist

$$Z'_{n,j}(y) = Z_{n,j}(y) - jZ_{n,j-1}(y) + e^y \sum_{k=1}^{\infty} (k-y)^j (-k) \frac{(-y)^{k-1}}{k!}. \tag{13}$$

Die Faktor $-k$ in der letzten Reihe schreiben wir in der Form $-(k-y)-y$, dann erhalten wir

$$e^y \sum_{k=1}^{\infty} (k-y)^j (-k) \frac{(-y)^{k-1}}{k!} = \frac{1}{y} Z_{n,j+1}(y) - e^y(-y)^{j+1} +$$

$$+ Z_{n,j}(y) - e^y(-y)^j = \frac{1}{y} Z_{n,j+1}(y) + Z_{n,j}(y).$$

Daraus und aus (13) folgt (12).

Hilfssatz 5. *Seien $\nu \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Es existiert eine positive Zahl C mit*

$$x^\nu e^{-nx} \leq \frac{C}{n^\nu} \qquad (x \geq 0). \tag{14}$$

Beweis. Da

$$x^\nu e^{-nx} = \frac{1}{n^\nu} (nx)^\nu e^{-nx}$$

ist und die Funktion $\varphi(y) := y^\nu e^{-y}$ $(y \geq 0)$ beschränkt ist, gilt (14) offensichtlich.

Hilfssatz 6.

$$U_{n,0}(x) = 1, \quad U_{n,1}(x) = -2x, \quad U_{n,2}(x) = 4x^2 - \frac{x}{n} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{15}$$

Es existiert eine positive Zahl C derart, daß die folgende Abschätzung besteht

$$|e^{-nx} U_{n,j}(x)| \leq \frac{C}{n^j} \qquad (x \geq 0,\ j = 0, 1, \ldots, 6). \tag{16}$$

Beweis. Aus (8) und (9) ergibt sich

$$U_{n,j}(x) = \frac{1}{n^j} Z_{n,j}(nx) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{17}$$

demnach bekommt man (15) mit Hilfe von (11) und (12). Aus (11) und (12) stellt sich heraus, daß die Funktionen $Z_{n,j}$ Polynome sind, demzufolge ist $e^{-y} Z_{n,j}(y) \leq C$ $(y \geq 0,\ j = 0, 1, \ldots, 6)$. Daraus und aus (17) folgt (16).

V. Der Beweis des Satzes

Erster Schritt. Es sei $0 \le x \le a$. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(t) = \sum_{j=0}^{6} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(t-x)^j + \eta(t)(t-x)^6 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei $\lim\limits_{t \to x} \eta(t) = 0$ ist, ferner gibt es eine Zahl $M > 0$ mit $|\eta(t)| \le M$ $(t \in \mathbb{R})$. Hiernach erhalten wir unter Benutzung der Bezeichungen (6) und (7)

$$H_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f_* \left(\frac{k}{n}\right)\right] q_{n,k}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{6} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j q_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^6 q_{n,k}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{6} \frac{f_*^{(j)}(x)}{j!} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j q_{n,k}(-x) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^6 q_{n,k}(-x) =:$$

$$=: P + Q + \hat{P} + \hat{Q},$$

wobei $\lim\limits_{t \to x} \eta(t) = \lim\limits_{t \to x} \hat{\eta}(t) = 0$ ist, ferner gibt es eine Zahl $M > 0$ mit

$$\left|\eta\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le M, \quad \left|\hat{\eta}\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le M \qquad (k \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^+).$$

Da $q_{n,k}(x) \le p_{n,k}(x)$ ist, bekommen wir

$$|Q| \le M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^6 p_{n,k}(x) = M V_{n,6}(x).$$

$\hat{Q}$ läßt sich ähnlich abschätzen, da für $x \ge 0$ $|q_{n,k}(-x)| = q_{n,k}(x)$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 3 erhalten wir also

$$Q = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \hat{Q} = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Betrachten wir jetzt P und $\hat{P}$. Offensichtlich gelten die Gleichungen

$$P = \sum_{j=0}^{6} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{e^{nx}}{2\mathrm{ch}nx} V_{n,j}(x), \quad \hat{P} = \sum_{j=0}^{6} \frac{f_*^{(j)}(x)}{j!} \frac{e^{-nx}}{2\mathrm{ch}nx} U_{n,j}(x).$$

Zur Summe P benutzen wir Hilfssatz 3

$$V_{n,4}(x) = \frac{3x^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad V_{n,5}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad V_{n,6}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

mit der Bezeichnung

$$F(x) := \frac{f'''(x)}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)}{4!} 3x$$

gilt also

$$P = \frac{e^{nx}}{2\mathrm{ch}nx} \left[f(x) + f''(x)\frac{x}{2n} + F(x)\frac{x}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Die Summe $\hat{P}$ untersuchen wir mit Hilfe von Hilfssatz 6: aus (16) folgt

$$e^{-nx} U_{n,j}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (j = 3, 4, 5, 6),$$

demnach bekommen wir (s. auch (15))

$$\hat{P} = \frac{e^{-nx}}{2\mathrm{ch}nx} \left[f_*(x) - f_*'(x) 2x + \frac{1}{2} f_*''(x) \left(4x^2 - \frac{x}{n}\right) \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Es gilt also

$$P + \hat{P} = G + \Gamma,$$

wobei wir die folgenden Bezeichnungen benutzten:

$$G := f(x) + f''(x)\frac{x}{2n} + F(x)\frac{x}{n^2},$$

$$\Gamma := \frac{e^{-nx}}{2\mathrm{ch}nx} \left[f_*(x) - f(x) - 2x f_*'(x) + \frac{1}{2} f_*''(x) \left(4x^2 - \frac{x}{n}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2} f''(x)\frac{x}{n} - F(x)\frac{x}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Aufgrund der Taylor-Formel und der Gleichungen

$$f_*(0) = f(0), \quad f_*'(0) = -f'(0), \quad f_*''(0) - f''(0)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3, \\
f_*(x) &= f(0) - f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f_*'''(\xi_*)x^3, \\
f_*'(x) &= -f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2!}f_*'''(\vartheta)x^2, \\
f''(x) &= f''(0) + f'''(\tau)x, \\
f_*''(x) &= f''(0) + f_*'''(\tau_*)x \\
&\qquad (\text{mit} \quad 0 < \xi, \xi_*, \vartheta, \tau, \tau_* < x).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dann nach Hilfssatz 5

$$\Gamma = -\frac{e^{-nx}}{2\mathrm{ch}nx} f''(0)\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Identität $e^{-y}/\mathrm{ch}y = 1 - \mathrm{th}y$ läßt sich Γ in der folgender Form schreiben:

$$\Gamma = -(1 - \mathrm{th}nx)f''(0)\frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Zusammengefaßt: aus unseren Ausführungen geht hervor, daß

$$H_n(f;x) = f(x) + (f''(x) - f''(0))\frac{x}{2n} + F(x)\frac{x}{n^2} +$$

$$+ f''(0)\frac{x}{2n}\mathrm{th}nx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ist. Daraus bekommt man auf Grund des Hilfssatzes 2

$$\tilde{H}_n(f;x) = f(x) + (f''(x) - f''(0))\frac{x}{2n} + F(x)\frac{x}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

hiernach gilt

$$\tilde{H}_n^{[3]}(f;x) = \left(\frac{1}{2} - 4 + \frac{9}{2}\right) f(x) + (f''(x) - f''(0))\frac{x}{2n}\left(\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) +$$

$$+F(x)\frac{x}{n^2}\left(\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)=f(x)+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Damit ist der Satz für $0 \le x \le a$ bewiesen.

Zweiter Schritt. Es sei jetzt $-a \le x \le 0$. Da auch die Funktion f_* die Bedingungen des Satzes erfüllt, und $0 \le -x \le a$ ist, folgt aus dem soeben bewiesenen

$$\left|\tilde{H}_n^{[3]}(f_*;-x)-f_*(-x)\right| \le \frac{A_*}{n^3} \qquad (0 \le -x \le a), \tag{18}$$

wobei A_* eine positive Zahl ist. Da $f_*(-x)=f(x)$ ist, ergibt sich aus (18) nach Hilfssatz 1 die Abschätzung

$$\left|\tilde{H}_n^{[3]}(f;x)-f(x)\right| \le \frac{A_*}{n^3} \qquad (-a \le x \le 0).$$

Der Satz ist also bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] **Frentiu M.**, Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan, *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math-Mech.*, **15** (1970), 63-68.

[2] **Gróf J.**, A Szász O.-féle operátor approximációs tulajdonságairól, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **20** (1971), 35-44.

[3] **Gróf J.**, Függvényapproximáció az egész számegyenesen, súlyozott hatványsorokkal, *Mat. Lapok*, **29** (1977-1981), 161-170.

[4] **Gróf J.**, Linear combinations of Szász-Mirakjan type operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60.** (1995) (im Druck).

[5] **Szász O.**, Generalization of S. Bernsteins's polynomials to the infinite interval, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **45** (1950), 239-245.

J. Gróf
Lehrstuhl für Mathematik und Rechentechnik
Universität Veszprém
H-8201 Veszprém Pf. 158
Ungarn