Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 14 (1994) 33-37

ÜBER DIE EINDEUTIGKEITS–, ZULÄSSIGKEITS– UND (mod 1) EINDEUTIGKEITSMENGEN R–ADDITIVER FUNKTIONEN

J. Fehér (Pécs, Ungarn)

Meinem Freund Professor Karl–Heinz Indlekofer aus Anlaß der Vollendung seines 50. Lebensjahres gewidmet

1. Einleitung

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt vollständig additiv, falls für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ $f(ab) = f(a) + f(b)$ gilt. Die Menge aller vollständig additiver Funktionen wird mit $\mathcal{A}^*(\mathbb{C})$ (oder kurz $\mathcal{A}^*$) bezeichnet.

Definition 1.1. (I.Kátai [4]) Die Menge $E_1(\subset \mathbb{N})$ heißt Eindeutigkeitsmenge (EM) für $\mathcal{A}^*$, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad f(E_1) = \{0\} \rightarrow f(\mathbb{N}) = \{0\}.$$

Beispiel 1.1. $\{p+1 \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist eine EM. (I.Kátai [5], P.D.T.A.Elliot [1]) (Für weitere Beispiele siehe z.B. K.-H.Indlekofer [2].)

Definition 1.2. (T.Jahnke [3]) Die Menge $E_2(\subset \mathbb{N})$ heißt Zulässigkeitsmenge (ZM) für $\mathcal{A}^*$, falls es für jede Funktion $f : E_2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion $g \in \mathcal{A}^*$ gibt, so daß $(f - g)(E_2) = \{0\}$ gilt.

Beispiel 1.2. $\{2^p - 1 \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist eine ZM.

Definition 1.3. (I.Kátai) Die Menge $E_3(\subset \mathbb{N})$ heißt $(mod\ 1)$ Eindeutigkeitsmenge, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad f(E_3) \subset \mathbb{Z} \rightarrow f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}.$$

Beispiel 1.3. $\{p \mid p \equiv -1\ (mod\ 4),\ p \text{ Primzahl}\} \cup \{x^2 + 1 | x \in \mathbb{N}\}$ ist eine $(mod\ 1)$ EM. (I.Kátai [4]).

Satz 1.1. (D.Wolke [7]) *Die Menge* $E_1 = \{a_1, \ldots\}$ ($\subset \mathbb{N}$) *ist genau dann eine EM, wenn für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *mindestens eine Darstellung*

$$n = \prod_{i=1}^{s} a_i^{r_i} \qquad (s \geq 1) \tag{1.1}$$

mit $r_i \in \mathbb{Q}$ *existiert.*

Satz 1.2. (T.Jahnke [3]) *Die Menge* $E_2 = \{a_1, \ldots\}(\subset \mathbb{N})$ *ist eine ZM genau dann, wenn jedes* $n \in \mathbb{N}$ *höchstens eine Darstellung (1.1) mit* $r_i \in \mathbb{Q}$ *besitzt.*

Satz 1.3. (P.Hofman [6], K.-H. Indlekofer, B.Kovács) *Die Menge* $E_3 = \{a_1, \ldots\}$ ($\subset \mathbb{N}$) *ist genau dann eine* (mod 1) *EM, wenn jedes* $n \in \mathbb{N}$ *mindestens eine Darstellung (1.1) mit* $r_i \in \mathbb{Z}$ *besitzt.*

Auf Grund einer Idee von I.Kátai werden wir in dieser Arbeit entsprechende Sätze für eine anderen Klasse additiver Funktionen beweisen.

2. Vorbereitung

Es seien:

$\underline{R}_i \in \mathbb{N}^{t_i}$(Descartes – Produkt), ($t_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $i = 0, 1, \ldots$);

$\mathcal{E}_i^* = \{\underline{0}^*, \underline{e}_1^*, \ldots, \underline{e}_{t_i}^*\} \in \mathbb{N}_0^{t_i}$ $(\underline{e}^* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^{t_i})$.

Definition 2.1. $\mathcal{R} = \{\underline{R}_0, \underline{R}_1, \ldots\}$ ist ein Zahlensystem ($\mathcal{R}$-System) in $\mathbb{N}_0$, wenn $|\mathcal{R}| = \infty$ ist und sich jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eindeutig in der Form

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{b}_i^*(n)\underline{R}_i \qquad (\underline{b}_i^*(n) \in \mathcal{E}_i^*) \tag{2.1}$$

schreiben läßt.

Es sei K ein Körper mit dem Primkörper P und $\mathcal{R}$ ein beliebiges Zahlensystem.

Definition 2.2. Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to K$ heißt $\mathcal{R}$-additiv (bezüglich des gegebenen $\mathcal{R}$-Systems), falls $f(0) = \mathbf{0}$ ($\in K$) und – mit der Darstellung (2.1) von n –

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} f(\underline{b}_i^* \underline{R}_i) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

gilt.

Mit $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$ bezeichnen wir die Menge aller $\mathcal{R}$-additiver Funktionen.

Definition 2.3. Die Menge H_1 ($\subset \mathbb{N}_0$) heißt EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K) \quad \text{und} \quad f(H_1) = \{0\} \Rightarrow f(\mathbb{N}_0) = \{0\}.$$

Definition 2.4. Die Menge H_2 ($\subset \mathbb{N}_0$) heißt ZM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, wenn für jedes $g : E_2 \to K$ ein $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$ mit $(g - f)(H_2) = \{0\}$ existiert.

Definition 2.5. Im Falle $P = \mathbb{Q}$ heißt die Menge H_3 ($\subset \mathbb{N}_0$) (mod 1) EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K) \quad \text{und} \quad f(H_3) \subset \mathbb{Z} \Rightarrow f(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{Z}.$$

3. Weitere Vorbereitungen und Formulierung der Sätze

Mit der Darstellung (2.1) von n setzen wir

$$\underline{n}^* = (\underline{b}_0^*(n), \underline{b}_1^*(n), \ldots). \tag{3.1}$$

In der Definition von $\mathcal{E}_i^*$ soll überall $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in P$ statt $0, 1 \in \mathbb{Z}$ werden. Somit geht $\underline{n}^*$ in

$$\underline{n} = (\underline{b}_0(n), \underline{b}_1(n), \ldots) \tag{3.2}$$

über.

Die Folge $(t_i)_0^\infty$ soll aus der Definition des vorliegenden $\mathcal{R}$–Systems genommen werden. Es sei

$$V(P) = \{(\underline{v}_0, \underline{v}_1, \ldots) \mid \underline{v}_i \in P^{t_i}, \quad \text{von einer Stelle ab } \underline{v}_i = \underline{0}\}.$$

$V(P)$ ist ein Vektorraum über P. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \to V(P)$ ($n \overset{\varphi}{\mapsto} \underline{n}$) ist injektiv. Für $H_i = \{a_1, \ldots\} \subset \mathbb{N}_0$ sei $\underline{H}_i = \varphi(H_i) = \{\underline{a}_1, \ldots\}$ $(\underline{a}_j = \varphi(a_j))$ $(i = 1, 2, 3)$.

Satz 3.1. *Die Menge H_1 ($\subset \mathbb{N}_0$) ist genau dann eine EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mindestens eine Darstellung*

$$\underline{n} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \underline{a}_i \qquad (s \geq 1) \tag{3.3}$$

mit $\lambda_i \in P$ existiert.

Satz 3.2. *Die Menge H_2 ($\subset \mathbb{N}_0$) ist genau dann eine ZM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ höhstens eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.*

Satz 3.3. *Die Menge H_3 ($\subset \mathbb{N}_0$) ist genau dann eine* (mod 1) *EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mathbb{Q})$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mindestens eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.*

4. Beweis der Sätze

Es sei für eine $\mathcal{R}$-additive Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to K$, $\underline{f} := (\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots)$, $(\underline{x}_i = (f(e_1^* \mathcal{R}_i), \ldots, f(e_{t_i}^* \mathcal{R}_i))$. Dann ist $f(n) = \underline{f} \cdot \underline{n}$.

Beweis des Satzes 3.1. (a) Setzen wir $f(H_1) = \{0\}$ und für $\underline{n} = \varphi(n)$ die Form (3.3) voraus. Dann ist $f(n) = \underline{f}\underline{n} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (\underline{f}\underline{a}_i) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i f(a_i) = 0$.

(b) Setzen wir zweitens voraus, daß es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, für das $\underline{n} = \varphi(n)$ keine Darstellung (3.3) besitzt. Man kann annehmen, daß $\underline{H}_1 = \varphi(H_1)$ ein linear unabhängiges System ist. (Andern falls kann man aus $\underline{H}_1$ ein maximales unabhängiges Teilsystem $\underline{H}_1^*$ auswählen. Sei nun $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$. Dann gilt: $f(H_1) = \{0\} \Longleftrightarrow f(H_1^*) = \{0\}$, und kann H_1^* die Rolle von H_1 spielen.)

Es sei $\underline{E}$ ($\subset V(P)$) die Menge aller Einheitsvektoren. Weil $\underline{E}$ eine Basis von $V(P)$ ist, gibt es eine nichtleere Untermenge $\underline{E}'$ von $\underline{E}$ derart, daß $\underline{H}_1 \cup \underline{E}'$ auch eine Basis von $V(P)$ ist. Sei nun $f(H_1) = \{0\}$ und $f(\varphi^{-1}(\underline{e}_j')) = k_j$, falls $\underline{e}_j' \in \underline{E}'$. Die Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to K$ $(f(n) = \underline{f} \cdot \underline{n} = \sum_j \lambda_j \underline{f}\underline{e}_j' + \sum_i u_i \underline{f}\underline{a}_i = \\ = \sum_j \lambda_j k_j)$ ist wohl erklärt, $\mathcal{R}$-additiv, und nicht notwendigerweise identisch 0.

Beweis des Satzes 3.2. (a) Das System H_2 ist linear unabhängig, und deswegen gibt es ein Teilsystem $\underline{E}'$ von $\underline{E}$ (wie oben!), so daß $\underline{H}_2 \cup \underline{E}'$ eine Basis von $V(P)$ ist. Erklärt man die Funktion f auf der Menge $H_2 \cup \varphi^{-1}(\underline{E}')$ beliebig, und sie kann $\mathcal{R}$-additiv sein.

(b) Hätte $\underline{n}$ zwei verschiedene Darstellungen (3.3), so hätte auch die $\underline{0}$ eine nichttriviale Darstellung $\underline{0} = \sum_j k_j \underline{a}_j$. Man kann dann für die dabei auftretenden $a_j \in H_2$ die Werte $f(a_j)$ so angeben, daß $f(0) = \underline{f} \cdot \underline{0} = \sum_j k_j f(a_j) \neq 0$ ist, was aber unmöglich ist.

Beweis des Satzes 3.3. Daß die Bedingung hinreichend ist, ist trivial. Wir werden nur die Notwendigkeit beweisen. Es sei

$$G(\mathbb{Z}) = \{(\underline{v}_0, \underline{v}_1, \ldots) \mid \underline{v}_i \in Z^{t_i}, \text{ von irgeneiner Stelle ab } \underline{v}_i = \underline{0}\}$$

$G(\mathbb{Z})$ ist eine freine Abel'sche Gruppe (fAG) in $V(Q)$. $\underline{H}_3 = \varphi(H_3)$ ist eine Untermenge von $G(\mathbb{Z})$. Es bezeichne $\langle \underline{H}_3 \rangle$ die von $\underline{H}_3$ erzeugte Untergruppe von $G(\mathbb{Z})$. Da $\langle \underline{H}_3 \rangle$ auch eine f.A.G. ist, gibt es eine Gruppenbasis $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots\}$ von $\langle \underline{H}_3 \rangle$. Es ist klar: $f(H_3) \subset \mathbb{Z} \iff \underline{f} \cdot \underline{b}_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Setzen wir voraus, daß ein $\underline{n} \in \mathbb{N}_0$ ohne eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.

Fall 1. B ist keine Basis von $V(\mathbb{Q})$. Weil $\underline{B}$ ein linear unabhängiges System ist, kann es mit einer nichtleeren Menge $\underline{E'} \subset \underline{E}$ (wie oben!) zu einer Basis ergänzt werden. Es sei nun $f(B) = \{0\}$, und $f(\varphi^{-1}(\underline{E'})) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Es gibt also ein $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, Q)$ mit $f(H_3) \subset \mathbb{Z}$ und $f(\mathbb{N}_0) \not\subset \mathbb{Z}$.

Fall 2. $\underline{B}$ ist eine Basis von $V(Q)$. Dann existiert ein $\underline{n}_0 \in \underline{\mathbb{N}}_0$ mit der Darstellung $\underline{n}_0 = \lambda_{i_1}\underline{b}_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_s}\underline{b}_{i_s}$, $\lambda_{i_1} \in Q \setminus Z$. Es sei nun $f(b_{i_1}) = 1$ und $f(b_j) = 0$ $(j \neq i_1)$. Dann kann $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, Q)$ sein, ist $f(H_3) \subset \mathbb{Z}$ und – wegen $f(n_0) = \lambda_{i_1}$ – $f(\mathbb{N}_0) \not\subset \mathbb{Z}$.

Literaturverzeichnis

[1] **Elliot P.D.T.A.**, A conjecture of Kátai, *Acta Arith.*, **26** (1974), 11-20.

[2] **Indlekofer K.-H.**, On sets characterizing additive and multiplicative functions, *Illionis Journal of Mathematics*, **25** (2) (1981), 251-257.

[3] **Jahnke T.**, Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen, *Elemente der Mathematik*, **36** (2) (1981), 36-39.

[4] **Kátai I.**, On sets characterizing numbertheoretical functions, *Acta Arith.*, **13** (1968), 315-320.

[5] **Kátai I.**, On sets characterizing numbertheoretical functions, *Acta Arith.*, **16** (1968), 1-4.

[6] **Hofman P.**, Note on a problem of Kátai, *Acta Math.Hung.*, **45** (3-4) (1985), 261-262.

[7] **Wolke D.**, Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen, *Elemente der Mathematik*, **33** (1) (1978), 14-16.

J. Fehér
Lehrstuhl für Mathematik
Janus Pannonius Universität
Ifjúság u. 6.
H-7624 Pécs, Ungarn