

APPROXIMATION DURCH OPERATOREN VOM SZÁSZ – MIRAKJAN-TYP

J. Gróf (Veszprém, Ungarn)

Herrn Prof. János Balázs zum 70. Geburtstag gewidmet

I. Einleitung

Bei der Approximation von Funktionen auf unbeschränkten Intervallen ist der Szász - Mirakjan-Operator S_n einer der am öftesten untersuchten Operatoren. Die Definition von S_n lautet folgendermaßen:

$$(1) \quad S_n(f; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (x \geq 0; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Wir erwähnen drei nachteilige Eigenschaften dieses Operators: 1. S_n ist nur auf der nichtnegativen Seite der Zahlengeraden zur Approximation geeignet; 2. Wegen der unendlichen Reihe sind die numerische Rechnungen im allgemeinen problematisch; 3. Ist $f(x) \geq x^{\Phi(x)}$ ($x > 0$), Φ monoton wachsend und $\lim_{\infty} \Phi = \infty$, so ist die Reihe in (1) divergent [3], d.h. $S_n(f; x)$ existiert nicht.

Um die Beschränkung $x \geq 0$ zu beseitigen, definierten wir in [2] die Operatoren H_n :

$$(2) \quad H_n(f; x) := \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!}$$
$$(-\infty < x < \infty; n = 1, 2, \dots).$$

Wir wollen auch Nachteil 2. und 3. beseitigen; deshalb führen wir in (2) eine Modifizierung durch und bezeichnen die so entstehenden Operatoren mit $H_{n,\nu}$:

$$(3) \quad H_{n,\nu}(f; x) := \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \sum_{k=0}^{\nu(n)} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!}$$
$$(-\infty < x < \infty; n = 1, 2, \dots).$$

Hier sei die Folge $\nu : N \rightarrow N$ streng monoton wachsend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n = \infty$. (N bedeutet die Menge der positiven ganzen Zahlen.)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, daß sich die Geschwindigkeit der punktweisen Konvergenz $H_n(f) \rightarrow f$ und $H_{n,\nu}(f) \rightarrow f$ für Funktionen einer wichtigen Klasse kaum unterscheidet (Satz 1), ferner zeigen wir, daß durch $H_{n,\nu}$ auch solche Funktionen approximiert werden können - sogar auf der ganzen Zahlengeraden - für welche die Operatoren S_n bzw. H_n gar nicht erklärt sind (Satz 2 bzw. Korollar 2.1 und 2.2). Aus dem Satz 3 bzw. seinen Korollaren 3.1 und 3.2 geht hervor, daß sich die Bedingungen im Satz 2 bzw. in den Korollaren 2.1 und 2.2 nicht wesentlich abschwächen lassen.

Wir erwähnen noch die Arbeit [1], in der die $\nu(n)$ -te Partialsumme der Reihe (1) in einigen Spezialfällen untersucht wurde. Hier wollen wir die Beziehungen zwischen f und ν allgemeiner behandeln.

Im folgenden bezeichne R, R^+ bzw. R_0^+ die Menge der reellen, der positiven reellen bzw. nichtnegativen reellen Zahlen.

II. Die Sätze 1-3 und einige Korollare

Satz 1. *Wir nehmen an, daß für die Funktion $f : R \rightarrow R$ die Ungleichung $|f(t)| \leq A |t|^\alpha$ ($t \in R, t \neq 0$) gilt. (Hier sind A, α positive Konstanten.) Ist $B \subset R$ eine beschränkte Menge, so existieren positive Zahlen C, λ, n_0 derart, daß*

$$(4) \quad |H_{n,\nu}(f; x) - H_n(f; x)| \leq C e^{-\lambda n} \quad (x \in B, n > n_0)$$

ist.

Satz 2. *Es sei die Funktion $G : R_0^+ \rightarrow R$ differenzierbar, $G(0) \geq 0, G'$ monoton wachsend, $G'(t) \geq t^\delta$ ($t \geq t_0$), wobei t_0 und δ positive Zahlen sind. Wir setzen noch voraus, daß mit einer Konstante $M > 0$*

$$(5) \quad G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) \leq M n \quad (n \in N)$$

ist. Gilt für $f : R \rightarrow R$ die Ungleichung

$$(6) \quad |f(t)| \leq A e^{G(|t|)} \quad (t \in R)$$

mit $A > 0$, und ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{n,\nu}(f; x) = f(x).$$

Korollar 2.1. Nehmen wir an, daß folgende Bedingungen gelten:

$$|f(t)| \leq Ae^{|t|^p} \quad (t \in R)$$

mit $A > 0, p > 1$, weiterhin

$$(8) \quad \nu(n) \leq n^\beta \quad (n \in N) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p}{p-1}.$$

Ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt (7).

(Es sei nämlich $G(t) = t^p$. Aus (8) folgt dann

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) = p\left(\frac{\nu(n)}{n}\right)^{p-1} \leq p\left(\frac{n^{p/(p-1)}}{n}\right)^{p-1} = pn$$

also gilt auch (5).)

Korollar 2.2. Nehmen wir an, daß folgende Bedingungen gelten:

$$|f(t)| \leq Ae^{e^{|t|}} \quad (t \in R) \quad \text{mit} \quad A > 0,$$

weiterhin

$$(9) \quad \nu(n) \leq n \log n \quad (n \in N).$$

Ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt (7).

(Für $G(t) = e^t$ folgt aus (9)

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) = e^{\nu(n)/n} = e^{\log n} = n,$$

also gilt auch (5).)

Bemerkung. In Satz 2 und seinen Korollaren wurde f im Punkt x approximiert, die Stetigkeit wurde aber auch im Punkt $-x$ vorausgesetzt. Ohne diese Voraussetzung würden diese Behauptungen falsch, als Gegenbeispiel genügt z.B. die Funktion f in [2], S. 165. Für diese beschränkte und auf R^+ stetige Funktion gilt $H_n(f; x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) für kein $x > 0$ [2]. Aus diesem Ergebnis und aus Satz 1 folgt, daß auch $H_{n,\nu}(f; x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) für kein $x > 0$ gilt.

Satz 3. Es sei $G: R_0^+ \rightarrow R$ differenzierbar, $G(0) \geq 0$, G' monoton wachsend, $G'(t) > 0$ ($t > 0$). Wir setzen noch voraus, daß für hinreichend große n

$$(10) \quad G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) \geq 2n \log \nu(n)$$

gilt. Ist

$$(11) \quad f(t) = \begin{cases} e^{G(t)} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

so besteht für alle $x > 0$ die Limesrelation

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{n,\nu}(f; x) = \infty.$$

Korollar 3.1. (Vgl. Korollar 2.1.) Wir nehmen an, daß

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^p}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \text{mit } p > 1,$$

und

$$(13) \quad \nu(n) = [n^\beta] \quad (n \in N) \quad \text{mit } \beta > \frac{p}{p-1}$$

ist. ($[t]$ bezeichnet den ganzen Anteil von t .) Dann gilt für $x > 0$ die Relation (12).

(Es sei nämlich $G(t) = t^p$. Aus (13) gilt dann für $n \geq 2$

$$G' \left(\frac{\nu(n)}{2n} \right) = p \left(\frac{[n^\beta]}{2n} \right)^{p-1} \geq p \left(\frac{n^\beta}{4n} \right)^{p-1} = \frac{p}{4^{p-1}} n^{(\beta-1)(p-1)}.$$

Wegen $\beta > \frac{p}{p-1}$ ist $(\beta-1)(p-1) > 1$, folglich haben wir

$$G' \left(\frac{\nu(n)}{n} \right) \geq \frac{p}{4^{p-1}} n^\lambda,$$

mit $\lambda > 1$. Somit ist für hinreichend große n

$$\frac{p}{4^{p-1}} n^\lambda > 2n \log [n^\beta],$$

also gilt (10.)

Korollar 3.2. (Vgl. Korollar 2.2.) Wir nehmen an, daß

$$f(t) = \begin{cases} e^{e^t} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

und

$$(14) \quad \nu(n) = [n^{1+\epsilon}] \quad (n \in N) \quad \text{mit} \quad \epsilon > 0$$

ist. Dann gilt für $x > 0$ die Relation (12).

(Man betrachte nämlich $G(t) = e^t$. Aus (14) erhält man dann für hinreichend große n

$$\begin{aligned} G' \left(\frac{\nu(n)}{2n} \right) &= \exp \left(\frac{[n^{1+\epsilon}]}{n} \right) > \exp \left(\frac{n^{1+\epsilon} - 1}{n} \right) > \frac{1}{2} e^{n^\epsilon} > \\ &> 2n \log n^{1+\epsilon} \geq 2n \log \nu(n), \end{aligned}$$

also gilt (10).)

III. Die Beweise

Zum Beweis des Satzes 1. benutzen wir den nachstehenden

Hilfssatz [3]. Sind b, α positive Zahlen, so existieren positive Zahlen C, λ, n_0 derart, daß die folgende Ungleichung gilt:

$$e^{-nx} \sum_{k \geq 2\delta n} \left(\frac{k}{n} \right)^{\alpha \frac{k}{n}} \frac{(nx)^k}{k!} < C e^{-\lambda n} \quad (0 \leq x \leq b, \quad n > n_0).$$

Beweis des Satzes 1. Es sei $x \in B$. Die Zahl $\delta \in N$ wählen wir so, daß $B \subset [-\delta, \delta]$ ist. Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes gilt

$$\begin{aligned} &|H_{n,\nu}(f; x) - H_n(f; x)| = \\ &= \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \sum_{k=\nu(n)+1}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!} \leq \\ &\leq 2A e^{-n|x|} \sum_{k=\nu(n)+1}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^{\alpha \frac{k}{n}} \frac{|nx|^k}{k!} =: \Delta. \end{aligned}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n = \infty$ ist, gilt für hinreichend große n die Ungleichung $\frac{\nu(n)}{n} > 2\delta$, also für $k > \nu(n)$ die Ungleichung $k > 2\delta n$. Nach dem Hilfssatz existieren dann C, λ, n_0 so, daß

$$\Delta < C e^{-\lambda n} \quad (0 \leq |x| \leq \delta; \quad n > n_0)$$

ist. Daraus folgt (4) unmittelbar.

Beweis des Satzes 2. Für $x = 0$ ist die Behauptung trivial, es sei also $x \neq 0$. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$$x_1 := [|x| + 1], \quad E := [e^{M+2}] \quad (s.(5)),$$

$$\hat{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 \leq |t| \leq Ex_1, \\ 0 & \text{für } |t| > Ex_1. \end{cases}$$

Für hinreichend große n ist $\nu(n) > Ex_1 n$, im folgenden nehmen wir immer an, daß diese Ungleichung gilt.

$$\begin{aligned} H_{n,\nu}(f; x) &= \sum_{k=0}^{Ex_1 n} \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!} + \\ &+ \sum_{k=Ex_1 n+1}^{\nu(n)} \dots =: U + V. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $U = H_n(\hat{f}; x)$, und da $\hat{f}$ beschränkt und in den Punkten x und $-x$ stetig ist, erhält man (s.[2])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(\hat{f}; x) = \hat{f}(x) = f(x),$$

folglich haben wir nur die Gleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} V = 0$ zu beweisen.

Auf Grund der Bedingung (6) erhalten wir

$$|V| \leq 2A e^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} e^{G(\frac{k}{n})} \frac{|nx|^k}{k!}$$

und daraus (mit Hilfe der Stirling-Formel)

$$\begin{aligned} (15) \quad |V| &\leq 2A e^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} e^{G(\frac{k}{n})} \frac{|nx|^k}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} \leq \\ &\leq 2A e^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} \exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right) + k \log \frac{en|x|}{k}\right) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(16) \quad \psi_n(t) := G\left(\frac{t}{n}\right) + t \log \frac{en|x|}{t} \quad (t > 0).$$

Nach dem Satz von Lagrange existiert zu jeder Zahl $t > Ex_1n$ ein τ mit $Ex_1n < \tau < t$ so, daß

$$\psi_n(t) = \psi_n(Ex_1n) + \psi'(\tau)(t - Ex_1n)$$

ist, somit gilt wegen (16)

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &\leq G(Ex_1) + Ex_1n \log \frac{e|x|}{Ex_1} + \\ &+ \left(G' \left(\frac{\tau}{n} \right) \frac{1}{n} - \log \frac{\tau}{n|x|} \right) (t - Ex_1n) =: \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

Da $E > e$ und $x_1 > |x|$ ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_1 = -\infty$. Weil G' und $\log$ monoton wachsen, erhält man

$$\Gamma_2 \leq \left(G' \frac{\nu(n)}{n} \frac{1}{n} - \log \frac{Ex_1n}{n|x|} \right) \nu(n) \quad (Ex_1n \leq t \leq \nu(n)).$$

Daher ergibt sich wegen (5)

$$\Gamma_2 \leq (M - \log E) \nu(n) \quad (Ex_1n \leq t \leq \nu(n)).$$

Nach der Definition von E ist $M - \log E < 0$, folglich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_2 = -\infty$. Wir erhalten also für hinreichend große n

$$\psi_n(t) < 0 \quad (Ex_1n < t < \nu(n)),$$

und daraus - auf Grund von (15) und (16)

$$(17) \quad |V| \leq 2Ae^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1n}^{\nu(n)} e^{\psi_n(k)} \leq 2Ae^{-n|x|} \nu(n).$$

Nach den Bedingungen $G'(t) \geq t^\delta$ ($t \geq t_0$) und (5) gelten für hinreichend große n die Abschätzungen

$$\left(\frac{\nu(n)}{n} \right)^\delta \leq G' \left(\frac{\nu(n)}{n} \right) \leq Mn.$$

Hieraus ergibt sich

$$\nu(n) \leq M^{\frac{1}{\delta}} n^{1+\frac{1}{\delta}}.$$

Daraus und aus (17) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} V = 0$.

Beweis des Satzes 3. Nach dem Satz von Lagrange und den Bedingungen des Satzes 3 erhalten wir

$$(18) \quad \begin{aligned} G\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) &= G\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) + G'(\xi_n) \frac{\nu(n)}{2n} \geq G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) \frac{\nu(n)}{2n} \geq \\ &\geq (2n \log \nu(n)) \frac{\nu(n)}{2n} = \log(\nu(n))^{\nu(n)}. \end{aligned}$$

Es sei $x > 0$. Wir setzen

$$(19) \quad a_k := \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right)\right) \frac{(nx)^k}{k!} > 0 \quad (k \in N).$$

Mit Hilfe der Stirling-Formel ergibt sich:

$$a_k > \frac{e^{-nx}}{2} \exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right)\right) \left(\frac{enx}{k}\right)^k \frac{1}{q_k \sqrt{2\pi k}},$$

wobei $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 1$ ist. Für hinreichend große n gilt wegen (18)

$$\begin{aligned} a_{\nu(n)} &> \frac{1}{2\sqrt{2\pi}q_{\nu(n)}} e^{-nx} (enx)^{\nu(n)} \frac{1}{\sqrt{\nu(n)}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}q_{\nu(n)}} \exp\left(\nu(n) \left[-\frac{nx}{\nu(n)} + \log(enx) - \frac{1}{2\nu(n)} \log \nu(n)\right]\right), \end{aligned}$$

woraus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\nu(n)} = \infty$ folgt. Da $a_{\nu(n)}$ das $\nu(n)$ -te Glied der Reihe $H_n(f; x)$ ist (s.(11) und (19)) und alle Glieder von $H_n(f; x)$ positiv sind, gilt auch (12).

Literaturverzeichnis

- [1] **Gróf J.**, Über Approximation durch Polynome mit Belegungsfunktion, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, **35**(1-2) (1980), 109-116.
- [2] **Gróf J.**, Fügvényapproximáció az egész számegyenesen, súlyozott hatványsorokkal, *Mat.Lapok*, **29**(1-3) (1977-1981), 161-170.
- [3] **Hermann T.**, Approximation of unbounded functions on unbounded interval, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, **29** (1977), 393-398.

(Eingegangen am 1. März 1988)

J. Gróf

Institut für Mathematik und Rechentechnik

Universität für Chemische Industrie

H-8201 Veszprém, Pf. 158.

Ungarn