Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **9** (1988) 171-184

ÜBER DAS FUZZY-REGRESSIONSPROBLEM

SÁNDOR JÓZSEF

Abstract. Several extensions of the regression analysis as fuzzy-type developments of this well-known statistical method were given of late years [1,2,3]. The idea of our concept originates from the classical case and is based on the substitution of notions of probability theory used in classical regression with fuzzy ones. In place of joint density function we take fuzzy relation and from this we derive the so-called fuzzy TR-regression functions similarly to the classical process of defining the conditional density function. In the next step we give set-valued functions (εTR-regressions) and an unambigous set-valued function (regression) which is analogous to the classical regression, i.e. to the conditional expected value.

1. Einführung

Bei praktischen Regressionsproblemen beschäftigen wir uns mit der Approximation des bedingten Erwartungswertes durch Funktionen gegebenen Typs, z.B. durch lineare oder linearisierbare Funktionen. In diesem Falle sind sowohl die theoretischen Grundlagen, als auch die Bedingungen der praktischen Berechnungen bekannt. Das Regressionsproblem kann man auch vom Standpunkt der Fuzzy-Theorie betrachten und die Identifikationsaufgabe der Funktion $y = f(x)$ unter "unscharfen Umständen" auf verschiedene Weisen formulieren [1,2,3].

In dieser Arbeit möchten wir einen neuen Zugang zur Stellung und Lösung der fuzzy'schen Regressionsaufgabe zeigen. Unsere Konzeption ist ähnlich dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufbau. Wir gehen von einer bestimmten (vorausgesetzten oder geschätzten) Fuzzy–Relation R aus, die als paralleler Begriff zur gemeinsamen Dichtefunktion betrachtet werden kann und definieren zuerst die sog. Fuzzy–TR–Regression. Diese kann man mit der bedingten Dichtefunktion vergleichen. Hiernach können wir mengenwertige Funktionen, sog. εTR—Regressionen angeben, die letzlich die Einführung der mengenwertigen Regressionsfunktion ermöglichen. Diese ist analog zur üblichen Regressionsfunktion.

2. Vorbemerkungen

Eine Teilmenge A einer Basismenge X ist durch ihre charakteristische Funktion χ_A eindeutig bestimmt. Der Begriff der Fuzzy–Menge ist eine "natürliche" Verallgemeinerung des Mengenbegriffes durch die Erweiterung des Wertebereiches $\{0,1\}$ von χ_A:

DEFINITION 2.1. Es sei eine Basismenge X gegeben. F heißt eine Fuzzy–(Teil)menge von X, wenn

$$F = \{ (x, \mu_F(x)) : \quad x \in X, \quad \mu_F : X \longrightarrow [0,1] \}$$

ist. Die Funktion μ_F ist die Zugehörigkeitsfunktion von F. Die Menge der Fuzzy–Mengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(X)$.

Es ist offensichtlich, daß auch eine Fuzzy–Menge $\mathcal{F}(X)$ durch die Funktion μ_F eindeutig charakterisiert ist. Die Teilmengen von X können auch als Fuzzy–Mengen betrachtet werden: $\{ (x, \chi_A(x)) : x \in X \} \in \mathcal{F}(X) \quad \forall A \subset X$. Der Einfachkeit halber werden wir in dieser Arbeit oft nur die Zugehörigkeitsfunktionen benutzen.

DEFINITION 2.2. Es seien X und Y zwei Basismengen und $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. In diesem Fall heißt die Fuzzy–Menge R auch Fuzzy–Relation auf $X \times Y$.

Wir weisen darauf hin, daß die üblichen Relationen auch als Fuzzy–Relationen angefaßt werden können.

In der Fuzzy–Theorie definiert man einen (allgemeinen) Fuzzy–Durchschnittsoperator durch eine t–Norm, einen Fuzzy–Vereinigungsoperator durch eine t–Konorm.

DEFINITION 2.3. Eine Funktion $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist eine t–Norm, wenn $\forall u, v, z \in [0,1]$

(i) $T(u,v) = T(v,u)$;

(ii) $T(T(u,v),z)) = T(u,T(v,z))$;

(iii) $T(u,v) \leq T(u,z)$ if $v \leq z$;

(iv) $T(u,1) = u$.

Die Funktion $S : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist eine t–Konorm, wenn die Funktion $T_S(u,v) = 1 - S(1-u, 1-v)$ t–Norm ist. Ist die Funktion $T\,(S)$ auch stetig und echt monoton, so sprechen wir von einer strengen t–Norm (t–Konorm).

In [4,5] sind viele konkrete t–Normen angegeben. In dieser Arbeit benutzen wir die folgenden t–Normen und t–Konormen:

$$T(u,v) = u \wedge v = \min(u,v) \qquad S(u,v) = u \vee v = \max(u,v);$$
$$T(u,v) = u \odot v = uv \qquad S(u,v) = u \oplus v = u + v - uv;$$

$$T(u,v) = u \sqcap v = \max(0, u + v - 1)$$

$$S(u,v) = u \sqcup v = \min(1, u + v);$$

$$T(u,v) = u \triangle v = \begin{cases} \min(u,v) & \max(u,v) = 1; \\ 0 & \max(u,v) < 1. \end{cases}$$

Ist T eine beliebige t–Norm, so gilt: $u \triangle v \leq T(u,v) \leq u \wedge v$. Auch die Fuzzy–Operationen bezeichnen wir mit $\wedge$, $\odot$, $\sqcap$, $\triangle$, bzw. $\vee$, $\oplus$, $\sqcup$ oder im allgemeinen mit $\cap_T$ bzw. $\cup_S$.

DEFINITION 2.4. Es seien $A, C \in \mathcal{F}(X)$, $B \in \mathcal{F}(Y)$, T eine t–Norm und S eine t–Konorm. $A \cap_T C$, $A \cup_S C$ sind Fuzzy–Mengen von $\mathcal{F}(X)$, für die $\forall x \in X$ gelten:

$$\mu_{A \cap_T C}(x) = T(\mu_A(x), \mu_C(x)), \quad \mu_{A \cup_S C}(x) = S(\mu_A(x), \mu_C(x)).$$

A ist eine Fuzzy–Teilmenge von C $(A \subseteq C)$, wenn die Relation $\mu_A(x) \leq \mu_C(x) \quad \forall x \in X$ gilt. Das T–direkte Produkt der Fuzzy–Mengen A und B ist das Fuzzy–Menge $A \times_T B \in \mathcal{F}(X \times Y)$, für die gilt:

$$\mu_{A \times_T B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Die zylindrische Erweiterung der Fuzzy–Menge A für die Menge $X \times Y$ ist die Fuzzy–Menge $A^z \in \mathcal{F}(X \times Y)$, für die gilt:

$$\mu_{A^z}(x, y) = \mu_A(x) \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Es ist offensichtlich, daß mit beliebiger t–Norm T gilt: $A^z = A \times_T Y$.

3. Fuzzy–TR–Regression

Wenn $\emptyset \neq R^* \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^k)$ eine feste, gegebene Fuzzy–Relation ist, führen wir die Teilmengen

$$X = \{ x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in \mathbf{R}^k, \mu_{R^*}(x, y) > 0 \},$$

$$Y = \{ y \in \mathbf{R}^k : \exists x \in \mathbf{R}^n, \mu_{R^*}(x, y) > 0 \},$$

bzw. die Fuzzy–Relationen $R = R^*|_{X \times Y} \in \mathcal{F}(X \times Y)$ und $R_X \in \mathcal{F}(X)$ ein, wobei $\mu_{R_X}(x) = \sup\{ R(x, y) : y \in Y \} \quad \forall x \in X$ ist. Die weiteren Untersuchungen beschränken wir auf X, Y und die Fuzzy–Relation R. Wir führen noch die Hilfsfunktionen a_T und b_T ein:

$$a_T(v) = \sup\{ u : T(u, v) = 0 \}, \quad b_T(v) = \inf\{ u : T(u, v) = v \}.$$

Die folgenden Eigenschaften von a_T und b_T sind einfache Folgerungen:

E_1: $a_T(0) = 1$, $a_T(1) = 0$ und a_T ist monoton fallend.
E_2: $b_T(0) = 0$, $b_T(1) = 1$ und b_T ist monoton wachsend.
E_3: Ist T eine strenge t–Norm, dann gelten die Gleichungen
$a_T(v) \equiv 0, \quad b_T(v) \equiv 1 \quad \forall v > 0.$

Der Zusammenhang zwischen den Dichtefunktionen in der Regression ist wohlbekannt: $f(x,y) = f(x) \cdot f(y|x)$, d.h. die gemeinsame Dichtefunktion ist das Produkt der Dichtefunktion der unabhängigen Variablen und der bedingten Dichtefunktion. Schreiben wir hier Zugehörigkeitsfunktionen bzw. Fuzzy–Relationen statt Dichtefunktionen und benutzen wir eine allgemeine t–Norm als Fuzzy–Durchschnittsoperator statt des Produkts, so können wir eine weitere Fuzzy–Relation einführen:

DEFINITION 3.1. Es sei $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ gegeben. Eine Fuzzy–Menge (Relation) $r \in \mathcal{F}(X \times Y)$ wird Fuzzy–TR–Regression (FTR–Regression) genannt, wenn

$$\mu_R(x,y) = T(\mu_{R_X}(x), \mu_r(x,y)) \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

(d.h. $R = R_X^z \cap_T r$) ist. Es sei weiterhin

$$\mathcal{F}_{TR} = \mathcal{F}_{TR}(X \times Y) = \{ r \in \mathcal{F}(X \times Y) : \text{r ist } FTR - \text{Regression}\}.$$

Wir weisen darauf hin, daß eine FTR–Regression r auch als eine Funktion $X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ betrachtet werden kann: $r^* : x \longmapsto r^*(x) \in \mathcal{F}(Y)$, wobei $\mu_{r^*(x)}(y) = \mu_r(x,y) \quad \forall y \in Y$.

Satz 3.1. *Es sei die t–Norm T gegeben. Dann gelten:*

(i) *T stetig* $\Longrightarrow$

$$\emptyset \neq \mathcal{F}_{TR} = \{ r \in \mathcal{F}(X \times Y) : r_{\min} \subseteq r \subseteq r_{\max} \};$$

(ii) *T streng* $\Longrightarrow$ $|\mathcal{F}_{TR}| = 1$;
(iii) $R_X \equiv X$ *(d.h. $\mu_{R_X} \equiv \chi_X$)* $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_{TR} = \{R\}$;
(iv) $\mathcal{F}_{TR} \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $R \vee r_{\min} \subseteq r \subseteq r_{\max} \quad \forall r \in \mathcal{F}_{TR}$,

wobei $r_{\min}, r_{\max} \in \mathcal{F}(X \times Y)$,

$$\mu_{r_{\min}}(x,y) = \inf_{r \in \mathcal{F}_{TR}} \mu_r(x,y); \qquad \mu_{r_{\max}}(x,y) = \sup_{r \in \mathcal{F}_{TR}} \mu_r(x,y).$$

Beweis. (i): T ist laut Definition monoton. Ist T auch stetig, so ist

$$\{ T(\mu_{R_X}(x), v) : \ v \in [0,1] \} = [0, \mu_{R_X}(x)] \quad (\forall x \in X).$$

Wegen $\mu_R(x,y) \in [0, \mu_{R_X}(x)] \quad (\forall y \in Y)$ gilt:

$$\emptyset \neq \{ v : \ T(\mu_{R_X}(x), v) = \mu_R(x,y) \} = [\mu_{r_{\min}}(x,y), \mu_{r_{\max}}(x,y)],$$

wobei

$$\mu_{r_{\min}}(x,y) = \inf \{ v : \ T(\mu_{R_X}(x), v) = \mu_R(x,y) \},$$

$$\mu_{r_{\max}}(x,y) = \sup \{ v : \ T(\mu_{R_X}(x), v) = \mu_R(x,y) \}.$$

Daraus ergeben sich, daß $r \in \mathcal{F}_{TR} \iff r_{\min} \subseteq r \subseteq r_{\max}$.
(ii): Ist T strenge t–Norm, d.h. stetig und echt monoton, so ist die Funktion $T(\mu_{R_X}(x), .)$ auch echt monoton, also wird

$$|\{ v : \ T(\mu_{R_X}(x), v) = \mu_R(x,y) \}| = 1 \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Daraus folgt aber $r_{\min} = r_{\max}$, mithin ist die FTR–Regression eindeutig.
(iii): Wenn $R_X \equiv X$ ist, dann haben wir für alle $r \in \mathcal{F}_{TR}$: $\mu_R(x,y) = T(\mu_{R_X}(x), \mu_r(x,y)) = T(1, \mu_r(x,y)) = \mu_r(x,y)$, d.h. $\mathcal{F}_{TR} = \{R\}$.
(iv): Für alle $r \in \mathcal{F}_{TR}$ sind die Relationen $r_{\min} \subseteq r \subseteq r_{\max}$ und $\mu_R(x,y) = T(\mu_{R_X}(x), \mu_r(x,y)) \leq T(\chi_X(x), \mu_r(x,y)) = T(1, \mu_r(x,y)) = \mu_r(x,y)$ trivial. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, daß der Fall $\mathcal{F}_{TR}(X) = \emptyset$ auch vorkommen kann:

B$_1$: Es sei $T = \triangle$. Nehmen wir an, daß für $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ und für alle $(x,y) \in X \times Y$ gilt: $0 < \mu_R(x,y) < \mu_{R_X}(x) < 1$! In diesem Fall gilt

$$\mu_R(x,y) \notin \{0, \mu_{R_X}(x)\} = \{T(\mu_{R_X}(x), v) : v \in [0,1]\}.$$

Daraus folgt aber $\mathcal{F}_{TR} = \emptyset$.

4. Eigenschaften der *FTR*–Regressionen

Im folgenden setzen wir voraus, daß T eine stetige t–Norm ist. Die Antwort auf die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit haben wir im Satz 3.1. zusammengefaßt. Die folgenden Eigenschaften sind leicht einzusehen $((x,y) \in (X \times Y))$:

E$_4$: $\mu_R(x,y) = 0 \iff$

$$0 = \mu_{r_{min}}(x,y) \leq \mu_{r_{max}}(x,y) = a_T(\mu_{R_X}(x));$$

E$_5$: $0 < \mu_R(x,y) < \mu_{R_X}(x) \iff$

$$a_T(\mu_{R_X}(x)) < \mu_{r_{min}}(x,y) \leq \mu_{r_{max}}(x,y) < b_T(\mu_{R_X}(x));$$

E$_6$: $\mu_R(x,y) = \mu_{R_X}(x) \iff$

$$b_T(\mu_{R_X}(x)) = \mu_{r_{min}}(x,y) \leq \mu_{r_{max}}(x,y) = 1.$$

Aus $T(\mu_{R_X}(x), 1) = \mu_{R_X}(x) = \sup\{\mu_R(x,y) : y \in Y\} = \sup\{T(\mu_{R_X}(x), \mu_r(x,y)) : y \in Y\} = T(\mu_{R_X}(x), \sup\{\mu_r(x,y) : y \in Y\})$ folgt die Relation $\sup\{\mu_r(x,y) : y \in Y\} \geq b_T(\mu_{R_X}(x))$ $\forall x \in X$, $\forall r \in \mathcal{F}_{TR}$. Verwendet E$_5$, E_6 und E$_3$ bekommen wir:

E$_7$: $\sup\{\mu_{r_{min}}(x,y) : y \in Y\} = b_T(\mu_{R_X}(x))$ und

$$\sup\{\mu_{r_{max}}(x,y) : y \in Y\} =$$

$$= \begin{cases} b_T(\mu_{R_X}(x)) & \forall y : \quad \mu_R(x,y) < \mu_{R_X}(x); \\ 1 & \exists y : \quad \mu_R(x,y) = \mu_{R_X}(x). \end{cases}$$

Ist T streng, dann gilt $\sup\{\mu_r(x,y) : y \in Y\} = 1 \qquad \forall r \in \mathcal{F}_{TR}$.

Wir geben einige Beispiele an:

B_2: Es sei $T = \wedge$! In diesem Fall: $r_{\min} = R$ und

$$\mu_{r_{\max}}(x,y) = \mu_R(x,y) + (1 - \mu_R(x,y)) \cdot \\ \cdot \chi_{\{\mu_R(x,y) = \mu_{R_X}(x)\}}(x,y).$$

B_3: Es sei $T = \odot$! Dann $\mu_r(x,y) = \mu_R(x,y)/\mu_{R_X}(x)$.

B_4: Es sei $T = \sqcap$! Daraus folgt:

$$\mu_{r_{\max}}(x,y) = 1 + \mu_R(x,y) - \mu_{R_X}(x) \quad \text{und}$$

$$\mu_{r_{\min}}(x,y) = (1 + \mu_R(x,y) - \mu_{R_X}(x)) \cdot \chi_{\{\mu_R(x,y)>0\}}(x,y).$$

Zur Analyse der Frage der "Unabhängigkeit" führen wir die folgende Definition ein:

DEFINITION 4.1. Eine Relation $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ heißt T–dekomponierbar (oder Relation der T–unabhängigen Variablen x und y), wenn R ein T–direktes Produkt gewisser Fuzzy–Mengen $A \in \mathcal{F}(X)$ und $B \in \mathcal{F}(Y)$ ist: $R = A \times_T B$ $(= A^z \cap_T b^z)$.

Satz 4.1. *Setzen wir voraus, daß $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ T–dekomponierbar ist, $R = A \times_T B$! In diesem Falle haben wir:*

(i) *Es existiert $r \in \mathcal{F}(Y)$, so daß $r^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$;*

(ii) *Ist* $\mathrm{hgt}(B) = \sup\{\mu_B(y) : y \in Y\} = 1$, *dann* $B^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$.

Beweis. (i): Es sei $r \in \mathcal{F}(Y)$ so gewählt, daß die Gleichung $\mu_B(y) = T(\mathrm{hgt}(B), \mu_r(y))$ $(\forall y \in Y)$ gilt. (Die Existenz von r ergibt sich aus der Stetigkeit von T wie beim Satz 3.1.) Daraus folgt aber:

$$T(\mu_{R_X}(x), \mu_{r^z}(x,y)) = T(\sup\{\mu_{A \times_T B}(x,y) : y \in Y\}, \mu_r(y)) =$$

$$= T(\sup\{T(\mu_A(x), \mu_B(y)) : y \in Y\}, \mu_r(y)) =$$

$$= T(T(\mu_A(x), \sup\{\mu_B(y) : y \in Y\}), \mu_r(y)) =$$
$$= T(T(\mu_A(x), \mathrm{hgt}(B)), \mu_r(y)) = T(\mu_A(x), T(\mathrm{hgt}(B), \mu_r(y))) =$$
$$= T(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \mu_R(x,y) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

(ii): Ist $\mathrm{hgt}(B) = 1$, so ergibt sich einfach und aus $\mu_B(y) \equiv T(1, \mu_B(y))$ und aus (i), daß $B^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$ ist. □

Die folgenden Eigenschaften sind leicht zu beweisen:

E_8: Wenn T eine strenge t–Norm und R T–dekomponierbar sind ($R = A \times_T B$), gilt für die einzige, von x unabhängige FTR–Regression r:

$$\mu_r(x,y) = T^{-1}(\mathrm{hgt}(B), .)(\mu_B(y)).$$

E_9: Es seien R T–dekomponierbar, $r_1, r_2 \in \mathcal{F}(Y)$ so daß $r_1^z, r_2^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$, $g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine Funktion mit der Eigenschaft $g(u,v) \in [u,v]$ (z.B. $g(u,v) = \alpha u + (1-\alpha)v$ mit $\alpha \in [0,1]$ fixiert). Für die Fuzzy–Menge $r \in \mathcal{F}(Y)$, $\mu_r(y) = g(\mu_{r_1}(y), \mu_{r_2}(y))$ gilt dann $r^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$.

B_5: Es seien in diesem Beispiel $T = \odot$, ξ und η zwei unabhängige Zufallsvariablen und $R \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y)$, wobei

$$X = \{x \in \mathbb{R} : f_\xi(x) > 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R} : f_\eta(y) > 0\};$$

$$\begin{aligned}\mu_R(x,y) &= \frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{\sup\{f_{\xi\eta}(x,y) : (x,y) \in X \times Y\}} = \\ &= \underbrace{\frac{f_\xi(x)}{\sup\{f_\xi(x) : x \in X\}}}_{\mu_A(x)} \cdot \underbrace{\frac{f_\eta(y)}{\sup\{f_\eta(y) : y \in Y\}}}_{\mu_B(y)} = \\ &= \mu_A(x)\mu_B(y).\end{aligned}$$

In diesem Fall sind R $\odot$–dekomponierbar ($R = A \times_\odot B$) und $\mathrm{hgt}(B) = 1$, also ergibt sich als einzige FTR–Regression die zylindrische Erweiterung von $B \in \mathcal{F}(Y)$:

$$\mu_r(x,y) = \mu_{B^z}(x,y) = \frac{f_\eta(y)}{\sup\{f_\eta(y) : y \in Y\}}.$$

Parallele Ergebnisse zur gewöhnlichen Regression mit unabhängigen erklärenden Variablen können auch im Fuzzy–Fall formuliert werden. Wir benutzen die folgende Bezeichnung:

$$T_{i=1}^{n} z_i = T\left(z_1, T\left(z_2, T\left(\dots, T\left(z_{n-1}, z_n\right)\right)\right)\right).$$

Satz 4.2. *Es seien* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, $R_i \in \mathcal{F}(X_i \times Y)$, T *eine (fixierte) t–Norm,* $R = (R_1)^z \cap_T \cdots \cap_T (R_n)^z$ *und* $r_i \in \mathcal{F}_{TR}(X_i \times Y)$ $(i = 1, \dots, n)$. *Dann gilt* :

$$r = (r_1)^z \cap_T \cdots \cap_T (r_n)^z \in \mathcal{F}_{TR}(X \times Y).$$

Beweis. $T(\mu_{R_X}(x), \mu_r(x,y)) =$

$$= T(\sup\{\, \mu_R(x,y) :\ y \in Y\,\},\, T_{i=1}^{n} \mu_{r_i}(x_i, y)) =$$

$$= T\big(\sup\{\, T_{i=1}^{n} \mu_{R_i}(x_i, y) :\ y \in Y\,\},\, T_{i=1}^{n} \mu_{r_i}(x_i, y)\big) =$$
$$= T\big(T_{i=1}^{n}\big(\sup\{\, \mu_{R_i}(x_i, y) :\ y \in Y\,\}\big), T_{i=1}^{n} \mu_{r_i}(x_i, y)\big) =$$
$$= T\big(T_{i=1}^{n} \mu_{R_{X_i}}(x_i),\, T_{i=1}^{n} \mu_{r_i}(x_i, y)\big) =$$
$$= T_{i=1}^{n}\big(T\big(\mu_{R_{X_i}}(x_i), \mu_{r_i}(x_i, y)\big)\big) = T_{i=1}^{n}\big(\mu_{R_i}(x_i, y)\big) = \mu_R(x,y). \square$$

5. Mengenwertige Regression

DEFINITION 5.1. Es seien T und R gegeben, $r \in \mathcal{F}_{TR}$, $\mathcal{P}(Y) = \{\, A : A \subset Y\,\}$ und $\varepsilon \in [0,1]$. Die Funktion

$$f_{r\varepsilon} : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y), \quad x \longmapsto \{\, y \in Y : \mu_r(x,y) \geq \varepsilon\,\}$$

nennen wir mengenwertige (durch r generierte) εTR–Regression.

Aus der Definition der εTR–Regression ergeben sich einfach die folgenden Relationen (Eigenschaften):

E_{10}: $\varepsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{r0}(x) \equiv Y \qquad \forall x \in X;$
$\varepsilon = 1 \quad \Longrightarrow \quad f_{r1}(x) \subseteq f_{r\varepsilon}(x) \quad \forall \varepsilon < 1 \quad (\forall x \in X).$

E_{11}: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \implies f_{r\varepsilon_2}(x) \subseteq f_{r\varepsilon_1}(x) \quad \forall x \in X$ und

$$\bigcup_{\varepsilon>0}\Big(\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f_{r_{\min}\varepsilon}(x))\Big) = \{\,(x,y) : \mu_R(x,y) > 0\,\}.$$

E_{12}: $f_{r_{\min}\varepsilon}(x) \subseteq f_{r\varepsilon}(x) \subseteq f_{r_{\max}\varepsilon}(x) \quad \forall x \in X.$

E_{13}: $f_{r_{\max}1}(x) = \{\,y \in Y : \mu_R(x,y) = \mu_{R_X}(x)\,\}$ erfüllt und gilt unabhängig von der benutzten t–Norm.

DEFINITION 5.2. Es sei $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ gegebenen. Die Funktion $f_R = f_{r_{\max}1}$ nennen wir mengenwertige Regressionsfunktion.

Die Eigenschaft E_{13} zeigt, daß die Idee dieser Definition ähnlich dem "Maximum–Likelihood–Prinzip" ist.

E_{14}: $\varepsilon > b_T(\mu_{R_X}(x)) \implies \emptyset = f_{r_{\min}\varepsilon}(x) \subseteq f_{r_{\max}\varepsilon}(x) = f_R(x);$

$$\varepsilon = b_T(\mu_{R_X}(x)) \implies f_{r_{\min}\varepsilon}(x) = f_{r_{\max}\varepsilon}(x) = f_R(x);$$
$$\varepsilon < b_T(\mu_{R_X}(x)) \implies \emptyset \neq f_{r_{\min}\varepsilon}(x) \subseteq f_{r_{\max}\varepsilon}(x).$$

E_{15}: Ist R T–dekomponierbar und $r^z \in \mathcal{F}_{TR}$, dann gilt $f_{r\varepsilon}(x) \equiv \{\,y \in Y : \mu_r(y) \geq \varepsilon\,\}$.

Sehen wir einige Beispiele dafür!

B_6: Es seien $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $X =$Dom g, $Y =$Im g und $R = R_g$, wobei

$$\mu_{R_g}(x,y) = \begin{cases} 1 & y = g(x); \\ 0 & y \neq g(x); \end{cases}$$

ist. In diesem Fall sind $R_X \equiv X$, $r = R$ (unabhängig von T) und $f_{r\varepsilon}(x) = f_R(x) = \{g(x)\} \quad \forall \varepsilon > 0$.

B_7: Es seien $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $\mu_R(x,y) = c\cdot\chi_A|_{X\times Y}$ mit $0 < c \leq 1$ fixiert. (X, Y sind zu A konstruiert.) Dann erhalten wir: $\mu_{R_X}(x) \equiv c$, $\mu_{r_{\min}}(x,y) = b_T(c)\cdot\chi_A(x,y)$, $\mu_{r_{\max}}(x,y) = \chi_A(x,y) + a_T(c)\cdot(1 - \chi_A(x,y))$,

$$f_{r_{\min}\varepsilon}(x) = \begin{cases} \emptyset & \varepsilon > b_T(c); \\ f_R(x) & \varepsilon \leq b_T(c); \end{cases}$$

$$f_{r_{\max\varepsilon}}(x) = \begin{cases} f_R(x) & \varepsilon > a_T(c); \\ Y & \varepsilon \le a_T(c); \end{cases}$$

wobei $f_R(x) = \{\, y \in Y : \ (x,y) \in A \,\}$.

B_8: Es seien $g, \sigma : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ zwei gegebene Funktionen, $R \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_R(x,y) = \frac{s \cdot e^{-\left(\frac{y-g(x)}{\sigma(x)}\right)^2}}{\sigma(x)}.$$

wobei $s = \inf\{\sigma(x) : \ x \in \mathbf{R}^n\} > 0$.

a) Es sei weiterhin $T = \odot$! Daraus folgen: $\mu_{R_X}(x) = s/\sigma(x)$,

$$\mu_r(x,y) = e^{-\left(\frac{y-g(x)}{\sigma(x)}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$f_{r\varepsilon}(x) = \left[\, g(x) - \sigma(x) \cdot \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}},\ g(x) + \sigma(x) \cdot \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \,\right].$$

Als mengenwertige Regression ergibt sich:

$$f_R(x) = \{g(x)\} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

b) Es seien jetzt $T = \wedge$ und $s_\varepsilon(x) = \sigma(x)\sqrt{\ln \frac{s}{\varepsilon\sigma(x)}}$. Dann erhalten wir:

$$r_{\min}, r_{\max} \in \mathcal{F}_{TR}, \quad r_{\min} = R, \ r_{\max} = R \vee R_g$$

(die Definition von R_g siehe in B_6),

$$f_{r_{\min\varepsilon}}(x) = \begin{cases} 0 & \varepsilon > \frac{s}{\sigma(x)}; \\ [g(x) - s_\varepsilon(x), g(x) + s_\varepsilon(x)] & \varepsilon \le \frac{s}{\sigma(x)}; \end{cases}$$

$$f_{r_{\max\varepsilon}}(x) = \begin{cases} g(x) & \varepsilon > \frac{s}{\sigma(x)}; \\ [g(x) - s_\varepsilon(x), g(x) + s_\varepsilon(x)] & \varepsilon \le \frac{s}{\sigma(x)}; \end{cases}$$

und $f_R(x) = \{g(x)\} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.

Literatur

[1] HESHMATY, B. and KANDEL, A., Fuzzy Linear Regression and its Applications to Forecasting in Uncertain Environment. *Fuzzy Sets and Systems* **15**(1985), 159-191.

[2] JAJUGA, K., Linear Fuzzy Regression. *Fuzzy Sets and Systems* **20**(1986), 343-353.

[3] TANAKA, H., Fuzzy data analysis by possibilistic linear models. *Fuzzy Sets and Systems* **24**(1987), 363-375.

[4] YOU ZHAOYOUNG, Methods for constructing triangular norm. *Fuzzy Mathematics* **3**(1983), 71-78.

[5] MIZUMOTO, M., T-norms and their pictorial representations. *BUSEFAL* 25 (1986), 67-78.

[6] JÓZSEF, S., *Regression mit Fuzzy-Mengen.* XII. International Conference on Math. Optimization, 15-20.11.1987, Eisenach, DDR.

(Received Januar 20, 1988)

SÁNDOR JÓZSEF
Forschungsinstitut für Agrarökonomie
1093 Budapest, Zsil u. 3-5.
HUNGARY