

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ ПУАССОНА

АНТАЛ КОВАЧ

Кафедра Теории Вероятностей и Математической Статистики Университета им.
Л. Этвеша, 1088 Будапешт, Музей крт. 6—8.

(Поступило 13 сентября 1985)

В этой статье изучаем асимптотические разложения распределений сумм независимых, неотрицательных случайных величин в том случае, когда аппроксимирующее распределение является обобщенным законом Пуассона. Будем говорить, что случайная величина U имеет функцию распределения обобщенного закона Пуассона, если его производящая функция имеет вид $e^{\lambda(\Psi(z)-1)}$, где $\Psi(z)$ является производящей функцией некоторой случайной величины, принимающей неотрицательные, целые значения. Здесь λ — некоторая положительная константа. Так как обобщенные законы Пуассона безгранично делимы, то они выступают предельными законами распределений сумм независимых случайных величин. Примером может служить случай, когда производящие функции слагаемых имеют вид $1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} \Psi(z)$. Этот пример

показывает, что аппроксимация обобщенным законом Пуассона может использоваться тогда, когда производящие функции слагаемых имеют вид $f(\Psi(z))$ где f тоже производящая функция. В дальнейшем построим асимптотические разложения и оценим остаточные члены разложений при таких условиях. Для этого будем использовать понятие оператора Δ_Q . Пусть Q и P вероятностные меры на неотрицательных целых числах. В силу определения

$$\Delta_Q P = P - P * Q.$$

Для построения асимптотических разложений нам нужны некоторые свойства оператора Δ_Q :

1. Справедливо равенство

$$(1) \quad \Delta_Q^r P = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} P * Q^{*j},$$

где Δ_Q^r определяется рекуррентными соотношениями

$$\Delta_Q^r P = \Delta_Q(\Delta_Q^{r-1} P).$$

Утверждение легко доказывается по индукции.

2. Пусть $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — производящие функции от P и Q . Тогда производящая функция от $\Delta_Q^r P$ равна $(1 - \Psi(z))^r \Phi(z)$. Это получается следующим образом. В силу

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} (P * Q^{*j})(k)$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \sum_{k=0}^{\infty} z^k (P * Q^{*j})(k).$$

3. Если $Q = I$ вероятностная мера, сосредоточенная в единице, то оператор Δ_I совпадает с оператором конечной разности, т.е.

$$\Delta_I P(k) = P(k) - P(k-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \Phi(z) \Psi^j(z) = (1 - \Psi(z))^r \Phi(z).$$

Пусть в дальнейшем P обозначает обобщенный закон Пуассона с производящей функцией $e^{\lambda(\Psi(z)-1)/n}$, где $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k Q(k)$. Пусть $X_1,$

$X_2, \dots, X_n$ независимые, одинаково распределенные, неотрицательные, целочисленные случайные величины с функцией распределения $\Phi(x)$ и с производящей функцией $f^*(\Psi(z))$, где $f^*(z)$ является производящей функцией некоторой случайной величины U . Пусть случайная величина V имеет распределение Пуассона с параметром λ/n . Обозначим факториальные и абсолютные факториальные псевдомоменты r -ого порядка случайных величин U и V через $\alpha(r)$ и $\beta(r)$. Пусть $\alpha(1) = 0$.

Для аппроксимации распределения F^{*n} используем следующее разложение

$$(2) \quad F^{*n}(x) = G^{*n}(x) + \sum_{j=1}^s B_j(x) + r_{s+1}(x),$$

где

$$G(x) = \sum_{k < x} P(k),$$

$$B_j(x) = \sum_{v=1}^j \binom{n}{v} \bar{H}_{j+v,v} (-1)^{j+v} \Delta_Q^{j+v} G^{*(n-v)}(x),$$

$$\Delta_Q G(x) = \sum_{k < x} \Delta_Q P(k),$$

$$\bar{H}_{j,v} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_v=j \\ i_l \geq 1}} \prod_{l=1}^v \frac{\alpha(i_l)}{i_l!}.$$

Это разложение получим аналогичным образом как в [1]. Пусть $f(t) = \bar{f}^*(\Psi(e^{it}))$, $g(t) = e^{-\frac{\lambda}{n}(\Psi(e^{it})-1)}$ а $b_j(t)$ — преобразование Фурье-Стилтьеса для $B_j(x)$. Для определения $b_j(t)$ используем следующее формальное разложение

$$\begin{aligned}(f(t) - g(t))^v &= \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha(j)}{j!} (\Psi(e^{it}) - 1)^j \right)^v = \\ &= \sum_{j=2v}^{\infty} (\Psi(e^{it}) - 1)^j \bar{H}_{j,v}.\end{aligned}$$

Получаем, что

$$b_j(t) = \sum_{v=1}^j \binom{n}{v} (\Psi(e^{it}) - 1)^{j+v} g^{n-v}(t) \bar{H}_{j+v,v}.$$

Из этого по второму свойству оператора Δ_Q следует, что

$$B_j(x) = \sum_{v=1}^j \binom{n}{v} \bar{H}_{j+v,v} (-1)^{j+v} \Delta_Q^{j+v} G^{*(n-v)}(x).$$

В разложении (2) получим такую оценку остаточного члена:

Теорема. Если $\beta(s+2)$ конечен, то

$$\max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \sum_{j=1}^s B_j(x) \right| \leq \sum_{v=1}^{s+1} \binom{n}{v} \bar{h}_v,$$

где $\bar{h}_v$ является полиномом от $\beta(2), \beta(3), \dots, \beta(s+2)$.

Замечание. Полиномы $\bar{h}_v$ имеют такой явный вид:

$$\bar{h}_v = \sum_{j=s+v+1}^{v(s+1)} D_j L_{j,v}^{(s+1)} + \sum_{l=1}^v \binom{v}{l} \left(\frac{\beta(s+2)}{(s+2)!} \right)^l \sum_{j=2(v-l)}^{(s+1)(v-l)} D_{l(s+2)+j} L_{j,v}^{(s+1)},$$

$$L_{j,v} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_v=j \\ 1 \leq i_l \leq s+1}} \prod_{l=1}^v \frac{\beta(i_l)}{i_l!}$$

и

$$D_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\Psi(e^{it}) - 1|^j}{2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|} dt$$

при $v = 1, 2, \dots, s$. В случае $v = s+1$

$$\bar{h}_{s+1} = \frac{D_{2(s+1)}}{2^{(s+1)}} \beta^{s+1}(2).$$

Заметим, что константы D_j можно оценить используя C_j , которые были определены в [1]. Пусть $q = \sum_{k=1}^{\infty} kQ(k)$. Тогда

$$|\Psi(e^{it}) - 1| \leq q|e^{it} - 1|,$$

следовательно, $D_j \leq q^j C_j$.

Доказательство теоремы. Утверждение этой теоремы доказывается аналогичным образом, как Теорема 2.1. в [1]. Только следует использовать разложение

$$f(t) - g(t) = \sum_{j=2}^{s+1} \frac{\alpha(j)}{j!} (\Psi(e^{it}) - 1)^j + \frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!} (\Psi(e^{it}) - 1)^{s+2}. \quad \square$$

Таким образом выражения, $e^{it} - 1$ и $|e^{it} - 1|$, выступающие в теореме, следует заменить разностью $\Psi(e^{it}) - 1$ и его абсолютным значением $|\Psi(e^{it}) - 1|$.

Следствие. Если $s = 0$, то получим

$$\max_x |F^{*n}(x) - G^{*n}(x)| \leq \frac{nD_2}{2} \beta(2) \leq \frac{2q^2}{\Pi} n \beta(2).$$

В случае $s = 1$

$$\begin{aligned} \max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \frac{n\alpha(2)}{2} \Delta_Q^2 G^{*(n-1)}(x) \right| &\leq \\ &\leq \frac{nD_3}{3!} \beta(3) + \left(\frac{n}{2} \right) \frac{D_4}{4} \beta^2(2) \leq \frac{nq^3 \beta(3)}{3} + \frac{4n(n-1)q^4 \beta^2(2)}{3\pi}. \end{aligned}$$

Пример. Если $f(t) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} \Psi(e^{it})$, то $\alpha(1) = 0$, $\alpha(r) = -\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r$, и $\beta(r) = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r$, $r = 2, 3, \dots$, следовательно,

$$\begin{aligned} \max_x |F^{*n}(x) - G^{*n}(x)| &\leq \frac{2q^2 \lambda^2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \\ \max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \frac{\lambda^2}{2n} \Delta_Q^2 G^{*(n-1)}(x) \right| &\leq \\ &\leq \left(\frac{q^3 \lambda^3}{3} + \frac{4q^4 \lambda^4}{3\pi} \right) \frac{1}{n^2} - \frac{4q^4 \lambda^4}{3\pi} \cdot \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ковач А.: Асимптотические разложения в терминах пседгомоментов. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Computatoria* 5 (1977), 67—76.