

АНАЛИЗ ДВУХ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СКОРОСТЬ ЭВМ С БЛОЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Г. П. ЕГОРЫЧЕВ*, А. М. ИВАНИ** и А. И. МАКОСИЙ*

* Институт Физики СО АН СССР, 666036 Красноярск

** Кафедра Вычислительной техники Университета им. Л. Этвеша, 1088 Будапешт, Музей крт. 6—8.

(Поступило 14. 3. 1985)

Резюме. Цель работы — нахождение асимптотики двух комбинаторных сумм. Первая из них характеризует скорость ЭВМ с блочной памятью для случайного, а вторая — для шагового поведения программ. Вычисления последовательно проводятся с помощью метода интегрального представления комбинаторных сумм, далее с помощью методов Лапласа и перевала.

1. Математическая модель и скорость ЭВМ с блочной памятью

1.1. Математическая модель. Рассмотрим следующую схему ЭВМ с блочной памятью [1,5]. ЭВМ состоит из центрального процессора и оперативной памяти, которая разбита на блоки $B_1, \dots, B_n$.

Программы описываются с помощью последовательностей обращений к блокам памяти $\omega = r_1, r_2, \dots, r_k$. Здесь k — длина программы (число выполненных операций), а r_i ($i = 1, \dots, k$) — обращения к блокам памяти, где $r_i \in N = \{1, \dots, n\}$. Множество последовательностей длины k обозначим через N^k .

Предполагаем, что за единицу времени выполняются все очередные обращения, которые отличаются друг от друга. Поэтому выполнения программы ω можно получить путём разбиения последовательности ω на подпоследовательности $\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega), \dots$ по следующим правилам:

- а) элементы каждой подпоследовательности различны;
- б) первый элемент каждой подпоследовательности, за исключением $\varphi_1(\omega)$, тождественен одному из членов предыдущей подпоследовательности.

Такое разбиение последовательности является взаимно однозначным. Длина любой подпоследовательности может быть 1, 2, ..., $n-1$ или n . Таким образом, время выполнения $\tau(\omega)$ программы ω есть число подпоследовательностей при указанном разбиении ω . Например, если $\omega = 1, 3, 4, 3, 2, 2, 5$, то $\varphi_1(\omega) = 1, 3, 4, \varphi_2(\omega) = 3, 2, \varphi_3(\omega) = 2, 5$, а $\tau(\omega) = 3$.

Вероятностные свойства («поведение») программ описываются с помощью однородной марковской цепи, которая задаётся вектором начальных вероятностей $p = (p_1, \dots, p_n)$ и матрицей $P = [p_{ij}]$ переходных вероятностей. Таким образом, множество программ длины k моделируется последовательностью случайных величин

$$(1.1) \quad \sigma_k = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k,$$

для которой $P(\xi_1 = i) = p_i$ ($i = 1, \dots, n$) и $P(\xi_{t+1} = j | \xi_t = i) = p_{ij}$ ($t = 1, \dots, k-1$, и $i, j = 1, \dots, n$).

Будет рассмотрено два класса программ, для обоих полагаем $p_i = 1/n$ ($i = 1, \dots, n$). Переходные вероятности

$$(1.2) \quad \text{RAN} = \begin{bmatrix} 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/n \end{bmatrix} \text{ и } \text{STEP} = \begin{bmatrix} \beta\alpha\beta & \dots & \beta\beta \\ \beta\beta\alpha & \dots & \beta\beta \\ \vdots & & \vdots \\ \beta\beta\beta & \dots & \beta\alpha \\ \alpha\beta\beta & \dots & \beta\beta \end{bmatrix},$$

где $\beta = (1-\alpha)/(n-1)$. Первая модель называется случайной, вторая — шаговой.

1.2. Скорость ЭВМ с блочной памятью. Скорость ЭВМ с блочной памятью $V(n, M)$ для данной модели поведения M определим с помощью скоростей $V_t(n, M)$ в t -ый ($t = 1, 2, \dots$) момент времени.

Пусть $q = n^t$. Разобьём все последовательности $\omega \in N^q$ на подпоследовательности. Тогда по определению

$$(1.3) \quad V_t(n, M) = \sum_{\omega \in N^q} |\varphi_t(\omega)| P(\omega, M),$$

где $\varphi_t(\omega)$ — длина t -той подпоследовательности в ω , а $P(\omega, M)$ — вероятность ω по M в пространстве N^q . Тогда скорость $V(n, M)$ определим как

$$(1.4) \quad V(n, M) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i(n, M).$$

Для простоты в следующем применим обозначения $V(n, \text{RAN}) = V(n)$ и $V(n, \text{STEP}) = V(n, \alpha)$.

1.3. Явные формулы скоростей для случайной и шаговой модели поведения. Теперь покажем, как скорость зависит от числа блоков. Для полноты повторим оригинальное доказательство [1].

Лемма 1.1. Если $n \geq 1$, то

$$(1.5) \quad V(n) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2(n-1)!}{n^i(n-i)!}.$$

Доказательство. Изучим распределение вероятностей для длины первой подпоследовательности $\varphi_1(\omega)$ в $\omega \in N^q$. Поскольку $P_{ij} = 1/n$, то

$$(1.6) \quad \sum_{\substack{\omega \in N^q \\ |\varphi_1(\omega)|=l}} P(\omega, \text{RAN}) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-i+1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{i(n-1)!}{n^l(n-i)!}.$$

Отсюда следует, что

$$V_1(n, \text{RAN}) = \sum_{i=1}^n i q_i = \sum_{i=1}^n \frac{i^2(n-1)!}{n^l(n-i)!}.$$

То же рассуждение применимо к остальным подпоследовательностям $\varphi_2(\omega), \dots, \varphi_l(\omega)$ и скоростям $V_2(n, \text{RAN}), V_3(n, \text{RAN}), \dots$. Отсюда в силу определения (1.4) следует (1.5). $\square$

Скорость $V(n, \alpha)$ зависит от числа блоков n и «вероятности шага» α следующим образом [2].

Лемма 1.2. Если $n \geq 1$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то

$$(1.7) \quad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} x_{i-j, n-j} \alpha^j \beta^{i-1-j},$$

где

$$(1.8) \quad x_{i, n} = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} x_{i-j, n-j}.$$

Доказательство. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ обозначают случайные величины, где η_t — длина t -той подпоследовательности в элементах N^q . В случае шаговой модели распределения этих величин независимы друг от друга и одинаковы. Поэтому достаточно определить распределение случайной величины η_1 , чтобы получить величину $V(n, \alpha)$, т. е.

$$(1.9) \quad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^n i P(\eta_1 = i).$$

Легко видеть, что (1.9) равносильно соотношению

$$(1.10) \quad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^n i P(\eta_1 \geq i),$$

где $P(\eta_1 \geq i)$ — вероятность того, что первые i обращений отличаются друг от друга.

Будем говорить, что для данной последовательности $\omega = r_1, \dots, r_k$ пара (r_t, r_{t+1}) ($1 \leq t \leq k$) представляет α -переход, если $r_{t+1} \equiv r_t + 1 \pmod{n}$; в противном случае назовём эту пару β -переходом. Пусть $C_n(j, i)$ обозначает число подпоследовательностей длины i различных элементов N , в которых j раз встречается α -переход, а первый элемент равен 1. Тогда

$$(1.11) \quad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j \beta^{i-1-j} C_n(j, i).$$

Остаётся определить числа $C_n(j, i)$. Заметим, что имеется $\binom{i-1}{j}$ возможных размещений α -переходов и β -переходов в последовательности длины i , содержащей j раз α -переходы. Пусть $C_n^0(j, i)$ – число последовательностей различных элементов N , для которых первые i переходов являются α -переходами, а остальные $i-j-1$ переходов – β -переходами. Тогда, очевидно, имеем

$$C_n(0, i) = C_n^0(0, i), \quad C_n(i-1, i) = C_n^0(i-1, i).$$

Далее, поскольку существует только одна последовательность из i элементов с $(i-1)$ α -переходами и с начальным элементом 1, то

$$(1.12) \quad C_n^0(i-1, i) = 1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Суммарное число последовательностей длины i из элементов N , начинающихся с 1, равно

$$(1.13) \quad (n-1)_{i-1} = (n-1)(n-2) \dots (n-i+1).$$

Заметим, что $(n-1)_0 = 1$.

Отсюда следует, что

$$(1.14) \quad (n-1)_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} C_n(j, i).$$

Наконец, рассматривая $N' = \{1, \dots, n-1\}$ и не учитывая последний α -переход, получим, что число последовательностей длины $i-1$ для параметров $j-1$ и $n-1$ равны числу последовательностей длины i для пар j и n :

$$(1.15) \quad C_n^0(j, i) = C_{n-1}^0(j-1, i-1) \quad (1 \leq j \leq i-1 \leq n-1).$$

Первое краевое условие получим из (1.12):

$$(1.16) \quad C_n^0(0, 1) = 1.$$

Второе краевое условие получим из того, что в последовательности длины 2 с начальным элементом 1, содержащей один β -переход, имеет место $r_2 \neq 1$ и $r_2 \neq 2$, так, что

$$(1.17) \quad C_n^0(0, 2) = n-2.$$

Из (1.15) имеем

$$(1.18) \quad C_n^0(j, i) = C_{n-j}^0(0, i-j).$$

Между данными коэффициентами имеет место соотношение

$$(1.19) \quad C_n(j, i) = \binom{i-1}{j} C_n^0(j, i).$$

Теперь из (1.14) и (1.19) имеем

$$(1.20) \quad C_n(0, i) = C_n^0(0, i) = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} C_n^0(j, i).$$

Подставляя $C_n^0(j, i)$ из (1.18) в (1.20) получим

$$(1.21) \quad C_n^0(0, i) = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} C_{n-j}^0(0, i-j).$$

Далее, переходя к обозначениям $X_{i,n} = C_n^0(0, i)$, получаем (1.7), и, подставляя (1.18) и (1.19) в (1.11) — формулу (1.8). $\square$

2. Интегральное представление скоростей

2.1. *Интегральное представление скорости $V(n)$.* Сначала приведём новую форму для $V(n)$, которая облегчит дальнейшее исследование. Доказательство этой формулы дадим с помощью метода интегрального представления комбинаторных сумм [6].

Лемма 2. 1. *Если $n \geq 1$, то*

$$(2.1) \quad V(n) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(n) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \quad \text{и} \quad g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)! k^2}{(n-k)! n^k} = \frac{(n-1)!}{n^n} \sum_{k=1}^n \frac{n^{n-k} k^2}{(n-k)!}.$$

Докажем теперь лемму путём нахождения одинаковых интегральных представлений для сумм $f(n)$ и $g(n)$. Обозначим $(2\pi i)^{-1} = a$. Известно [6], что

$$(2.2) \quad \frac{n^k}{k!} = a \int_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz} dz}{z^{k+1}}.$$

На основе

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

имеем

$$(2.3) \quad k^2 = a \int_{|z|=\varphi} \frac{z(1+z) dz}{(1-z)^3 z^{k+1}}.$$

Заменяя в $g(n)$ под знаком суммы коэффициенты по формулам (2.2) и (2.3) на соответствующие интегралы, распространяя суммирование по k от 0 до ∞ (это возможно, так как при $k=0$ и при $k>n$ интегралы равны нулю), меняя знаки суммирования и интегрирования, под знаком интеграла находим сумму геометрической прогрессии (эта сумма абсолютно и равномерно сходится, если положить $\varphi_1 < \varphi_2$).

Понижая кратность интеграла, представляя его как повторный и применяя теорему о вычетах, получаем следующую цепочку равенств (здесь $h(x)$ обозначает функцию $x(1+x)(1-x)^{-3}$):

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{(n-1)!} g(n) &= \sum_{k=1}^n a \int_{|z|=\varphi_1} \frac{e^{nz} dz}{z^{n-k+1}} a \int_{|w|=\varphi_2} \frac{h(w) dw}{w^{k+1}} = \\ &= \sum_{k=1}^n a^2 \int_{\substack{|z|=\varphi_1 \\ |w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz} h(w) dz \wedge dw}{z^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^2 \int_{\substack{|z|=\varphi_1 \\ |w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz} h(w) dz \wedge dw}{z^{n-k+1} w^{k+1}} = a^2 \int_{\substack{|z|=\varphi_1 \\ |w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz} h(w) dz \wedge dw}{z^{n-1} (w-z)} = \\ &= a \int_{|w|=\varphi_2} \frac{e^{nw} h(w) dw}{w^{n+1}} = a \int_{|w|=\varphi} \frac{z(1+z)}{(1-z)^4} \Big|_{w=ze^{-z}} \frac{dw}{w^{n+1}}. \end{aligned}$$

Заменяя в $f(n)$ коэффициенты по формулам (2.2), подобным путём имеем

$$(2.4) \quad f(n) = \frac{n!}{n^n} a \int_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz} dz}{(1-z)z^n}.$$

Если в (2.8) положим $ze^{-z} = w$ и применим формулу

$$(2.5) \quad na \int_{|w|=\varphi} \frac{A(w) dw}{w^{n+1}} = a \int_{|w|=\varphi} \frac{A'(w) dw}{w^n},$$

то получим то же интегральное представление для $f(n)$, как получено в конце предыдущей цепочки для $g(n)$. $\square$

Из доказательства Леммы 2.1. непосредственно вытекает интегральное представление для $V(n)$.

Лемма 2.2. Если $n \geq 1$, то

$$(2.6) \quad V(n) = \frac{n!}{n^n} (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz} dz}{(1-z)z^n}.$$

Асимптотику $V(n)$ нетрудно получить, применяя к интегралу (2.6) метод перевала. Единственной вырожденной точкой перевала подинтегральной функции является точка $z_0 = 1$. Так как эта точка является также особой — полюсом порядка 1, то метод перевала даёт асимптотический ряд для $V(n)$, вычисление коэффициентов которого, однако, связано с трудоёмкими выкладками. Их можно избежать, если использовать другое интегральное представление для $V(n)$.

Лемма 2.3. Если $n \geq 1$, то

$$(2.7) \quad V(n) = n \int_0^{\infty} e^{-nt} (1+t)^n dt - 1.$$

Доказательство. Если известное интегральное представление факториалов

$$m! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

заменим в (2.1), то имеем

$$\begin{aligned} V(n) + 1 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-k}\right) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt = n \int_0^{\infty} e^{-nt} (1+t)^n dt, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует (2.7). $\square$

Замечание. В [4] Лемма 2.1. и формула, эквивалентная (2.7) доказаны с помощью дифференциальных уравнений и преобразований сумм. Также следует заметить, что первый из авторов в 1983-ом году дал элементарное доказательство Леммы 2.1. Поскольку в данной работе хотелось продемонстрировать некоторые возможности метода интегрального представления комбинаторных сумм [6], то приведены соответствующие доказательства.

2.2. Интегральное представление скорости $V(n, \alpha)$. Выше показано, что $V(n, \alpha)$ определяется из соотношения (1.7), где числа $x_{k,n}$ удовлетворяют разностным соотношениям (1.8). Если положить

$$x_{k-j, n-j} / (k-j-1)! = y_{k-j, n-j},$$

то (1.8) переписывается в виде

$$(2.8) \quad \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_{k-j, n-j}}{j!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Используя метод интегрального представления сумм можно получить явное выражение для $y_{k,n}$ (следовательно и для $x_{k,n}$).

Лемма 2.4. Если $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$, то

$$(2.9) \quad y_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n-j-1}{k-j-1}.$$

Доказательство. Пусть $A(u, V)$ — производящая функция для чисел $y_{k,n}$, т.е.

$$y_{k,n} = a^2 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{A(u, v) du \wedge dv}{u^{k+1} v^{n+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_{k-j, n-j}}{j!} &= \sum_{j=0}^{k-1} a^2 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{A(u, v) du \wedge dv}{u^{k-j+1} v^{n-j+1}} a \int_{|w|=r_3} \frac{e^w dw}{w^{j+1}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a^3 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2 \\ |w|=r_3}} \frac{A(u, v) e^w du \wedge dv \wedge dw}{u^{k+1} v^{n+1} (w - uv)} = a^2 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{A(u, v) e^{uv} du \wedge dv}{u^{k+1} v^{n+1}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\binom{n-1}{k-1} = a \int_{|u|=r_1} \frac{(1+u)^{n-1} du}{u^k} = a^2 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{u(1+u)^{n-1} du \wedge dv}{u^{k+1} v^{n+1} (1 - v(1+u))},$$

то из (2.8) имеем

$$A(u, v) = \frac{ue^{-uv}}{(1+u)(1-v(1+u))}.$$

Разложив $A(u, V)$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат получаем (2.9). $\square$

Замечание. Явный вид для чисел $x_{k,n}$ впервые найден в [3] путём установления эквивалентности этой задачи известной комбинаторной задаче перечисления беспорядков.

Теперь, подставляя интегральное представление для чисел $x_{k,n}$ в (1.7), находим новую форму для скорости $V(n, \alpha)$.

Лемма 2.5. Если $n \geq 1$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то

$$(2.10) \quad V(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \beta^k k! \frac{(\alpha/\beta - 1)^j}{j!} \binom{n-j-1}{k-j}.$$

Доказательство. Пусть $(2\pi i)^{-1} = a$ и $\beta^{k-1}(k-1)! = b$. Тогда

$$\begin{aligned} V(n, \alpha) &= \sum_{k=1}^n b \sum_{j=0}^{k-1} a \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2 \\ |w|=r_3}} \frac{A(u, v) \exp\left(\frac{\alpha}{\beta} w\right) du \wedge dv \wedge dw}{u^{k-j+1} v^{n-j+1} w^{j+1}} = \\ &= \sum_{k=1}^n b \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{A(u, v) \exp\left(uv \frac{\alpha}{\beta}\right) du \wedge dv}{(1+u)(1-v(1+u)) u^{k+1} v^{n+1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n b a^2 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{u \exp \left(uv \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right) du \wedge dv}{(1+u)(1-o(1+u))u^{k+1}v^{n+1}} = \\
&= \sum_{k=1}^n b a \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right)^j}{j!} \int_{|u|=r_1} \frac{du}{(1+u)^{j-n+1}u^{k-j}} = \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} b \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right)^j}{j!} \binom{n-j-1}{k-j-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда заменой $k-1 = k$ получаем (2.10). $\square$

Далее найдено интегральное представление для $V(n, \alpha)$.

Лемма 2.6. Если $n \geq 1$ и $0 \leq \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad &V(n, \alpha) = \\
&= n! \beta (2\pi i)^{-1} \int_0^1 \int_{|u|=r} \frac{\exp(u/(\alpha-1))}{1-t(1-t)u} \left[\frac{\exp \left(u \left(\frac{1}{1-\alpha} - t \right) \right)}{u(1-t(1-t)u)} \right]^n dt \wedge du.
\end{aligned}$$

Доказательство. Используя в (2.10) интегральное представление

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \\
\binom{n}{k} &= a \int_{|w|=r} (1+w)^n w^{-k-1} dw \quad (0 < r < \infty)
\end{aligned}$$

для B -функции и биномиальных коэффициентов, по той же схеме вычислений получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
V(n, \alpha) &= n! \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \frac{\Gamma(k)\Gamma(n-j)}{\Gamma(n+k-j)} \binom{n+k-j}{n} \cdot \\
&\cdot \frac{(\alpha/\beta-1)^j}{j!(1-\alpha)^{n-k-1}} \frac{(n-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = n! \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \cdot \\
&\cdot \left\{ \left(\int_0^1 t^k (1-t)^{n-j-1} dt \right) \binom{n+k-j}{n} \frac{(\alpha/\beta-1)^j}{j!} \frac{\beta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n! \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \left\{ \int_0^1 \frac{\beta^{n-k-1}}{(n-k-1)!} (1-t)^{n-k-1} \left(\frac{\alpha n-1}{1-\alpha} \right)^j \cdot \right. \\
&\cdot \frac{t^j}{j!} \binom{n+k-j}{n} t^{k-j} (1-t)^{k-j} dt \Big\} = n! \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \int_0^1 \left\{ a \left(\int_{|u|=r_1} \frac{\exp(\beta(1-t)u) du}{u^{n-k}} \right) \cdot \right. \\
&\cdot a \left(\int_{|v|=r_2} \frac{\exp\left(\frac{\alpha n-1}{1-\alpha} dv\right)}{v^{j+1}} \right) a \left(\int_{|w|=r_3} \frac{dw}{(1-t(1-t)w)^{n+1} w^{k-j+1}} \right) dt = \\
&= n! \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} a^3 \int_0^1 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2 \\ |w|=r_3}} \frac{\exp\left(\beta(1-t)u + \frac{\alpha n-1}{1-\alpha} tv\right) dt \wedge du \wedge dv \wedge dw}{u^{n-k} v^{j+1} (1-t(1-t)w)^{1+n}} = \\
&= n! \beta^{n-1} a^3 \int_0^1 \int_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2 \\ |w|=r_3 \\ r_1 < r_2 < r_3}} \frac{\exp\left(\beta(1-t)u + \frac{\alpha n-1}{1-\alpha} tv\right) dt \wedge du \wedge dv \wedge dw}{u^n (1-t(1-t)w)^{n+1} (w-u)(v-w)} = \\
&= n! \beta^{n-1} a \int_0^1 \int_{|u|=r} \frac{\exp\left(\beta(1-t)u + \frac{\alpha n-1}{1-\alpha} tu\right) dt \wedge du}{u^n (1-t(1-t)u)^{n+1}},
\end{aligned}$$

откуда уже следует (2.11). $\square$

3. Асимптотический анализ скоростей

3.1. Асимптотика для $V(n)$. Геллерман [1] эмпирическим путём установил, что

$$0,96n^{0,56} < V(n) < 1,04 \cdot n^{0,56} \quad (1 \leq n \leq 45).$$

Вулихман [5] доказал, что скорость растёт не быстрее, чем квадратичный корень из числа блоков, а в [4] получена оценка

$$\left| V(n) - \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \right| < 1.$$

В следующей лемме мы получим асимптотический ряд для $V(n)$. В соответствии с формулой (2.7) задача сводится к нахождению асимптотики интеграла

$$I(n) = \int_0^{\infty} e^{-nt} (1+t)^n dt = \int_0^{\infty} e^{n[\ln(1+t)-t]} dt.$$

Лемма 3.1. Для интеграла $I(n)$ справедливо разложение

$$I(n) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(3.1) \quad \ln(1+\varphi(t)) - \varphi(t) \equiv -t^2, \quad \varphi(0) = 0.$$

Доказательство. Интеграл $I(n)$ является интегралом Лапласа и его асимптотика определяется точками, в которых достигается $\max_{t \in [0, \infty)} S(t)$, где $S(t) = \ln(1+t) - t$. Ясно, что этот максимум достигается в единственной точке $t_0 = 0$. Так как $S'(t_0) = 0$ и $S''(t_0) \neq 0$, то $t_0 = 0$ является также невырожденной критической точкой функции $S(t)$. Тогда из теоремы о неявной функции следует, что существует функция $t = \varphi(\tau)$, определённая в некоторой окрестности точки $\tau = 0$ и приводящая $S(t) - S(t_0)$ к квадратичному виду, т.е. $S(\varphi(\tau)) - S(t_0) \equiv -\tau^2$. Основной вклад в асимптотику $I(n)$ будет давать интеграл по достаточно малой окрестности точки t_0 . Имеем

$$I(n) = \int_0^{\infty} e^{nS(t)} dt = \int_0^{\delta} e^{nS(t)} dt + \int_{\delta}^{\infty} e^{nS(t)} dt = I_1(n) + I_2(n),$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Сделав в интеграле $I(n)$ замену $t = \varphi(\tau)$ мы будем находиться в условиях применимости известной леммы Ватсона (см., например, [7], стр. 31)

$$I_1(n) = \int_0^{\delta} e^{nS(t)} dt = \int_0^{\delta_1} e^{-n\tau^2} \varphi'(\tau) d\tau,$$

которая утверждает, что

$$I_1(n) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Величина $I_2(n)$ экспоненциально мала по сравнению с любым членом асимптотического ряда для $I_1(n)$. $\square$

Из Лемм 2.1, 2.3 и 3.1 вытекает

Теорема 3.1. Скорость $V(n)$ представима асимптотическим рядом

$$V(n) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} n^{-\frac{k-1}{2}} - 1 = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} + \\ + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция $\varphi(t)$ определена в (3.1).

Замечание. Из этого асимптотического представления видно, что $V(n)$ растёт как $\sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $V(n)$ возрастает монотонно, т.е. для любого $n \geq 1$ $V(n+1) - V(n) > 0$. Так как

$$V(n) = n \int_0^{\infty} e^{-nt} (1+t)^n dt = \left(\frac{e}{n}\right)^n \int_n^{\infty} e^{-t} t^n dt,$$

то нужно показать, что

$$\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \int_{n+1}^{\infty} e^{-t} t^{n+1} dt - \left(\frac{e}{n}\right)^n \int_n^{\infty} e^{-t} t^n dt > 0,$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n + e \int_{n+1}^{\infty} e^{-t} t^n dt - \left(\frac{n+1}{n}\right) \int_n^{\infty} e^{-t} t^n dt > 0.$$

Это неравенство станет очевидным, если его представить в виде

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \int_n^{n+1} e^{-t} t^n dt + e \int_{n+1}^{\infty} e^{-t} t^n dt - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \int_{n+1}^{\infty} e^{-t} t^n dt > 0,$$

так как

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \quad \text{и} \quad \int_n^{n+1} e^{-t} t^n dt \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Также следует заметить, что монотонность $V(n)$ впервые доказали Бокова Е. Е. и Цатурян Г. К., причём элементарным путём.

3.2. Асимптотика для $V(n, \alpha)$. Используя (2.11) с помощью метода перевала получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. При фиксированном $\alpha \in [0, 1 - \delta]$ для некоторого $\delta > 0$ верно

$$(3.2) \quad V(n, \alpha) \approx \sqrt{\frac{\pi(n-1)}{2(1-\alpha^2)}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I(n, \alpha) &= a \int_0^1 \int_{|u|=r} \frac{\exp\left(\frac{u}{\alpha-1}\right)}{1-t(1-t)u} \left[\frac{\exp\left(u\left(\frac{1}{1-\alpha}-t\right)\right)}{u(1-t(1-t)u)} \right]^n dt \wedge du = \\ &= a \int_0^1 \int_{|u|=r} h(t, u) [f(t, u)]^n dt \wedge du, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h(t, u) &= \exp(u/(\alpha-1)) / (1-t(1-t)u), \\ f(t, u) &= \exp\left(u\left(\frac{1}{1-\alpha}-t\right)\right) / (u(1-t(1-t)u)). \end{aligned}$$

Основной вклад в асимптотику интеграла даёт достаточно малая окрестность точки $(t_0, u_0) = (0, 1-\alpha)$ так как в ней достигается

$$\min_{0 < r < u} \max_{\substack{|u|=r \\ 0 \leq t \leq 1}} |f(t, u)|.$$

Обозначим $\ln f(t, u)$ через $S(t, u)$. Тогда $\nabla S(t_0, u_0) = 0$, $\det S''(t_0, u_0) \neq 0$, т.е. точка (t_0, u_0) является невырожденной критической точкой функции $S(t, u)$. Тогда в некоторой окрестности этой точки функцию $S(t, u)$ можно привести к виду $-t^2 - u^2$, т.е. существует отображение $\varphi(t, u) = (\varphi_1(t, u), \varphi_2(t, u))$, такое, что

$$S(\varphi_1(t, u), \varphi_2(t, u)) - S(t_0, u_0) = -t^2 - u^2.$$

Этот факт вытекает из известной леммы Морса (см. например, [7], стр. 65). С учётом этого имеем

$$I(n, \alpha) \sim (2\pi i)^{-1} \int_{\substack{\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq r \\ \xi_1 \xi_2 \geq 0}} \Omega(\xi_1, \xi_2) \exp(n(-\xi_1^2 - \xi_2^2)) d\xi_1 d\xi_2,$$

где

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = h(\varphi_1(\xi_1, \xi_2), \varphi_2(\xi_1, \xi_2)) \det \varphi'_\xi(\xi).$$

Применяя к данному интегралу метод Лапласа получаем асимптотический ряд для $I(n, \alpha)$:

$$I(n, \alpha) \approx \frac{e^n}{(1-\alpha)^n} |\det S''(t_0, u_0)|^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-\left(\frac{2+k}{2}\right)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$a_k = \Gamma\left(\frac{2+k}{k}\right) \int_{\substack{|x|=1 \\ x_1 \geq 0}} \Omega_k(x) \omega(x),$$

где $\Omega_k(x)$ — однородные полиномы степени k , участвующие в разложении $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ в ряд Тейлора, $\omega(x) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$.

Как видно, вычисление коэффициентов этого разложения довольно трудная задача. Относительно просто выглядит главный член асимптотического разложения, который выражается через собственные числа матрицы — гессiana функции $S(t, u)$ в точке (t_0, u_0) и имеет вид

$$I(n, \alpha) = \frac{e^n}{2n(1-\alpha)^{n-1}\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

С учётом этого разложения получаем (3.2). $\square$

Замечание. Из формулы (3.2) непосредственно следует, что скорость $V(n, \alpha)$ монотонно растёт по n при фиксированных α и монотонно растёт по α при фиксированных n , если положить n достаточно большим. Случай меньших n требует дополнительного исследования.

Заключение

Можно ожидать, что исследованный в этой работе метод интегрального представления комбинаторных сумм в сочетании с известными и новыми методами оценки интегралов окажется эффективным при оценке решений для достаточно широкого круга новых комбинаторных задач, допускающих представление через сумму произведений комбинаторных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hellermann H.: Digital Computer Principles. Mc Graw Hill, New York, 1967.
- [2] Burnett G. J. and Coffman E. G.: Combinatorial problem related to interleaved memory systems. *Journal of ACM* 22 (1973), 39—45.
- [3] Stone H. S.: A note on a combinatorial problem of Burnett and Coffman. *Comm. of ACM* 17 (3) (1974), 165—166.
- [4] Iványi A. and Kátai I.: Estimates for speed of computers with interleaved memory systems. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math.* 19 (1976), 153—164.
- [5] Вулихман В. Е.: Исследование методов организации оперативной памяти и потока информации. Кандидатская диссертация, Москва, МГУ, 1972.
- [6] Егорычев Г. П.: Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск, Наука, 1977. Перевод на английском языке: *Egorychev G. P. x Integral Representation and Computation of Combinatorial Sums. (Trans. of Math: Monographs). Amer. Math. Soc., Providence, 1984.*
- [7] Федорюк М. В.: Метод перевала. Москва, Наука, 1977.