

EIN GALERKIN-VERFAHREN ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG DER BURGERS-GLEICHUNG

MICHAEL FRÖHNER

Ingenieurhochschule Cottbus, Sektion Mathematik

DDR – 7500 Cottbus, PSF 102

(Eingegangen am 26. März 1983-umgearbeitet am 27. Mai 1984)

1. Einführung

In der Hydrodynamik wird als Modell für das System der instationären Navier-Stokes-Gleichungen mit natürlicher oder künstlicher Viskosität häufig die Burgers-Gleichung untersucht, die in räumlich eindimensionaler Form die Gestalt

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t),$$
$$(x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbf{R}^1,$$

besitzt. Sie spiegelt wesentliche Effekte des partiellen Differentialgleichungssystems der Navier-Stokes-Gleichungen wider, ist nichtlinear von parabolischem Typ und besitzt vor der höchsten Ableitung einen (die Viskosität des strömenden Mediums repräsentierenden) im allgemeinen kleinen Parameter ε . Für den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ geht Gleichung (1) in eine Gleichung hyperbolischen Typs über. Dabei entstehen die bekannten Schwierigkeiten der korrekten Formulierung parameterbehafteter Gleichungen mit Grenzschichtverhalten, die zum Beispiel in [3] ausführlich diskutiert werden. Die Funktion $u(x, t)$ hat in (1) die physikalische Bedeutung einer verallgemeinerten Geschwindigkeit.

Um einen konkreten Modellfall zu untersuchen, betrachten wir Gleichung (1) auf dem Intervall $\Omega = (-1, 1)$, $t > 0$, wählen homogene Randbedingungen der Form

$$(2) \quad u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

und als Anfangsbedingung

$$(3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

wobei $u_0(x) \in L_2(\Omega)$ eine gegebene Funktion ist. Gesucht sind verallgemeinerte Lösungen $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ für alle $t \in (0, T]$ der Gleichung (1) unter den Bedingungen (2) und (3).

In der vorliegenden Arbeit wird für die Gleichung (1) mittels B -Splines ein Galerkin-Verfahren konstruiert, das als eindimensionale Methode der finiten Elemente mit zeitstetigen Koeffizienten interpretiert werden kann. Dieser Zugang ist prinzipiell bekannt (vgl. [11]), wird im folgenden aber insbesondere unter den Aspekten der Approximation des konvektiven Termes, der Erzeugung erhöhter Approximationsordnungen und des Einflusses des Parameters ε untersucht, wobei es jedoch nicht gelang, im nichtlinearen, instationären Fall gleichmäßige Konvergenz bezüglich ε nachzuweisen. Weiterhin wird auf die Anwendung der Upwind-Technik bei Übergang zu einem Galerkin-Petrov-Verfahren hingewiesen, deren numerische Realisierung jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden ist.

2. Die schwache Formulierung der Aufgabe. Der Raum der Testfunktionen

Das Problem (1), (2) läßt sich in folgender Variationsformulierung schreiben: Gesucht ist eine Lösung $u \in \dot{W}^1_2(\Omega)$ für alle $t \in (0, T]$, so daß

$$(4) \quad -\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \frac{1}{2}\left(u^2, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varepsilon a(u, v)$$

für alle $v \in \dot{W}^1_2(\Omega)$ mit Randbedingungen $v(-1) = v(1) = 0$ erfüllt ist. Dabei bedeuten die Ausdrücke in (4) folgende Funktionale:

$$(5) \quad (\varphi, \psi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(x, t) \psi(x, t) dx.$$

$$(6) \quad a(\varphi, \psi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

$\dot{W}^1_2(\Omega)$ bezeichnet den Sobolevraum mit der Norm

$$\|\varphi\|_1 = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \varphi\|^2 \right\}^{1/2}, \quad \|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi).$$

Als endlichdimensionalen Unterraum der Testfunktionen von $\dot{W}^1_2(\Omega)$ wählen wir den Raum $V_h^p(\Omega)$, der durch B -Splines p -ter Ordnung mit minimalen lokalen Trägern aufgespannt wird. Wir approximieren die Funktion $u \in \dot{W}^1_2(\Omega)$ für alle $t \in (0, T]$ durch $u_h \in V_h^p$, wobei

$$(7) \quad u_h(x, t) = \sum_k c_k(t) \varphi^{(p)}\left(\frac{x}{h} - k\right),$$

h – Maschenweite der Ortsdiskretisierung (der Einfachheit halber wird ein gleichabständiges Netz gewählt), $c_k(t)$ – noch zu bestimmende Koeffizienten, $k \in \mathbb{N}$ mit $-N \leq k \leq N$, $Nh = 1$, gewählt wird. Die Funktionen $\varphi^{(p)}(x)$ sind B -Splines und werden wie folgt definiert (vgl. [10]).

Definition 1. Sei

$$\varphi^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2 \\ 0, & |x| \geq 1/2 \end{cases} \text{ und } p \in \mathbb{N}.$$

Dann heißt

$$\varphi^{(p)} = \varphi^{(0)} * \varphi^{(p-1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(0)}(\xi) \varphi^{(p-1)}(x - \xi) d\xi$$

B-Spline p-ter Ordnung. □

Für $p = 1, 2, \dots$ erhält man stückweise lineare, quadratische, ... Funktionen. Als Bezeichnung wählen wir $\varphi^{(p)}\left(\frac{x}{h} - k\right) = \varphi_k^{(p)}(x)$.

3. Die Approximation der Galerkin-Gleichungen

Mit dem Übergang zur schwachen Formulierung und zu endlichdimensionalen Unterräumen ist ein zeitstetiges Galerkin-Verfahren formuliert. Insbesondere bei kleinen Parametern ε ($\varepsilon \approx h$, h – Schrittweite der Ortsdiskretisierung) weist die Aufgabenstellung jedoch erhebliche numerische Schwierigkeiten auf. Vermerkt sei weiter, daß das nichtlineare, konvektive Glied in unterschiedlicher Weise behandelt werden kann.

Im einfachsten Fall kann für (1) eine Linearisierung längs gewisser Zeitschichten $t_n = \text{const.}$ benützt werden (Methode der "eingefrorenen" Koeffizienten, vgl. [12]). In diesem Falle ist eine Folge linearer Differentialgleichungen zu behandeln. Andere Möglichkeiten sind Linearisierungen der Koeffizientenfunktionen durch das Newtonverfahren und die Anwendung der Produktapproximation. Letztere Methode ist äquivalent zu einer Kollokationstechnik und wird ausführlicher betrachtet.

3.1. *Die Approximation des Diffusionsgliedes und des instationären Termes* erfolgt in klassischer Art und Weise. Es gelten folgende Aussagen.

Lemma 1. *Es gilt*

$$a(u_n^{(p)}, \varphi_l^{(p)}) = \sum_k c_k(t) d_{kl}^{(p)}, \quad l = -N, \dots, 0, 1, \dots, N,$$

wobei für $p = 1, 2$ die Koeffizienten folgende Werte annehmen:

$$d_{kl}^{(1)} = \begin{cases} -2/h, & l = k \\ 1/h, & l = k \pm 1 \\ 0, & |k - l| \geq 2 \end{cases}, \quad d_{kl}^{(2)} = \begin{cases} -1/h, & l = k \\ 1/3h, & l = k \pm 2 \\ 1/6h, & l = k \pm 1 \\ 0, & |l - k| \geq 3. \end{cases}$$

Lemma 2. Für den instationären Ausdruck gilt unter der Voraussetzung $c_k(t) \in C^1 \forall k$, $c'_k(t) = \frac{d}{dt} c_k(t)$:

$$\left(\frac{\partial u_h^{(p)}}{\partial t}, \varphi^{(p)} \right) = \sum_k c'_k(t) a_{kl}^{(p)}, \quad l \in [-N, N],$$

wobei

$$a_{kl}^{(1)} = \begin{cases} 4h/6, & l = k \\ h/6, & l = k \pm 1 \\ 0, & |l - k| \geq 2 \end{cases}, \quad a_{kl}^{(2)} = \begin{cases} 66h/120, & l = k \\ 26h/120, & l = k \pm 1 \\ h/120, & l = k \pm 2 \\ 0, & |l - k| \geq 3. \end{cases}$$

Beweis. Beide Lemmata werden durch elementares Ausrechnen der entsprechenden Skalarprodukte verifiziert. Man formt den oben angegebenen linksseitigen Ausdruck um und erhält:

$$d_{kl}^{(p)} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \varphi_k^{(p)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_l^{(p)}}{\partial x} dx, \quad a_{kl}^{(p)} = \int_{-1}^1 \varphi_k^{(p)}(x) \varphi_l^{(p)}(x) dx,$$

wobei $\varphi_m^{(p)} = \varphi^{(p)}\left(\frac{x}{h} - m\right)$, $m = -N, \dots, 0, 1, \dots, N$, $Nh = 1$ gilt. \square

Bemerkung. Die Darstellung der Koeffizienten gilt für innere Punkte des Netzes. Im Falle homogener Randbedingungen werden die Matrizen $A^{(p)} = [a_{kl}^{(p)}]$, $D^{(p)} = [d_{kl}^{(p)}]$, $k, l \in [-N, N]$, einfach durch „Abschneiden“ von jeweils p Randspalten erzeugt. Im Falle inhomogener Randbedingungen sind die entsprechenden Koeffizienten gesondert zu berechnen.

3.2. Die Approximation des konvektiven Gliedes führt auf Nichtlinearitäten in den Koeffizienten $c_k(t)$. Wir wollen aus Gründen der Zweckmäßigkeit für $u \frac{\partial u}{\partial x}$ die Divergenzdarstellung $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2)$ wählen, weil diese Form für die numerische Behandlung Vorteile bringt; eine Begründung findet man zum Beispiel in [13].

Lemma 3. Für innere Punkte des Konvektionstermes in divergenter Form gilt für $p = 1$

$$\left((u_h^{(1)})^2, \frac{\partial \varphi_k^{(1)}}{\partial x} \right) = \frac{1}{3} [c_{k+1}(c_k + c_{k+1}) - c_{k-1}(c_k + c_{k-1})],$$

sowie für $p = 2$

$$\left((u_h^{(2)})^2, \frac{\partial \varphi_k^{(2)}}{\partial x} \right) = \frac{1}{120} [c_{k+2}(2c_k + 7c_{k+1} + c_{k+2}) + c_{k+1}(62c_k + 31c_{k+1} +$$

$$+ 7c_{k-1}) + c_k(c_{k-2} + 31c_{k-1} - 31c_{k+1} - c_{k+2}) - c_{k-1}(62c_k + 31c_{k-1} + 7c_{k+1}) - \\ - c_{k-2}(2c_k + 7c_{k-1} + c_{k-2})].$$

Beweis. Wir zeigen den Hilfssatz nur für $p = 1$ und lassen aus Gründen der Übersichtlichkeit den Ordnungsindex p weg. In (7) wird der lineare B-Spline benutzt:

$$\varphi_k \left(\frac{x}{h} - k \right) = 1 - \frac{1}{h} |x - hk|, \quad x \in I_k = ((k-1)h, (k+1)h].$$

Außerhalb des Intervalls I_k verschwindet φ_k und folglich sind Integrale nur über Intervalle I_k zu erstrecken. Wird transformieren I_k auf $I = (-1, 1]$ und erhalten mit

$$\tilde{\varphi}_k(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in (-1, 0] \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \tilde{\varphi}_{k+1}(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 2-x, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_{k-1}(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1, 0] \\ x+2, & x \in (-2, -1] \end{cases}, \quad \text{den Ausdruck}$$

$$\left(u_h^{(2)}, \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x} \right) = \int_{-1}^1 \left(\sum_k c_k(t) \tilde{\varphi}_k \right)^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x} dx = \int_{-1}^1 (c_{k-1}^2 \tilde{\varphi}_{k-1}^2 + c_k^2 \tilde{\varphi}_k^2 + \\ + c_{k+1}^2 \tilde{\varphi}_{k+1}^2 + 2c_k c_{k-1} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{k-1} + 2c_k c_{k+1} \tilde{\varphi}_k \tilde{\varphi}_{k+1}) \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial x} dx = \\ = (-c_{k-1}^2 + c_{k+1}^2 - c_k c_{k-1} + c_k c_{k+1})/3.$$

Für $p = 2$ geht man analog vor, wobei sich entsprechend mehr Funktionen gegenseitig beeinflussen und das Integrationsintervall auf $((k-2)h, (k+2)h]$ zu erstrecken ist. \square

Die praktische Berechnung der Koeffizientenfunktionen $c_k(t)$ ist für die vollständige Gleichung unter Verwendung von Lemma 3 sehr aufwendig. Deshalb ist es praktisch empfehlenswert, eine Produktapproximation zu benutzen, die auf einer Äquivalenzaussage für Galerkin-, Kollokations- und Linienmethoden von Swartz und Wendroff [8] beruht. Grundlegende Idee ist die Ersetzung des Ausdrucks

$$\left(F \left(\sum_k c_k \varphi_k^{(p)} \right), \varphi_l^{(p)} \right) \text{ durch } \left(\sum_k F(c_k) \varphi_k^{(p)}, \varphi_l^{(p)} \right).$$

Eine detaillierte Untersuchung der Approximationseigenschaften dieser Ersetzung ist bei Christie [2] zu finden. Verwenden wir diese Resultate, so gilt das folgende

Lemma 4. Die Anwendung der Produktapproximation in der Form $(u_h^{(p)}(x, t))^2 = \sum_k (c_k(t))^2 \varphi_k^{(p)}(x)$ liefert für das konvektive Glied die Darstellung

$$\frac{1}{2} \left((u_h^{(p)})^2, \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \right) = \sum_k c_k^2(t) b_{kl}^{(p)}, \quad l \in [-N, N].$$

wobei die Koeffizienten für $p = 1, 2$ die Werte annehmen:

$$b_{kl}^{(1)} = \begin{cases} +1/4, & l = k+1 \\ -1/4, & l = k-1 \\ 0, & l = k, |l-k| \geq 2 \end{cases}, \quad b_k^{(2)} = \begin{cases} \pm 1/48, & l = k \pm 2 \\ \pm 10/48, & l = k \pm 1 \\ 0, & l = k, |l-k| \geq 3. \end{cases}$$

In der Darstellung der Koeffizienten $b_{kl}^{(2)}$ entsprechen in jeder Zeile jeweils obere und untere Vorzeichen einander, das heißt oberhalb der Hauptdiagonale stehen positive, unterhalb negative Koeffizienten.

Beweis. Wir erhalten

$$\left((u_h^{(p)})^2, \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \right) = \sum_k c_k^2 \left(\varphi_k, \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \right) = \sum_k c_k^2 \int_{-1}^1 \varphi_k \left(\frac{x}{h} - k \right) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} dx.$$

Die in Lemma 3 benutzte Transformation führt auf

$$b_{kl}^{(p)} = \int_{-1}^1 \varphi_k^{(p)} \left(\frac{x}{h} - k \right) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{\varphi}^{(p)}(\xi) \frac{\partial \tilde{\varphi}^{(p)}}{\partial \xi} d\xi,$$

wobei $\alpha = 1$ für $p = 1$ und $\alpha = 3/2$ im Falle $p = 2$ gilt. Das elementare Ausrechnen der Integrale führt auf die oben angegebenen Koeffizienten, wenn noch der Faktor $1/2$ berücksichtigt wird. \square

Nach diesen Vorbereitungen kann folgende zusammenfassende Aussage formuliert werden:

Satz 1. Die Näherungslösung der Burgersgleichung (1) unter den Rand- und Anfangsbedingungen (2), (3) werde mit einem Galerkin-Verfahren und Produktapproximation des konvektiven Gliedes in der Form (7) mit $u_h \in V_h^p$ gesucht, wobei als Basisfunktionen B-Splines p -ter Ordnung benutzt werden. Dann ergibt sich für ein gleichabständiges Netz in den Knotenpunkten x_k für alle k die Lösung $u_h(x_k, t)$ durch Quadratur des Anfangswertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(8) \quad A^{(p)} \frac{dU}{dt} = -B^{(p)} U^2(t) + \varepsilon D^{(p)} U(t)$$

$$U(0) = U_0 = (\dots, u_0(x_k), \dots)^T,$$

wobei $A^{(p)}, B^{(p)}, D^{(p)}$ die in den Lemmata 1, 2, 4, von der Ortsdiskretisierung h abhängenden Matrizen der Koeffizienten sind und $U(t) = (u_h(x_{-N}, t), \dots, u_h(x_0, t), \dots, u_h(x_N, t))^T$ Lösungsvektor in den Netzpunkten ist.

Beweis. Die Approximation der Glieder von Gleichung (1) erfolgt entsprechend der in den Lemmata 1, 2, 4 angegebenen Formeln. Es entsteht ein nichtlineares, gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die Koeffizientenfuntionen $c_k(t)$, $k = -N, \dots, 0, 1, \dots, N$. Wegen der Super-

positionseigenschaft der B -Splines in jedem Knotenpunkt (vgl. [10]) erhalten wir

$$(9) \quad c_k(t) = u_h(x_k, t) \stackrel{\text{def}}{=} U_k(t).$$

Die Funktion $U_k(t)$ fassen wir zu einem Vektor $U(t)$ der Dimension $2N+1$ zusammen, wobei wegen der Randbedingungen (2) die erste und letzte Komponente verschwindet. Die Anfangsbedingung in (8) ergibt sich unmittelbar durch Diskretisierung der Funktion $u_0(x)$ aus (3). \square

Bemerkung. Durch Fortsetzung auf den gesamten Raum $V_h^{(p)}$ ergibt sich eine stetige Näherungslösung.

4. Zu einigen Eigenschaften der konstruierten Schemata

Es gilt folgende Aussage für die Approximationsordnung bzgl. des Ortes des erzeugten semidiskreten Differentialgleichungssystems.

Satz 2. *Unter der Voraussetzung, daß die Lösung $u(x, t)$ des Anfangs-Randwertproblems (1), (2), (3) hinreichend glatt ist, approximiert das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (8) die Ausgangsgleichung (1) lokal mit der Ordnung $O(h^{2p+1})$ in den Diskretisierungspunkten x_k für $p = 1, 2$, und für $t \in (0, T]$.*

Beweis. Wir führen für (1) die Operatorschreibweise

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

ein und entwickeln das Gleichungssystem (8) mit der Kurzbezeichnung $L_h^{(p)}(U) = 0$ bezüglich $U_k \cong u(x_k, t)$ in eine Taylorreihe nach x (die ausführliche Darlegung vgl. man in [5]). Dann gilt $L_h^{(p)}(U) - P_h L(u)|_{x=x_k} = O(h^{2p+1})$ für alle inneren Werte $k \in (-N, N)$ und $p = 1, 2$; P_h bezeichnet den Projektor auf Netzpunkte der Ortsdiskretisierung. \square

Bemerkung. Die diskrete Approximation der Skalarprodukte in den Matrizen $A^{(p)}, B^{(p)}, D^{(p)}$ liefert formal in der Approximationsordnung eine h -Potenz mehr als ein vergleichbares klassisches Differenzenverfahren (Multiplikation der Ausgangsgleichungen mit dem Parameter h).

Für numerische Anwendungen ist der Nachweis der Konvergenz der Verfahren erforderlich. In der Theorie numerischer Verfahren wird gezeigt, daß aus den Eigenschaften „Stabilität“ und „Approximation“ die Konvergenz der Näherungslösung gegen die analytische Lösung folgt. Für nichtlineare Gleichungen sind derartige Aussagen nur in Spezialfällen möglich. Im folgenden soll die Stabilität des Systems (8) diskutiert werden.

Chin et al. [1] erhalten für die Galerkin-Approximation des hyperbolischen Problems (1) (d. h. für $\varepsilon = 0$) die Aussage, daß ein daraus entstehendes numerisches Verfahren instabil in dem Sinne ist, daß für jedes fest gewähltes h eine periodische Funktion $u_0(x)$ mit $\max |u_0| = \delta$ existiert, so daß die Lösungen der Galerkingleichungen gegen Unendlich gehen mit $t \rightarrow 2h\alpha/|\beta|\delta$. Hierbei sind α, β durch das Verfahren fixierte Konstanten.

Dieses Resultat läßt sich auch mittels der Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten. Dazu wird das System

$$A^{(p)}\dot{U}(t) = B^{(p)}U^2(t), \quad \dot{U} = \frac{dU}{dt}$$

umgeformt in

$$(10) \quad \dot{U}(t) = (A^{(p)})^{-1}B^{(p)}U^2(t) = \tilde{B}^{(p)}U^2(t),$$

was wegen der Regularität von $A^{(p)}$ für alle p immer möglich ist. Da $A^{(p)}$ symmetrisch, $B^{(p)}$ aber schiefsymmetrisch ist, wird $\tilde{B}^{(p)}$ ebenfalls eine schiefsymmetrische Matrix sein, die folglich rein imaginäre Eigenwerte besitzt. Linearisieren wir (10) durch Bildung des Jacobians, so entsteht das System

$$(11) \quad \dot{U}(t) = 2\tilde{B}^{(p)}U(t).$$

Alle Elemente von $\tilde{B}^{(p)}$ sind proportional zu $(1/h)$ und damit auch die Eigenwerte dieser Matrix; folglich wird das lineare Differentialgleichungssystem (11) oszillierende Lösungen besitzen, die mit $h \rightarrow 0$ über alle Grenzen wachsen.

Mit $\varepsilon > 0$ wirkt der glättende Einfluß der parabolischen Differentialgleichung und die Eigenwerte des Jacobians rücken von der imaginären Achse der komplexen Zahlenebene weg in deren linke Halbebene hinein. Numerische Tests haben ergeben, daß für $\varepsilon > h/10$ gute Resultate auch bei steilen Gradienten der Lösung zu erzielen sind. Oszillationen in der Umgebung „fast unstetiger“ Lösungen in einzelnen Punkten liegen unter 5% der Sprunghöhe. Eine Vergrößerung des Verhältnisses ε/h bringt weitere Glättung, allerdings auch eine stärkere Verschmierung der Unstetigkeit über mehrere Gitterpunkte hinweg.

Die sich aus der Linearisierung des System (8) mit $\varepsilon > 0$ ergebende Stabilität der Lösung liefert gemeinsam mit der Approximationsaussage nach Satz 2 die Konvergenz des Verfahrens für $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = O(h)$, und stückweise zweimal stetig differenzierbare Lösungen.

5. Die Lösung des Anfangswertproblems

Für das Cauchy-Problem (8) existieren zahlreiche, hinreichend weit automatisierte Algorithmen, die zuverlässig arbeiten und eine Kontrolle des lokalen Diskretisierungsfehlers bzgl. fortschreitender Zeitschichten beinhalten. Während für semidiskretisierte parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen teilweise von verschiedenen Autoren spezielle Methoden konstruiert wurden, nutzen wir die auf Hindmarsh [7] zurückgehende Variante von Adams- und Gear-Formeln für nichtsteife bzw. steife Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der ökonomischen Nordsieck-Speicherung zurückliegender Zeitschichten. Bei dem Problem (8) kommt hinzu, daß es sich um ein implizites System handelt. An der TH Karl-Marx-

Stadt liegt ein Programmpaket zur Lösung von Anfangswertaufgaben der Form

$$(12) \quad \begin{cases} A(y)y'(t) = f(t, y), \det \{A(y)\} \neq 0 \quad \forall y \\ y(0) = y_0, y = (y_1, \dots, y_N)^T \end{cases}$$

für ESER-Rechenanlagen vor, das automatisch Steuerungen von Schrittweiten und Verfahrensordnungen auf der Grundlage von Schätzungen des Diskretisierungsfehlers im Vergleich mit vorgegebenen Genauigkeitsforderungen vornimmt [6].

Numerische Tests zur Lösung des Systems (8) mit 100 und 200 Teilpunkten für das Intervall $[-1, 1]$ und ε -Werten zwischen $5h$ und $10^{-3}h$ zeigten, daß die Adams-, aber auch die Gear-Verfahren zuverlässig arbeiten, die Algorithmen Verfahrensordnungen bis maximal 5 auswählen und die Gear-Methoden geringfügig höhere Rechenzeiten (ca. 10%) benötigen.

6. Numerische Beispiele

Wir wählen für das Problem (1), (2), (3) die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2} (x+1) \right); \quad x \in (-1, 1),$$

und den Parameter $\varepsilon = 10^{-2}$ und lösen die Aufgabe für $t \leq T = 0.1$. Die analytische Lösung dieses Problems ist über Reihenentwicklungen von Besselfunktionen angebar (vgl. Cole [3]) und erfüllt in dem betrachteten Gebiet die Glattheitsforderungen des Satzes 2. Für $\tilde{N} = 20$ Teilpunkte des Intervalles $[-1,1]$ und $p = 1$ ergeben sich folgende Zahlenwerte für die Lösung nach Tabelle 1.

Tabelle 1

($\varepsilon = 10^{-2}$, $p = 1$, $t = T = 0.1$, $\tilde{N} = 20$, $h = 0.1$)

x_k	$u(x_k, T)$	$U_k(T)$	$(u(x_k, T) - U_k(T)) \cdot 10^3$
-1,0	0	0	-
-0,8	0,2358	0,2366	-0,8
-0,6	0,4611	0,4590	+2,1
-0,4	0,6641	0,6602	+3,9
-0,2	0,8316	0,8262	+5,4
0,0	0,9471	0,9410	+6,1
0,2	0,9899	0,9839	+6,0
0,4	0,9341	0,9295	+4,6
0,6	0,7517	0,7501	+1,6
0,8	0,4283	0,4312	-2,9
1,0	0	0	-

Für praktische Anwendungen ist der Fall unstetiger Anfangsbedingungen interessant, der mit Satz 2 nicht erfaßt wird. In Teilintervallen, wo ausreichende Glattheit vorliegt oder durch den Einfluß des Diffusionstermes erzeugt wurde, kann er wegen seiner lokalen Gültigkeit jedoch angewendet werden.

Wir betrachten wieder das Problem (1), (2), (3) mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/2 \\ 1/2, & |x| = 1/2. \\ 1, & |x| < 1/2 \end{cases}$$

Für $\varepsilon = 0$ ist die analytische Lösung der Aufgabe bekannt. Nach rechts läuft eine Stoßwelle mit der Sprunghöhe $u(\xi - 0, t) - u(\xi + 0, t) = 1$; nach links setzt sich eine Verdünnungswelle fort, deren Berechnung weniger kritisch ist. Die Rechnung wird abgebrochen, bevor die Wellen die Randpunkte erreichen. Wir setzen $\tilde{N} = 2N$ und arbeiten über $[-1, 1]$ mit $\tilde{N}_1 = 100$ und $\tilde{N}_2 = 200$ Punkten. Als Endzeit wählen wir $T = 0.4$. Einige Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Tabelle 2

$(\tilde{N} = 100)$				
ε/h	Anzahl d. Schritte des AWA-Solvers für $[0, T]$	Anzahl der Funktionsaus- wertungen	Oszillationen in Stoßnähe (in %)	CPU-Zeit* (in sec.)
1,0	78	159	0,1	18,2
0,25	100	155	0,5	23,0
0,05	101	150	13,0	24,8
0,01	154	186	24,6	32,1

* Rechenanlage EC 1040 der TH Karl-Marx-Stadt, Programmierung in FORTRAN, alle REAL-Variablen in DOUBLE PRECISION, optimierender Compiler IFEAAB, Geforderte relative Genauigkeit: $\delta = 10^{-6}$.

Für kleine Werte ε zeigt das Testproblem Grenzschicht-Verhalten, die Oszillationen sind auf die in dem vierten Teil beschriebenen Instabilitäten zurückzuführen. Örtliche Netzverfeinerungen sind möglich, aber nicht unbedingt zu empfehlen [4]. Im allgemeinen sind bei praktischen Problemen die apriori-Verteilungen von Unstetigkeiten und sich schroff ändernden Gradienten der Lösung auch nicht bekannt, so daß Netzveränderungen automatisch durch den Algorithmus erzeugt werden müßten. Dabei steigt der Realisierungsaufwand erheblich an.

Eine andere Möglichkeit zur Dämpfung von Oszillationen in der Umgebung steil abfallender Funktionswerte ist der Übergang zu anderen Modellgleichungen. In [1] wird die Behandlung der Ersatzgleichung

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(1 + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

vorgeschlagen, die für $\eta = 0$ in Gleichung (1) übergeht. Eine solche Gleichung kann als Differentialapproximation (Shokin [14]) gewisser Differenzenschemata mit künstlicher Approximationszähigkeit aufgefaßt werden. Numerische Tests ergaben, daß bei der Wahl $\eta \approx \varepsilon$ für $\varepsilon/h = 10^{-2}$ die Oszillationen auf etwa 5% gesenkt werden.

Schließlich wird in numerischen Verfahren für komplizierte Strömungsverläufe mit Erfolg die sogenannte *Upwind-Technik* benutzt. Für das vorliegende Verfahren kann diese Technik zum Beispiel durch Übergang zu einem Galerkin-Petrov-Verfahren (vgl. z.B. [11]) realisiert werden, wobei als Testfunktionen um den Parameter α verschobene *B-Splines* p -ter Ordnung der Form

$$\varphi_{k,\alpha}^{(p)} = \varphi^{(p)} \left(\frac{x}{h} - k - \alpha \right), \alpha \in (-1, 1),$$

eingesetzt werden. Die Approximationsordnung der Verfahren fällt dabei für $p = 1$ und 2 bei geringeren Forderungen an die Glattheit der Lösung auf $O(h)$ für $\alpha \neq 0$ ab. Die Elemente in den Matrizen $A^{(p)}$, $B^{(p)}$, $D^{(p)}$ sind zusätzlich von dem Parameter α abhängig, ihre Struktur wird komplizierter. Auf die Angabe der Koeffizienten wird hier verzichtet, einige Beispiele sind in [5] angegeben. Prinzipiell sind dabei Ausdrücke der Form

$$a(u_h^{(p)}, \varphi_{l,\alpha}^{(p)}), \left(\frac{\partial u_n^{(p)}}{\partial t}, \varphi_{l,\alpha}^{(p)} \right), \left((u_h^{(p)})^2, \frac{\partial \varphi_{l,\alpha}}{\partial x} \right)$$

zu berechnen. Die Wahl des Upwind-Parameters α erfolgt derzeit noch nach empirischen Gesichtspunkten, wobei in Gebieten hoher Glattheit $\alpha = 0$ zu empfehlen ist. Für $\alpha \geq 1/2$ wird dagegen eine gute Glättung numerisch bedingter Oszillationen erreicht.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Chin R. C. Y., Hedstrom G. W. and Karlsson K. E.: A simplified Galerkin method for hyperbolic equations. *Math. Comp.* **33** (146) (1979), 647 – 658.
- [2] Christie I., Griffiths D. F., Mitchell A. R. and Sanz-Serna J. M.: Product approximation for non-linear problems in the finite-element method. *IMA Journ. Num. Anal.* **1** (3) (1981), 253 – 266.
- [3] Cole J. D.: On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Maths.* **9** (3) (1951), 225 – 236.
- [4] Doolan E. P., Miller J. J. H. and Schilders W. H. A.: Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. Boole Press, Dublin, 1980.
- [5] Dressel U.: Numerische Untersuchungen zur Lösung der Burgers-Gleichung. Interner Bericht. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1982.
- [6] Fröhner M.: Software für Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wissenschaftliche Informationen der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, Arbeitsmaterial 3/1985.

- [7] *Fröhner M. und Dressel U.*: Zur Berechnung instationärer, anisentroper Fadenströmungen kompressibler Medien mit der Methode der finiten Elemente. *WZ der TH Karl-Marx-Stadt* 23 (4) (1981), 375–381.
- [8] *Hindmarsh A. C. and Gear C. W.*: Ordinary differential equation system solver. Lawrence Livermore Laboratory Report Nr. 592.
- [9] *Swartz B. and Wendroff B.*: The relation between the Galerkin and collocation methods using smooth splines. *SIAM J. Numer. Analysis* 11 (1974), 994–996.
- [10] *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И. и Мирошниченко В. Л.*: Методы сплайн-функций. Наука, Москва, 1980.
- [11] *Марчук Г. И. и Агошков В. И.*: Введение в проекционно-сеточные методы. Наука, Москва, 1981.
- [12] *Самарский А. А.*: Теория разностных схем. Наука, Москва, 1977.
- [13] *Самарский А. А. и Попов Ю. П.*: Разностные методы газовой динамики. Наука, Москва, 1980.
- [14] *Шокин Ю. И.*: Метод первого дифференциального приближения. Наука, Новосибирск, 1979.