РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ НЕДОГРЕТОЙ ЖИДКОСТЬЮ В РЕЖИМЕ ПЛЕНОЧНОГО КИПЕНИЯ

Ф. ШЮТТЕ

Technische Hochschule „Otto von Guericke", 3040 Magdeburg,
Boleslaw Bierut Platz 5, DDR

(Поступило 20 марта 1983)

1. Введение. Специфика задач обтекания тел жидкостью при пленочном кипении обусловлена тем, что граница раздела фаз, на которой должны выполняться законы сохранения, является заранее неизвестной поверхностью, форма которой определяется в процессе решения задачи. К настоящему времени имеется ряд работ, в которых в рамках теории пограничного слоя решены некоторые задачи внешнего обтекания тел несжимаемой жидкостью при пленочном кипении (обзор см. [2]). Существенным моментом постановок этих задач является доопределение границы раздела фаз с привлечением дополнительных гипотез. Рассматривались задачи с автомодельными или локально-автомодельными решениями.

В настоящей работе предлагается обобщение известного в теории пограничного слоя методов интегральных соотношений (см. [1]) на случай наличия внутри пограничного слоя поверхности разрыва. С помощью этого метода становится возможным решить задачи пленочного кипения без привлечения дополнительных гипотез о форме поверхности раздела фаз. В частности, этот метод позволяет построить неавтомодельные решения. Преимущество метода интегральных соотношений состоит, кроме того, в том, что в результате применения этого метода получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые несмотря на их сложную структуру относительно легко поддаются численному решению на ЭВМ с помощью стандартных подпрограмм. В некоторых случаях удается решить эти уравнения даже аналитически [2].

Как пример рассмотрим неавтомодельную задачу обтекания конечной плоской пластины.

2. Постановка задачи. Рассмотрим стационарную задачу продольного обтекания конечной плоской пластины недогретой несжимаемой жидкостью при пленочном кипении. Скорость, давление и температура во «внешней» области течения считаются постоянными.

Находится неавтомодельное решение в следе за пластиной. Начальные условия на задней кромке пластины определяются из аналитического приближенного решения задачи обтекания полубесконечной плоской пластины [2] при $x = L$ (L — длина пластины).

Течение за задней кромкой пластины описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0,\\
&u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \nu_i \frac{\partial_2 u_i}{\partial y^2},\\
&u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{\lambda_i}{\varrho_i c_{pi}} \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}.
\end{aligned}
\right\} \quad i = L, V. \tag{1}
$$

Здесь u и v — продольная и поперечная составляющие скоростей, T — температура, ν — кинематическая вязкость, λ — коэффициент теплопроводности, ϱ — плотность и c_p — удельная теплоемкость. Индекс L означает жидкость, V — пар. К этой системе уравнений присоединяются граничные условия

$$
\begin{aligned}
&y = 0: \quad v_V = \frac{\partial u_V}{\partial y} = \frac{\partial T_V}{\partial y} = 0, \quad \text{(условия симметрии)}.\\
&y \to \infty: \quad u_L \to U_\infty, \; T_L \to T_\infty.
\end{aligned} \tag{2}
$$

На поверхности раздела фаз должны выполняться законы сохранения массы, импульса и энергии. В приближении теории пограничного слоя получим следующие соотношения (см. [2])

$$
\begin{aligned}
y = h: \quad &\varrho_V \left(u_V \frac{dh}{dx} - v_V \right) = \varrho_L \left(u_L \frac{dh}{dx} - v_L \right),\\
&u_V = u_L,\\
&\mu_V \frac{\partial u_V}{\partial y} = \mu_L \frac{\delta u_L}{\delta y},\\
&\varrho_V l \left(u_V \frac{dh}{dx} - v_V \right) = \lambda_L \frac{\delta T_L}{\delta y} - \lambda_V \frac{\delta T_V}{\delta y},\\
&T_V = T_L = T_S.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Здесь l — теплота парообразования, μ — динамическая вязкость, T_S — температура насыщения на межфазной поверхности.

3. Метод решения. Прежде чем перейти к решению задачи (1–3), приведем интегральные соотношения импульса и притока тепла. Будем исходить из уравнений (1) и следующих граничных условий

$$y = 0:\quad v_V = \frac{\partial u_V}{\partial y} = \frac{\partial T_V}{\partial y} = 0,\quad y = h:\ u_V = u_L = u_S,\quad T_V = T_L = T_S,$$

(4)

$$y = \delta:\ u_L = U_\infty,\ \frac{\partial u_L}{\partial y} = 0,\qquad y = \delta_r:\ T_L = T_\infty,\quad \frac{\partial T_L}{\partial y} = 0.$$

Здесь $h = h(x)$ – толщина парового слоя, $\delta = \delta(x)$ – граница вязкого пограничного слоя в жидкости, $\delta_r = \delta_r(x)$ – граница температурного пограничного слоя в жидкости. Интегрирование уравнений неразрывности (1) по y дает выражения для поперечных составляющих скоростей

$$v_{L,V}(x, y) = v_{L,V}(x, y_1) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u_{L,V}}{\partial x} dy.$$

Проинтегрируем второе уравнение [1] для жидкости по y от $y = h$ до $y = \delta$, третье уравнение [1] для жидкости по y от $y = h$ до $y = \delta_r$ и второе и третье уравнения [1] для пара по y от $y = 0$ до $y = h$, учитывая граничные условия (4). После несложных выкладок получим искомые интегральные соотношения

$$\frac{d}{dy}\int_h^{\delta} u_L(U_\infty - u_L)dy + (U_\infty - u_S)\left(u_L\frac{dh}{dx} - v_L\right)\Bigg|_h = v_L\frac{\partial u_L}{\partial y}\Bigg|_h,$$

$$\frac{d}{dx}\int_h^{\delta_r} u_L(T_L - T_\infty)dy + (T_S - T_\infty)\left(u_L\frac{dh}{dx} - v_L\right)\Bigg|_h = -\frac{\lambda_L}{\varrho_L c_{p_L}}\frac{\partial T_L}{\partial y}\Bigg|_h,$$

(5)
$$\frac{d}{dx}\int_0^{h} u_V^2 dy - u_S\left(u_V\frac{dh}{dx} - v_V\right)\Bigg|_h = v_V\frac{\partial u_V}{\partial y}\Bigg|_h,$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h} u_V(T_V - T_\infty)dy - T_S\left(u_V\frac{dh}{dx} - v_V\right)\Bigg|_h = \frac{\lambda_V}{\varrho_V c_{p_V}}\frac{\partial T_V}{\partial y}\Bigg|_h.$$

Для интегрирования уравнений неразрывности (1) введем функции тока $\Psi_L(x, y)$ и $\Psi_V(x, y)$, т.е. примем, что

(6)
$$u_i = \frac{1}{\varrho_i}\frac{\partial \Psi_i}{\partial y},\quad v_i = -\frac{1}{\varrho_i}\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}\qquad (i = L, V).$$

Далее введем их безразмерные формы $f(x, \eta)$ и $\varphi(x, \xi)$ и безразмерные переменные η и ξ в виде

$$(7)\qquad f(x,\eta) = \frac{\Psi_L(x,y)}{\varrho_L U_\infty(\varrho-h)}, \quad \eta = \frac{y-h}{\delta-h}; \quad \varphi(x,\xi) = \frac{\Psi_V(x,y)}{\varrho_V U_\infty h}, \quad \xi = \frac{y}{h}.$$

Безразмерные функции температуры для жидкости $F(x, \eta_r)$ и пара $\Theta(x, \xi)$ определим следующим образом

$$(8)\qquad F(x,\eta_r) = \frac{T_L - T_\infty}{T_S - T_\infty}, \quad \eta_r = \frac{y-h}{\delta_r - h}; \quad \Theta(x,\xi) = \frac{T_V - T_S}{T_W - T_S}.$$

Здесь T_W — температура на поверхности пластины.

Как обычно в теории интегральных соотношений безразмерные функции тока и температуры находятся в виде полиномов. Чтобы удовлетворялись граничные условия, предполагаются для распределения скоростей и температуры полиномы третьей степени для жидкости и четвертой стенени для пара, т. е. принимается, что

$$(9)\qquad \begin{aligned} f(x,\eta) &= a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4, \\ F(x,\eta_r) &= b_0 + b_1\eta_r + b_2\eta_r^2 + b_3\eta_r^3, \\ \varphi(x,\xi) &= c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 + c_5\xi^5, \\ \Theta(x,\xi) &= d_0 + d_1\xi + d_2\xi^2 + d_3\xi^3 + d_4\xi^4. \end{aligned}$$

Коэффициенты в (9) определяются из граничных условий (2), условий на межфазной поверхности (3) и «контурных» связей

$$(10)\qquad \begin{aligned} &y=0:\quad u_V\frac{\partial u_V}{\partial x} = \nu_V\frac{\partial^2 u_V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u_V}{\partial y^3} = 0, \quad y=\delta:\quad \frac{\partial u_L}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_L}{\partial y^2} = 0, \\ &u_V\frac{\partial T_V}{\partial x} = \frac{\lambda_V}{\varrho_V c_{pV}}\frac{\partial^2 T_V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 T_V}{\partial y^3} = 0, \quad y=\delta_r:\quad \frac{\partial T_L}{\partial y} = \frac{\partial^2 T_V}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Введя безразмерные функции k, $\bar{h}$ и r

$$(11)\qquad k = \frac{R}{N}\frac{(\delta-h)}{h}, \quad \bar{h} = \frac{h}{L}\sqrt{Re_V}, \quad r = \frac{\delta_r - h}{\delta - h} = \frac{\eta}{\eta_r},$$

где $R = (\varrho_V\mu_V/\varrho_L\mu_L)^{0,5}$, $N = \varrho_V/\varrho_L$ и $Re_V = U_\infty L/\nu_V$ — число Рейнольдса для пара, и безразмерные независимые переменные

$$(12)\qquad y' = y/L, \quad x' = x/L,$$

и подставляя (6) и (8) с учетом (7), (9), (11) и (12) в (2), (3) и (10) получим следующие выражения для безразмерных функций тока и температуры

$$(13)\qquad \begin{aligned} f(x',\eta) &= a_0 + a_1\eta + (a_1 - 1)\left(-\frac{3}{2}\eta^2 + \eta^3 - \frac{1}{4}\eta^4\right), \\ F(x',\eta_r) &= 1 - 3\eta_r + 3\eta_r^2 - \eta_r^3, \\ \varphi(x',\xi) &= c_1\xi + c_3\xi^3 + c_5\xi^5, \\ \Theta(x',\xi) &= d_0 + d_2\xi^2 + d_4\xi^4, \end{aligned}$$

где

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\left(1+2c_3Rk+\frac{4}{3}c_1Rk\right)}{\left(1+\frac{4}{3}Rk\right)},\\
a_0 &= \frac{R}{5k}\,\frac{\left(1+c_3\left(2+\frac{14}{3}Rk\right)+c_1\left(4+\frac{20}{3}Rk\right)\right)}{\left(1+\frac{4}{3}Rk\right)},\\
c_5 &= \frac{1}{5}\,\frac{(1-c_3(3+2Rk)-c_1)}{\left(1+\frac{4}{3}Rk\right)},\\
c_3 &= \frac{1}{6}\bar{h}^2c_1c_1',\\
d_2 &= \frac{1}{2}\bar{h}Pr_Vc_1d_0', \qquad d_4 = -d_2-d_0.
\end{aligned}
$$

Как видно из (13) и (14) совокупность свободных коэффициентов определяется с точностью до двух неизвестных коэффициентов c_1 и d_0, которые представляют собой значения безразмерных скорости и температуры пара на оси симметрии $y = 0$. Вместе с неизвестными функциями k, $\bar{h}$ и r они должны определяться из системы дифференциальных уравнений, которую нам дают интегральные соотношения (5) и уравнение сохранения энергии на межфазной поверхности (3).

Подставляя (6) и (8) с учетом (13) и (14) в (5) и четвертое соотношение (3) и вводя вспомогательные функции

$$
(15)\qquad p = c_1', \quad q = d_0',
$$

мы получим в результате несложных выкладок систему семи обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения семи неизвестных функций

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
k\bar{h}^2\left(\gamma+k\frac{\partial\gamma}{\partial k}\right)k'+k^2\bar{h}\left(\gamma+\bar{h}\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{h}}\right)\bar{h}'+k^2\bar{h}^2\frac{\partial\gamma}{\partial p}p' &= A_1,\\
k\bar{h}^2\left(a_0+k\frac{\partial a_0}{\partial k}\right)k'+k^2\bar{h}\left(a_0+\bar{h}\frac{\partial a_0}{\partial\bar{h}}\right)\bar{h}'+k^2\bar{h}^2\frac{\partial a_0}{\partial p}p' &= A_2,\\
\bar{h}^2\frac{\partial\beta}{\partial k}k'+\bar{h}\left(\beta+\bar{h}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{h}}\right)\bar{h}'+\bar{h}^2\frac{\partial\beta}{\partial p}p' &= A_3,\\
\bar{h}^2\frac{\partial\alpha}{\partial k}k'+\bar{h}\left(\alpha+\bar{h}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{h}}\right)\bar{h}'+\bar{h}^2\frac{\partial\alpha}{\partial p}p'+\bar{h}^2\frac{\partial\alpha}{\partial q}q' &= A_4,\\
k\bar{h}^2r\left(H+k\frac{\partial H}{\partial k}\right)k'+k^2\bar{h}r\left(H+\bar{h}\frac{\partial H}{\partial\bar{h}}\right)\bar{h}'+k^2\bar{h}^2r\frac{\partial H}{\partial p}p'+k^2\bar{h}^2\left(H+r\frac{\partial H}{\partial r}\right)r' &= A_5,\\
c_1' = p, \quad d_0' &= q,
\end{aligned}
$$

где

$$A_1 = -k^2\bar{h}^2\frac{\partial\gamma}{\partial c_1}p-(a_1-1)\left(3+\frac{3P_L}{r}+(2d_2+4d_4)RkP_V\right),$$

$$A_2 = -k^2\bar{h}^2\frac{\partial a_0}{\partial c_1}p-\left(\frac{3P_L}{r}+(2d_2+4d_4)RkP_V\right),$$

(17) $$A_3 = -\bar{h}^2\frac{\partial\beta}{\partial c_1}p-a_1\left(\frac{3P_L}{Rkr}+(2d_2+4d_4)P_V\right)+6c_3+20c_5,$$

$$A_4 = -\bar{h}^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial c_1}p+\frac{\partial\alpha}{\partial d_0}q\right)+\frac{1}{Pr_V}(2d_2+4d_4),$$

$$A_5 = -k^2\bar{h}_r^2\frac{\partial H}{\partial c_1}p+\frac{3}{r}\left(P_L+\frac{1}{Pr_L}\right)+(2d_2+4d_4)RkP_V,$$

и

$$\gamma = \int_0^1 f'(1-f')d\eta = -\frac{1}{7}(a_1-1)\left(a_1+\frac{3}{4}\right) = \gamma(k,\bar{h},c_1,p),$$

$$\beta = \int_0^1 \varphi'^2 d\xi = c_1^2+2c_1c_3+\frac{9}{5}c_3^2+2c_1c_5+\frac{30}{7}c_3c_5+\frac{25}{9}c_5^2 =$$

$$= \beta(k,\bar{h},c_1,p),$$

(18) $$H = \int_0^1 f'(\eta)F(\eta_r)d\eta_r = \frac{a_1}{4}+(a_1-1)\left(-\frac{3}{20}r+\frac{1}{20}r^2-\frac{1}{140}r_3\right)$$

при $r<1$,

$$= \frac{1}{4}+(a_1-1)\left(\frac{1}{4r}-\frac{3}{20r^2}+\frac{1}{20r^3}-\frac{1}{140r^4}\right)$$

при $r>1$

$$= H(k,\bar{h},c_1,p,r),$$

$$\alpha = \int_0^1 \varphi'\Theta d\xi = c_1d_0+\frac{1}{3}(c_1d_2+3c_3d_0)+\frac{1}{5}(c_1d_4+3c_3d_2+5c_5d_0)+$$

$$+\frac{1}{7}(3c_3d_4+5c_5d_2)+\frac{5}{9}c_5d_4 =$$

$$= \alpha(k,\bar{h},c_1,p,d_0,q).$$

Здесь введены безразмерные параметры задачи

$$(19)\qquad P_V = \frac{c_{pV}(T_W - T_S)}{lPr_V}, \quad P_L = \frac{c_{pL}(T_S - T_\infty)}{lPr_L},$$

где $Pr = c_p\mu/\lambda$ – число Прандтля. В настоящей работе принимается, что $Pr_L = Pr_V = 1$.

Начальные значения функций k, $\bar{h}$, p, q, c_1, d_0 и r при $x' = 1$ определим из параметров течения для обтекания полубесконечной плоской пластины при $x = L$ (см. [2]). При этом предполагается что распределения скоростей $f(x', \eta)$ и температуры $F(x', \eta_r)$ в жидкости не претерпевают разрыв при $x' = 1$. Тогда коэффициенты полиномов $f(x', \eta)$, $F(x', \eta_r)$ и $\varphi(x', \xi)$ в (13) однозначно определяются. Коэффициенты полинома для температуры пара $\Theta(x', \xi)$ определяютя из условий подобия распределений продольной составляющей скорости и температуры пара ($Pr_V = Pr_L = 1$) и условия, что первая производная от безразмерной функции температуры пара на межфазной поверхности является непрерывной функцией. В результате получаются следующие начальные условия для неизвестных функций системы (16)

$$(20)\qquad \begin{gathered} x' = 1: \quad \bar{h} = \sqrt{Z_0}, \quad k = k_0, \quad p = \frac{12}{Z_0}, \quad q = -\frac{12}{Z_0}\left(1 + \frac{Rk_0}{3}\right), \\ c_1 = \frac{3}{16\left(1 + \frac{Rk_0}{3}\right)}, \quad d_0 = \frac{13}{16}, \quad r = 1, \end{gathered}$$

где k_0 и Z_0 определяются из следующих соотношений

$$(21)\qquad \begin{gathered} k_0^3 + \left(\frac{7}{R} - \frac{3P_L}{P_V R}\right)k_0^2 + \left(14 - 21\frac{P_L}{R^2 P_V}\right)k_0 - \frac{42}{P_V R}(P_L + 1) = 0, \\ Z_0 = 4\left(P_V - \frac{3P_L}{Rk_0}\right)\left(1 + \frac{Rk_0}{3}\right). \end{gathered}$$

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16) с начальными условиями (20) следует провести до некоторого значения x'_A, при котором продольная составляющая скорости и температура пара становятся постоянными и достигают соответственно значений U_∞ и T_S ($\varphi'_\xi(x', \xi) \equiv 1$, $\Theta(x', \xi) \equiv 0$). Из (14), (13), (7) и (6) получим, что при $x' \geq x'_A$

$$(22)\qquad u_L = u_V = U_\infty, \quad v_L = U_\infty(1 - N)\frac{dh}{dx}, \quad v_V = 0.$$

Таким образом, при $x' \geq x'_A$ пар движется как твердое тело внутри жидкости вдоль оси симметрии. Если жидкость насыщенная ($T_\infty = T_S$), то паровой слой сохраняет постоянную толщину и уходит в бесконечность. Если жидкость недогретая ($T_\infty < T_S$), то пар конденсируется. Область, заполненная паром, при этом имеет конечную протяженность.

Из (1–3) и (22) получим, что течение при $x' \geq x'_A$ описывается только двумя дифференциальными уравнениями

$$U_\infty \frac{\partial T_L}{\partial x} + U_\infty (1-N)\frac{dh}{dx}\frac{\partial T_L}{\partial y} = \frac{\lambda_L}{\varrho_L c_{p_L}} \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2},$$
$$\varrho_V U_\infty 2 \frac{dh}{dx} = \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial y}\bigg|_{y=h}, \tag{23}$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} y &= h: & T_L &= T_S, \\ y &\to \infty: & T_L &\to T_\infty, \\ x &= x'_A \cdot L: & h &= h_A, \quad \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dx}\bigg|_A . \end{aligned} \tag{24}$$

Задача (23–24) при $P_L << 1$ (что на практике почти всегда выполняется) решается аналитически. Распределение температуры жидкости и толщина парового слоя определяются выражениями

$$T_L = T_\infty + (T_S - T_\infty)\left(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{y-h}{a}} e^{-t^2} dt\right), \tag{25}$$

где

$$a = \frac{2L}{|\sqrt{Pr_L Re_L}} \sqrt{\frac{x - x_A}{L} + \frac{Pr_L^3}{9\pi}(k\bar{h}r)_A^2},$$

и

$$h = \frac{L}{\sqrt{Re_V}}\left(\bar{h}_A + \frac{2}{3}\frac{P_L Pr_L^2}{\pi R}(k\bar{h}r)_A\left(1 - \sqrt{1 + \frac{9\pi(x - x_A)}{L Pr_L^3 (k\bar{h}r)_A}}\right)\right). \tag{26}$$

В частности, для определения точки x'_L в которой толщина парового слоя обращается в нуль, получается следующая формула

$$x'_L = x'_A + \frac{(k\bar{h}r)_A}{3}\left(\bar{h}_A \frac{R}{P_L}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\bar{h}_A \frac{R}{P_L}\right)^2. \tag{27}$$

В выражениях (25–27) величны с индексом A берутся из численного решения (16) и (20) при $x' = x'_A$.

Итак, решение задачи о течении в следе за пластиной сводится к численному решению системы (16) с начальными условиями (20).

4. Об осуществлении численного расчета. Система уравнений (16) с начальными условиями (20) решалась численно с помощью подпрограммы из библиотеки программ ГДР–ALGOL для ЭВМ БЭСМ–6 в

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова. Эта подпрограмма представляет собой процедуру интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Кутта-Мерсона с автоматическим выбором шага, взятую с некоторыми изменениями из [3].

Основной задачей при использовании этой программы является составление процедуры $FGT(X, Y, F)$, вычисляющей вектор производных $F[1 : N]$ по значениям независимой переменной X и вектора неизвестных функций $Y[1 : N]$, при этом N – число уравнений. Неизвестные функции следует нормировать так, чтобы производные имели примерно одинаковый порядок, и заботиться, при этом, чтобы в арифметических операциях суммирования и вычитания использовались величины, порядки которых мало отличаются.

Рассмотрим в связи с этим соотношения (21). Перепишем первое соотношение (21) в следующей форме

$$\left(P_V - \frac{3P_L}{Rk_0}\right)(Rk_0^3 + 7k_0^2 - 14Rk_0) = 42. \tag{28}$$

Отбрасывая при условии $R << 1$ (например для воды $R = 0{,}005$) во второй скобке (28) члены с множителем R, мы получим для определения k_0 квадратное уравнение.

$$k_0^2 - \frac{3P_L}{P_V R} k_0 - \frac{6}{P_V} = 0. \tag{29}$$

Его решение ($k_0 > 0$) можно представить в виде

$$k_0^2 = \frac{6}{P_V}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{P_L^2}{P_V R^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8P_V R^2}{3P_L^2}}\right)\right). \tag{30}$$

Пренебрегая вторым членом под знаком корня ($R << 1$), имеем

$$k_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{6}{Sp_V}}\sqrt{1 + \frac{3Sp_L^2}{2Sp_V}}. \tag{31}$$

Здесь введены параметры

$$Sp_V = \frac{P_V}{R^2}, \quad Sp_L = \frac{P_L}{R^2}. \tag{32}$$

Тогда из второго соотношения (21) получим

$$Z_0 = 4R^2 Sp_V\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3Sp_V}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{Sp_L^2}{Sp_V}\right)}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{Sp_L^2}{Sp_V}\right)^{-1}. \tag{33}$$

В задачах пленочного кипения параметр Sp_V принимает значение примерно от 1 до 10^4, Sp_L – от 0 до 500, а $R << 1$ (см. [2]). Таким образом, основным параметром, определяющим порядок неизвестных функций и их производных, является параметр R.

Исходя из начальных условий (20) и соотношений (31) и (33), введем следующие новые функции

$$\tilde{k} = Rk, \quad \tilde{h} = \bar{h}/\sqrt{Z_0}, \quad \tilde{p} = Z_0 p, \quad \tilde{q} = Z_0 q, \quad \tilde{r} = r, \quad \tilde{c}_1 = c_1, \quad \hat{d}_0 = d_0. \tag{34}$$

Подставив эти выражения в уравнения системы (16) и в соотношения (14), (17) и (18) убеждаемся, что во всех операциях суммирования и вычитания при вычислении отдельных производных функций (34) используются величины примерно одинакового порядка, причем все производные имеют порядок $0(1/Z_0)$. Отметим, что производные $\tilde{k}'$, $\tilde{h}'$ и $\tilde{p}'$ определяются из матрицы, которую образуют первые три уравнения (16).

Таким способом решалась система (16) с начальными условиями (20) для разных значений параметров R, Sp_V и Sp_L. Результаты численного расчета представлены на графиках [4].

В заключение приведем полезную для практики приближенную формулу для определения длины парового слоя, которая получилась с помощью экстраполяции соответствующих численных расчетов

$$x_L = L\left(1 + 0{,}4\frac{Sp_V^{1{,}1 Sp_L^{0{,}05}}}{Sp_L^{2{,}72}}\right). \tag{35}$$

Автор выражает глубокую благодарность академику АН СССР Г. Г. Черному за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Schlichting H.:* Grenzschicht-Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1969.
[2] *Schütte V.:* Filmsieden bei der Umströmung der halbunendlichen ebenen Platte und des Keils durch inkompressible Flüssigkeiten. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **65** (3) (1985), 167–178.
[3] Algorithm 218. *Comm. of ACM,* **6** (12) (1963), p. 753.
[4] *Шютте Ф.*, Некоторые задачи гидродинамики пленочного кипения. Кандидатская диссертация, МГУ, Москва, 1982.