

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. А. ГРИГОРЬЕВ

Кафедра Математической физики Московского Государственного
Университета, Москва 117234, Ленинские горы

(Поступило 16 марта 1983)

1. Предметом изучения в настоящей работе является обратная по «времени» t первая краевая задача для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрение простейшего случая, а именно, задачи для уравнения теплопроводности

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t < T,$$

$$(1.2) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t < T,$$

$$(1.3) \quad u(x, T) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

(здесь $f(x)$ — заданная функция), показывает некорректность в смысле Адамара постановки (1.1) — (1.3) над пространством непрерывных функций C . Во-первых, решение этой задачи не существует для произвольной $f \in C$. Во-вторых, даже в случае существования решения оно, вообще говоря, является неустойчивым по отношению к возмущениям начальной функции. Действительно,

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} e^{n^2(T-t)} \sin nx,$$

где n — натуральное число, удовлетворяет (1.1)–(1.3) с $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, а $u(x, t) \equiv 0$ — решение той же задачи с $f(x) = 0$. И хотя

при $n \rightarrow \infty$ $\|f_n - f\|_C = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, тем не менее для любого фиксированного $t < T$

$$\|u_n(x, t) - u(x, t)\|_{C[0, \pi]} = \frac{1}{n} e^{n^2(T-t)} \rightarrow \infty.$$

Известно, что существует целый ряд естественнонаучных проблем, приводящих к математическим постановкам типа (1.1)–(1.3), что об-

условливает важность создания устойчивых методов решения таких задач. Одной из первых работ в этом направлении была [1], где предложен численный метод решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным ходом времени и проведением оценок погрешности показана его устойчивость на множестве ограниченных положительных функций.

Иной подход связан с теорией некорректно поставленных задач, развитой А. Н. Тихоновым, М. М. Лаврентьевым и их последователями. В частности, в [2] приведен следующий результат, имеющий фундаментальное значение для исследования устойчивости обратных задач:

Лемма 1.1. Пусть метрическое пространство U отображается на метрическое пространство F и F_0 — образ множества $U_0 \subset U$ при этом отображении. Если отображение $U \rightarrow F$ непрерывно, взаимно однозначно и множество U_0 компактно в U , то отображение $F_0 \rightarrow U_0$ также непрерывно по метрике пространства U . $\square$

На основе [2] в [3] было сформулировано понятие корректности по Тихонову. Именно, задача называется поставленной корректно по Тихонову, если выполнены следующие условия: 1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит определенному множеству $\mathcal{M}$ некоторого функционального пространства; 2) решение задачи единственно; 3) бесконечно малым вариациям исходных данных задачи, не выводящим решение за пределы $\mathcal{M}$, соответствуют бесконечно малые вариации решения. Множество $\mathcal{M}$ при этом называется классом корректности.

При изучении некорректных обратных задач обычно совершенно естественным путём вводится прямое отображение $U \rightarrow F$, однозначное и непрерывное. Если же в качестве класса корректности выбирается компактное в U множество, то выполнение условия 3) следует по лемме 1.1 из 2).

Таким образом, узловыми здесь оказываются следующие моменты: а) доказательство теоремы единственности для обратной задачи; б) выделение компактного класса корректности (причем по возможности в наиболее естественном, удобном с точки зрения практики виде).

Указанный подход весьма плодотворен. Так, [4] с этой позиции объясняет результат работы [1]. Более того, оказалось, что аналитичность решения прямой задачи, решающим образом использованная в [1] не является существенной (см. [5]).

Настоящая работа распространяет результаты [5] на случай линейного параболического уравнения второго порядка общего вида.

2. Пусть Ω — ограниченная связная область с границей ω в n — мерном евклидовом пространстве E_n , $\mathcal{D} \equiv \Omega \times (0, T]$, $T > 0$, — цилиндр в E_{n+1} ; точки E_n и E_{n+1} будем обозначать соответственно через $x = (x_1, \dots, x_n)$ и (x, t) . Пусть $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Сформулируем основные условия, при которых будут проводиться дальнейшие рассмотрения.

1° а) $\mathcal{L}$ — равномерно параболический в $\mathcal{D}$ оператор, т. е. существуют такие положительные константы μ_0, ν_0 , что для любой точки $(x, t) \in \mathcal{D}$ и каждого ненулевого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ выполнено неравенство

$$\nu_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \mu_0 |\xi|^2,$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

б) коэффициенты $\mathcal{L}$ — равномерно непрерывные по Гельдеру в $\bar{\mathcal{D}}$ функции.

2° Граница ω области Ω обладает свойством строгой сферичности изнутри, т. е. для любой точки $x_0 \in \omega$ существует такой (замкнутый) шар K с центром в некоторой точке $x^* \in \Omega$, $x^* \neq x_0$, что $K \subset \Omega$ и $K \cap \omega = \{x_0\}$ (Для выполнения этого условия достаточно принадлежности границы классу C^2).

Рассмотрим (прямую) начально-краевую задачу

$$(2.1) \quad \mathcal{L}u = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D};$$

$$(2.2) \quad u|_s = 0, \quad s \equiv \omega x(0, T];$$

$$(2.3) \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

где φ такова, что в $\bar{\mathcal{D}}$ обеспечено существование решения $u(x, t)$, понимаемого в классическом смысле. Множество всевозможных таких функций обозначим через Φ . Для каждой $\varphi \in \Phi$ при сделанных предположениях решение $u(x, t)$ единственно; кроме того для задачи (2.1)–(2.3) существует единственная функция Грина $G(x, t; \xi, \tau)$, $t > \tau$, так что в $\mathcal{D}$

$$u(x, t) = \int_{\Omega} G(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi.$$

Рассматривая для φ , пробегающих Φ , семейство задач вида (2.1)–(2.3), обозначим через $U = \{u(x, t)\}$ соответствующее множество их решений.

Пусть для фиксированного $t \in (0, T]$ $\Omega_t \equiv \Omega \times \{t\}$, $U(t)$ — сужение U на $\bar{\Omega}_t$. $U(t)$ является подпространством $C(\bar{\Omega})$. Для фиксированных $t_1, t_2 : 0 < t_1 < t_2 \leq T$, вводим отображение $A_{t_2-t_1} : U(t_1) \rightarrow U(t_2)$, которое для каждого элемента $u \in U$ функции $u(x, t_1)$ ставит в соответствие функцию $u(x, t_2)$, $x \in \bar{\Omega}$. $A_{t_2-t_1}$ задается соотношением

$$u(x, t_2) = \int_{\Omega} G(x, t_2; \xi, t_1) u(\xi, t_1) d\xi.$$

Переходя к рассмотрению обратной задачи, т. е. задачи определения решения (2.1), удовлетворяющего (2.2), для $t < T$ по известной $f(x)$,

заметим, что решение ее существует, если $f \in U(T)$. Так как отображение A_{T-t} , $t \in (0, T)$, однозначно и непрерывно в равномерной метрике, вопрос об устойчивости решения обратной задачи сводится к доказательству однозначности A_{T-t}^{-1} и непрерывности его на некотором подмножестве $U(T)$.

Однозначность отображения A_{T-t}^{-1} дает вытекающее из результатов [6] утверждение.

Лемма 2.1. Пусть для оператора $\mathcal{L}$ выполнены условия 1° и, кроме того, $a_{ij}(x, t)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{D}$. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет в $\mathcal{D}$ уравнению (2.1) и граничному условию (2.2). Пусть, далее, $\omega \in C^1$. Тогда если $u(x, T) = 0 \ \forall x$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$. $\square$

3. Пусть $\tau \in (0, T)$; для $M > 0$ рассмотрим $U_{M, \tau}$ — совокупность всех функций из U , для которых

$$\|u\|_{C(\Omega_\tau)} \equiv \sup_{x \in \Omega} |u(x, \tau)| \leq M,$$

что в силу принципа максимума эквивалентно

$$\|u\|_{C(\bar{\mathcal{D}}_\tau)} \leq M,$$

где

$$\bar{\mathcal{D}}_\tau \equiv \bar{\Omega} \times [\tau, T],$$

Имеет место

Лемма 3.1. Для любого $t \in (\tau, T]$ множество $A_{t-\tau}(U_{M, \tau})$ компактно в $C(\bar{\Omega})$. $\square$

Доказательство. Линейный интегральный оператор $A_{t-\tau}$, действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, является вполне непрерывным. $\square$

Заметим, что леммы 2.1 и 3.1 означают устойчивость обратной задачи на решениях из множества $U_{M, \tau}$.

Введем теперь в рассмотрение U^+ — подмножество неотрицательных функций из U . По принципу максимума $u \in U^+$ не может принимать нулевые значения внутри $\mathcal{D}$, если только $u \not\equiv 0$.

Далее будем через $\nu = \nu(x, t)$ обозначать внутреннюю нормаль к боковой поверхности S цилиндра $\mathcal{D}$ в точке (x, t) . Существование ν , а также нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S$ решения (2.1)–(2.3) при $t \geq \tau$ обеспечено условиями 1°–2° и требованиями на $\varphi(x)$.

Следующий результат вытекает из принципа максимума.

Лемма 3.2. $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_S > 0$ для всякого $u \in U^+$, если только $u \not\equiv 0$. $\square$

Доказательство с помощью барьерной (относительно точки $(x_0, t_0) \in S$) функции

$$\nu(x, t) = e^{-\alpha(|x-x^*|^2 + |t-t_0|^2)} - e^{-\alpha R^2}, \quad \alpha > 0,$$

проводится так же, как в теореме 14 главы 11 [7]. Здесь (x^*, t_0) , R суть соответственно центр и радиус шара K , о котором идет речь в условии 2°.

Лемма 3.3. Пусть Ω_0 — строго внутренняя подобласть Ω , $t < T$, $\tau_1, \tau_2 \in (0, t)$. Тогда найдется такая постоянная $C_0 > 0$ (зависящая от Ω_0 , τ_1, τ_2, t), что

$$(3.1) \quad 0 \leq \frac{G(x, t; \xi, \tau_1)}{G(x, t; s, \tau_2)} \leq C_0$$

при всех $x, \xi \in \Omega$, $s \in \Omega_0$. $\square$

Доказательство. Заметим, что $G(x, t; \xi, \tau)$ как функция (x, t) есть решение (2.1) при $t > \tau$, удовлетворяющее (2.2), причем $G(x, t; \xi, \tau) > 0$ для $x, \xi \in \Omega$. Поэтому (3.1) очевидно, когда x пробегает замыкание некоторой строго внутренней подобласти области Ω .

Теперь для $x_0 \in \omega$ возьмем внутреннюю нормаль к боковой поверхности цилиндра $\mathcal{D}$. Аргумент $t > 0$ в наших рассмотрениях фиксирован, поэтому ниже будем говорить об этой нормали как о $\nu(x_0)$.

Распространим определение отношения из (3.1) для $x_0 \in \omega$ как предел

$$(3.2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \nu(x_0) \cap \Omega}} \frac{G(x, t; \xi, \tau_1)}{G(x, t; s, \tau_2)}.$$

Ниже показано, что такой предел существует.

Функция Грина задачи (2.1)–(2.3) при выполнении условий 1° непрерывно дифференцируема по x в Ω ([7]), поэтому при $x \in \nu(x_0) \cap \Omega$, $t > \tau$

$$\begin{aligned} 0 \leq G(x, t; \xi, \tau) &= G(x, t; \xi, \tau) - G(x_0, t; \xi, \tau) = \\ &= |x - x_0| \frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(\tilde{x}, t; \xi, \tau), \end{aligned}$$

где $\tilde{x}$ — точка нормали $\nu(x_0)$, лежащая между x_0 и x . Отсюда и из леммы 3.2 вытекает существование конечного предела (3.2) равного

$$\frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(x_0, t; \xi, \tau_1) \Big/ \frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(x_0, t; s, \tau_2).$$

В силу непрерывности последнего отношения по переменной x получаем справедливость (3.1), когда x изменяется в некоторой окрестности границы ω в Ω . $\square$

Далее нам потребуются дополнительные предположения относительно коэффициентов $\mathcal{L}$, а именно:

б') $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial b_i}{\partial x_k}$ — равномерно непрерывные по Гельдеру в $\mathcal{D}$ функции.

Введем для некоторого $M > 0$ множество

$$U_M^+ \equiv \{u: u \in U^+, \|u\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \leq M\}.$$

Теорема. Пусть $t \in (t_0, T)$, $t_0 > 0$. Тогда множество $U_M^+(t)$ компактно в $C(\bar{\Omega})$. $\square$

Доказательство. При выполнении условий 1°, 2°, б') существует ([7], теорема 17 главы III) функция Грина $G^*(\xi, \tau; x, t)$ сопряженного оператора $\mathcal{L}^*$ (коэффициенты которого удовлетворяют условию б)). G^* является непрерывной функцией точки $(\xi, \tau; x, t)$, где $\xi \in \bar{\Omega}$, $x \in \Omega$, $\tau < t$. При этом для любых точек (x, t) и (ξ, τ) из $\mathcal{D}$, у которых $t > \tau$

$$G^*(\xi, \tau; x, t) = G(x, t; \xi, \tau).$$

Начально-краевая задача для уравнения

$$\mathcal{L}^*v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \{t < T\}$$

с граничным условием $v|_s = 0$ заменой t на $T - t$ сводится к задаче вида (2.1)–(2.3). Поэтому в силу леммы 3.3 получаем ограниченность отношения

$$\frac{G^*(\xi, \tau; x, t_1)}{G^*(\xi, \tau; s, t_2)} = \frac{G(x, t_1; \xi, \tau)}{G(s, t_2; \xi, \tau)}$$

при

$$t_1, t_2 > \tau; \quad x, \xi \in \Omega; \quad s \in \Omega_0.$$

Итак, существует такое число $c > 0$ (зависящее от Ω_0, τ, t_0, T ; $0 < \tau < t_0 < T$), что

$$(3.3) \quad 0 \leq \frac{G(x, t_1; \xi, \tau)}{G(s, t_2; \xi, \tau)} \leq c$$

для любых $t_1, t_2 \in [t_0, T]$; $x, \xi \in \Omega$; $s \in \Omega_0$.

Поэтому для каждого $u \in U^+$

$$(3.4) \quad u(x, t_1) = \int_{\Omega} G(x, t_1; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi \leq c \cdot \int_{\Omega} G(s, t_2; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi = c \cdot u(s, t_2),$$

где константа c не зависит от выбора u .

В частности, рассматривая U_M^+ , имеем

$$0 \leq u(x, t_0) \leq c \cdot u(s, T) \leq c \cdot M \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \Omega_0,$$

откуда вследствие леммы 3.1 получаем утверждение теоремы. $\square$

Лемма 2.1 и теорема обеспечивают выполнение всех условий, гарантирующих корректность по Тихонову обратной по t задачи для уравнения (2.1) с (2.2) на множестве U_M^+ .

4. Замечания. 1) Неравенство (3.4) можно сформулировать в следующем виде: при $0 < t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ для всех $u \in U^+$ справедливо

$$(4.1) \quad \sup_{x \in \Omega} u(x, t_1) \leq c \cdot \inf_{x \in \Omega_0} u(x, t_2)$$

с общей константой c (зависящей от Ω_0, t_0, T). Это неравенство типа Харнака для уравнения $\mathcal{L}u = 0$. В отличие от известных результатов

точная верхняя грань в левой части неравенства берется по всему Ω , а не по его строго внутреннему подмножеству.

Из (4.1) следует, что для выделения из $U^+(t)$ компактного в $C(\bar{\Omega})$ множества достаточно для элементов этого множества потребовать выполнения условия

$$(4.2) \quad u(x_0, T) \leq M$$

в какой-то одной внутренней точке $x_0 \in \Omega$.

2. На самом деле можно говорить об устойчивости в метрике C обратной по t задачи для уравнения (2.1) в классе положительных решений U^+ , а не U_M^+ , так как в силу локального характера определения непрерывности условие (4.2) выполняется автоматически для соответствующего пучка решений.

3. Требования на гладкость коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, а также на гладкость границы ω , по-видимому, можно ослабить.

4. Схема, предложенная в настоящей работе, может быть обобщена на случай целого класса задач, носящих эволюционный характер (см. по этому поводу [8]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] John F., Numerical solution of the equation of heat conduction for proceeding times, *Ann. Math. pura ed appl., ser. IV* **40** (1955), 129–142.
- [2] Тихонов А. Н., Об устойчивости обратных задач, *Докл. АН СССР*, **39** (5) (1943), 195–198.
- [3] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
- [4] Григорьев Е. А., Об устойчивости обратной по времени задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе положительных решений. *Дифференц. уравнения*, **17** (7) (1981), 1250–1255.
- [5] Григорьев Е. А., Об устойчивости положительных решений обратных задач теплопроводности., *Журнал вычисл. математ. и матем. физики*, **22** (6) (1982), 1508–1513.
- [6] Lees M. and Protter M. H., Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 369–383.
- [7] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, «Мир», Москва, 1968.
- [8] Григорьев Е. А., Устойчивость положительных решений одного класса задач, приводящихся к интегральному уравнению 1-го рода. В сб. «Методы решения некорректных задач и их приложения». Новосибирск, 1982, 199–201.

