# NUMERISCHE LÖSUNG DER DIFFERENZIALGLEICHUNG $y''=f(x;y;y')$ MIT SPLINE-FUNKTION

JÁNOS GYŐRVÁRI
Universität für Chemische Industrie Veszprém
Institut für Mathematik und Rechnentechnik
8201 Veszprém, Pf. 158.

*(Eingegangen am 21. Februar 1982)*

Betrachten wir das Cauchy-Problem:

$$y''=f(x;y;y'); \quad x\in[0;1] \tag{1}$$

$$y(0)=y_0; \quad y'(0)=y'_0.$$

Seien die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Funktion $f(x;y(x);y'(x))$ ist $r$-mal differenzierbahr (d. h. $y\in \in C^{r+2}[0;1]$).

2. $|f^{(q)}(x;y_1;y'_1)-f^{(q)}(x;y_2;y'_2)|\le M\{|y_1-y_2|+|y'_1-y'_2|\}$ für $q=1; 2; 3; \ldots; r$

(für $q=0$ siehe [1]), wo $f^{(0)}=f$;

$$f^{(m+1)}=f_x^{(m)}+f_y^{(m)}\cdot y'+f_{y'}^{(m)}\cdot f.$$

Es sei

$$x_k=\frac{k}{n}; \quad h=\frac{1}{n}; \quad y_k=y(x_k); \quad y_k^{(q)}=y^{(q)}(x_k),$$

$$(q=1;2;\cdots;r+2);$$

$$\omega_{r+2}(h)=\sup_{|x-x_1|\le h}|y^{(r+2)}(x)-y^{(r+2)}(x_1)|.$$

## 1. Die Definition der Spline-Funktion

*Definition:*

$$S_\Delta(x):=\begin{cases}S_0(x) & \text{für} \quad x_0\le x\le x_1\\ S_k(x) & \text{für} \quad x_k\le x\le x_{k+1}\end{cases} \tag{2}$$

$$(k=1;2;\ldots;n-1)$$

wo

$$S_0(x) := y_0 + y_0' \cdot (x - x_0) + \sum_{j=0}^{r} \frac{f^{(j)}(x_0; y_0; y_0')}{(j+2)!} \cdot (x - x_0)^{j+2}$$

$$S_k(x) := S_{k-1}(x_k) + S_{k-1}'(x_k) \cdot (x - x_k) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \frac{f^{(j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S_{k-1}'(x_k))}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2}.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß

$$S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k),$$

$$S_{k-1}'(x_k) = S_k'(x_k),$$

das heißt $S_\Delta(x) \in C^1 [0; 1]$.

## 2. Probleme der Konvergenz

Das Ziel der Untersuchungen ist die Approximation der Lösung des Cauchy-Problems mit Hilfe der Spline-Funktion. Außerdem werden wir zeigen, daß die Spline-Funktion $S_\Delta(x)$ Lösung des Cauchy-Problems ist, wenn $n \to \infty$ (das heißt $h \to 0$).

Zum Beweis benutzen wir oft die nachstehenden Taylor-Formeln, die sich aus der Bedingung $y(x) \in C^{r+2} [0; 1]$ ergeben:

$$y(x) = y_k + y_k' \cdot (x - x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y_k')}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} +$$

$$+ \frac{y^{(r+2)}(\xi_{0;k})}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2},$$

$$y'(x) = y_k' + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y_k')}{(j+1)!} \cdot (x - x_k)^{j+1} + \frac{y^{(r+2)}(\xi_{1;k})}{(r+1)!} \cdot (x - x_k)^{r+1},$$

$$y^{(2+q)}(x) = \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{f^{(q+j)}(x_k; y_k; y_k')}{j!} \cdot (x - x_k)^j + \frac{y^{(r+2)}(\xi_{q+2;k})}{(r-q)!} \cdot (x - x_k)^{r-q}$$

$$x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

$$x_k < \xi_{q+2;k} < x$$

$$(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$$

$$(q = 0; 1; 2; \ldots; r-1).$$

*Definition:*

$$e_k^{(q)} := |y^{(q)}(x_k) - S_k^{(q)}(x_k)|; \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$$

$$e_n^{(q)} := |y^{(q)}(x_n) - S_{n-1}^{(q)}(x_n)|; \quad (q = 0; 1; 2; \ldots; r+2).$$

**Lemma 2.1.**

$$e_{k+1} \leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot h \cdot e_k' + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$.

**Beweis.** Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ $(k = 1; 2; \ldots; n-2)$. Dann

$$|y(x) - S_k(x)| \leq \left| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y'_k)}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} + \right.$$

$$+ \frac{y^{(r+2)}(\xi_{0;k})}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2} - S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) -$$

$$- \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} -$$

$$\left. - \frac{f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2} \right| \leq e_k + e'_k \cdot h +$$

$$+ M \cdot \{e_k + e'_k\} \cdot \left\{ \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \right\} +$$

$$+ \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \, |y^{(r+2)}(\xi_{0.k}) - y^{(r+2)}(x_k)| +$$

$$+ \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot |f^{(r)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq$$

$$\leq e_k \cdot \{1 + C_1 \cdot h^2\} + C_2 \, e'_k \cdot h + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \, .$$

Bei $x = x_{k+1}$

$$|y(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})| = |y(x_{k+1}) - S_{k+1}(x_{k+1})| =$$

$$= e_{k+1} \leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot e'_k \cdot h + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \, .$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ und $k = n-1$ ähnlicherweise durchgeführt werden.

**Lemma 2.2.**

$$e'_{k+1} \leq e_k \cdot L \cdot h + e'_k \cdot (1 + L \cdot h) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$, wo $L$ eine Konstante ist.

**Beweis.** Den Beweis kann man ähnlicherweise durchführen, wie beim Lemma 2.1.

**Lemma 2.3.**

$$e'_{k+1} \leq C_3 \, e_{r_0} + C_4 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$, wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\}$; und $0 \leq r_0 \leq k$.

**Beweis.** Wenden wir das Lemma 2.2. mehrmal an, dann bekommen wir folgende Ungleichungen:

$$e'_{k+1} \leq e_k \cdot L \cdot h + e'_k \cdot (1+L\cdot h) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

$$e'_k \cdot (1+L\cdot h) \leq e_{k-1} \cdot L \cdot h \cdot (1+L\cdot h) + e'_{k-1} \cdot (1+L\cdot h)^2 + \\ + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1+L\cdot h),$$

$$e'_{k-1} \cdot (1+L\cdot h)^2 \leq e_{k-2} \cdot L \cdot h \cdot (1+L\cdot h)^2 + e'_{k-2} \cdot (1+L\cdot h)^3 + \\ + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1+L\cdot h)^2,$$

$$\vdots$$

$$e'_1 \cdot (1+L\cdot h)^k \leq e_0 \cdot L \cdot h \cdot (1+L\cdot h)^k + e'_0 \cdot (1+L\cdot h)^{k+1} + \\ + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1+L\cdot h)^k.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$e'_{k+1} \leq L \cdot h \cdot \sum_{j=0}^{k} e_j \cdot (1+L\cdot h)^{k-j} + e'_0 \cdot (1+L\cdot h)^{k+1} + \\ + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \sum_{j=0}^{k} (1+L\cdot h)^j,$$

$$e'_{k+1} \leq L \cdot h \cdot e_{r_0} \cdot \frac{(1+L\cdot h)^{k+1}-1}{L\cdot h} + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \frac{(1+L\cdot h)^{k+1}-1}{L\cdot h},$$

wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\}$ und $0 \leq r_0 \leq k$ ist.

Auf Grund der Ungleichung

$$(1+L\cdot h)^{k+1} = \left(1+L\cdot\frac{1}{n}\right)^{k+1} \leq \left(1+\frac{L}{n}\right)^n \leq e^L = \text{const}$$

bekommen wir das Lemma 2.3.

**Lemma 2.4.**

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1+C_6 \cdot h) + C_5 \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$, wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\}$ und $0 \leq r_0 \leq k$.

**Beweis.** Wenden wir die Lemmata 2.1. und 2.3. an, dann bekommen wir Lemma 2.4.

**Lemma 2.5.**

$$e'_{r_0} \leq C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e'_{r_0} = \max\{e'_0; e'_1; e'_2; \ldots; e'_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und

$$e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1 .$$

**Beweis.** Lemma 2.5. ergibt sich aus Lemma 2.3.

**Lemma 2.6.**

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und

$$e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1 .$$

**Beweis.** Aus Lemma 2.1. folgt

$$e_{r_0} \leq e_{r_0-1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot e'_{r_0-1} + C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h) \leq$$
$$\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot e'_{r_0-1} + C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h) .$$

Aus Lemma 2.5. folgt

$$e'_{r_0-1} \leq C_7 \cdot e_{r_1^*} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_1^*} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_0-2}\}$; $\quad 0 \leq r_1^* \leq r_0 - 2 .$

Wenn wir die Ungleichung $e_{r_1^*} \leq e_{r_1}$ anwenden, bekommen wir:

$$e'_{r_0-1} \leq C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h) .$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man:

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot \{C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)\} +$$
$$+ C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h) \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) .$$

**SATZ 2.1.**

$$e_{k+1} \leq C_{14} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h) \quad \text{für} \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1) .$$

**Beweis.** Laut Lemma 2.4.:

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_6 \cdot h) + C_5 \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$.
Laut Lemma 2.6.:

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_0-1}\}$; $0 \leq r_1 \leq r_0 - 1$,

$$e_{r_1} \leq e_{r_2} \cdot (1 + C_1^* \cdot h) + C_1^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_2} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_1-1}\}$; $0 \leq r_2 \leq r_1 - 1$,

$$e_{r_2} \leq e_{r_3} \cdot (1 + C_2^* \cdot h) + C_2^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_3} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_{r_2-1}\}$; $0 \le r_3 \le r_2 - 1$, und so weiter, endlich

$$e_{r_s} \le e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_s^* \cdot h) + C_s^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_s} = \max\{e_0; e_1\}$; $0 \le r_s \le 1$, und $e_{r_{s+1}} = \max\{e_0\} = e_0 = 0$.

Es sei $C_{11} = \max[C_6; C_9; C_1^*; C_2^*; \ldots; C_s^*\}$ und $C_{12} = \max\{C_5; C_{10}; C_1^{**}; C_2^{**}; \ldots; C_s^{**}\}$.

Dann erhalten wir die folgenden Ungleichungen (ähnlich wie im Beweis des Lemmas 2.3.):

$$e_{k+1} \le e_{r_0} \cdot (1 + C_{11} \cdot h) + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

$$e_{r_0} \cdot (1 + C_{11} \cdot h) \le e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2 + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h),$$

$$e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2 \le e_{r_2} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^3 + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2,$$

$$\vdots$$

$$e_{r_s} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+1} \le e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+1}.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, bekommen wir:

$$e_{k+1} \le e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \sum_{j=0}^{s+1} (1 + C_{11} \cdot h)^j,$$

$$e_{k+1} \le C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \frac{(1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} - 1}{C_{11} \cdot h},$$

$$e_{k+1} \le C_{14} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

**SATZ 2.2.**

$$e'_{k+1} \le C_{15} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$.

**Beweis.** Aus Lemma 2.3. und SATZ 2.1. folgt SATZ 2.2.

**SATZ 2.3.**

$$e_k^{(2+q)} \le C_{16;q} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \ldots; n)$, $(q = 0; 1; 2; \ldots; r)$.

**Beweis.**

$$e_k^{(2+q)} = |f^{(q)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(q)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \le$$
$$\le M \cdot \{e_k + e'_k\} \le C_{16;q} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

**SATZ 2.4.**

$$|y^{(q)}(x) - S_\Delta^{(q)}(x)| \le K_q \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h); \quad (q = 0; 1; 2),$$

$$|y^{(2+q)}(x) - S_\Delta^{(2+q)}(x)| \le K_{2+q} \cdot h^{r-q} \cdot \omega_{r+2}(h); \quad (q = 1; 2; \ldots; r).$$

**Beweis.** Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$. Dann

$$|y^{(2+q)}(x) - S_\Delta^{(2+q)}(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{h^j}{j!} \cdot |f^{(q+j)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(q+j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| +$$

$$+ \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(2+r)}(\xi_{q+2;k}) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{h^j}{j!} \cdot M(e_k + e'_k) + \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(r+2)}(\xi_{q+2;k}) - y^{(r+2)}(x_k)| +$$

$$+ \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(r+2)}(x_k) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq$$

$$\leq K_{2+q} \cdot h^{r-q} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

$$(q = 0; 1; 2; \ldots; r).$$

Der andere Teil des Satzes läßt sich mit Hilfe der Sätze 2.1. und 2.2. beweisen.

Wir werden jetzt zeigen, daß die durch (2) definierte Spline-Funktion das Cauchy-Problem befriedigt, wenn $n \to \infty$ (das heißt $h \to 0$).

**SATZ 2.5.** Es sei $S_\Delta(x)$ die durch (2) definierte Spline-Funktion und $S_\Delta^*(x) := f((x; S_\Delta(x); S'_\Delta(x))$, ferner $f^{(q)}(x; y; y') \in \mathrm{Lip}_M 1$; $(q = 0; 1; 2; \ldots; r)$. Dann

$$|S''_\Delta(x) - S_\Delta^*(x)| \leq K_3^* \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

**Beweis.** Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ $(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)$. Dann

$$|S''_\Delta(x) - S_\Delta^*(x)| = |S''_k(x) - f(x; S_k(x); S'_k(x))| \leq |S''_k(x) - y''(x)| +$$

$$+ |f(x; y; y') - f(x; S_k(x); S'_k(x))| \leq K_2 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h) +$$

$$+ M\{|y(x) - S_k(x)| + |y'(x) - S'_k(x)|\} \leq K_3^* \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

Hier möchte ich Herrn Prof. Dr. J. Balázs [2] für seine wertvolle Hilfe meinen Dank ausdrücken.

## REFERAT

[1] *J. Győrvári:* Spline-Funktion und das Cauchy-Problem; Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1981, p. 344–348.

[2] *J. Balázs:* Privatkommunikation (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Budapest)