

EINE SPEZIELLE SPLINE-FUNKTION UND DAS CAUCHY-PROBLEM

JÁNOS GYÖRVÁRI

Universität für Chemische Industrie Veszprém Lehrstuhl für Mathematik
H-8201 Veszprém, Pf. 158.

(Eingegangen am 12. Januar 1982)

T. Fawzy definierte in [1] und [2] eine Klasse von Spline-Funktionen und mit deren Hilfe hat er die numerische Lösung des mit $y' = f(x; y)$; $x \in [0; 1]$, $y(0) = y_0$ gegebenen Cauchy-Problems gegeben. Der Verfasser gab mit der in [3] definierten Spline-Funktion die numerische Lösung des $y'' = f(x, y, y')$; $x \in [a, b]$, $y(a) = y_0$; $y'(a) = y'_0$ Cauchy-Problems. In der vorliegenden Arbeit definieren wir eine Spline-Funktion und mit deren Hilfe approximieren wir die Lösung des Cauchy-Problems. Wir werden zeigen, dass diese Spline-Funktion eine bessere Näherung gibt, als die in [3] definierte Spline-Funktion.

1. Die Definition der Spline-Funktion

Betrachten wir das Cauchy-Problem:

$$(1) \quad \begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'); \quad x \in [a, b] \\ y(a) &= y_0; \quad y'(a) = y'_0. \end{aligned}$$

Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung im Intervall $[a, b]$, wenn die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Funktion $f(x, y, y')$ ist stetig
(d.h. $y''(x) \in C^0[a, b]$)
2. Die Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, d.h.

$$|f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| \leq L \cdot (|y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|)$$

wo y_1, y_2, z_1, z_2 beliebige Variablen sind.

Es sei

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}; \quad h = \frac{b-a}{n};$$

$$y(x_k) = y_k; \quad y'(x_k) = y'_k; \quad y''(x_k) = y''_k \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n)$$

Definition.

$$(2) \quad S_{\mathcal{J}}(x) := \begin{cases} S_0(x) & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_k(x) & \text{für } x_k \leq x \leq x_{k+1} \end{cases} \quad (k = 1; 2; \dots; n-1)$$

wo

$$\begin{aligned} S_0(x) &:= y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t f \left[u, y_0 + y'_0 \cdot (u - x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x_0, y_0, y'_0)}{2} \cdot (u - x_0)^2, y'_0 + f(x_0, y_0, y'_0) \cdot (u - x_0) \right] du dt, \\ S_k(x) &:= S_{k-1}(x_k) + S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) + \\ &\quad + \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t f[u, h_k(u), h'_k(u)] du dt \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_k(x) &:= S_{k-1}(x_k) + S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) + \\ &\quad + \frac{f[x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k)]}{2} \cdot (x - x_k)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Es ist leicht zu beweisen, dass

$$S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k) \quad (k = 1; 2; \dots; n-1)$$

$$S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k) \quad (k = 1; 2; \dots; n-1)$$

das heisst $S_{\mathcal{J}}(x) \in C^1[a; b]$.

2. Problemen der Konvergenz

Das Ziel der Untersuchungen ist die Approximation der Lösung des Cauchy-Problems mit Hilfe der durch (2) definierten Spline-Funktion. Ausserdem wird die Ordnung der Approximation untersucht.

Zum Beweis benutzen wir oft die nachstehenden Taylor-Formeln, die sich aus der Bedingung $y(x) \in C^2[a; b]$ ergeben:

$$y(x) = y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \frac{y''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2.$$

wenn

$$x_k < \xi_k < x \leq x_{k+1} \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$y'(x) = y'_k + y''(\eta_k) \cdot (x - x_k)$$

wenn

$$x_k < \eta_k < x \leq x_{k+1} \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

Daneben benutzen wir die nachstehenden Zusammenhänge, die sich aus der Integrierung der (1) Differenzialgleichung ergeben:

$$y'(x) = y'_k + \int_{x_k}^x f[t, y(t), y'(t)] dt$$

$$y(x) = y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t f[u, y(u), y'(u)] du dt$$

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

Definition.

$$e_k := |y_k - S_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$e'_k := |y'_k - S'_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$e''_k := |y''_k - S''_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$e_n := |y_n - S_{n-1}(x_n)|$$

$$e'_n := |y'_n - S'_{n-1}(x_n)|$$

$$e''_n := |y''_n - S''_{n-1}(x_n)|. \quad \square$$

Lemma 2.1.

Es sei

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 1; 2; \dots; n-1)$$

Dann ist

$$|y(x) - h_k(x)| \leq e_k + e'_k \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (x - x_k)^2 + \frac{L}{2} \cdot (x - x_k)^2 \cdot (e_k + e'_k),$$

$$|y'(x) - h'_k(x)| \leq e'_k + \omega_2(h) \cdot (x - x_k) + L \cdot (x - x_k) \cdot (e_k + e'_k),$$

wo $y(x)$ die Lösung des (1) Cauchy-Problems ist, L ist die Lipschitz-Konstante und

$$\omega_2(h) = \sup_{|x - x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)|. \quad \square$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |y(x) - h_k(x)| &= \left| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \frac{y''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2 - \right. \\ &\quad \left. - S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - \frac{f[x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k)]}{2} \cdot (x - x_k)^2 \right| \leq \\ &\leq |y_k - S_k(x_k)| + |y'_k - S'_k(x_k)| \cdot (x - x_k) + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot |y''(\xi_k) - y''(x_k) + f(x_k, y_k, y'_k) - f[x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k)]| \cdot (x - x_k)^2 \leq \\ &\leq e_k + e'_k \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (x - x_k)^2 + \frac{1}{2} \cdot (x - x_k)^2 \cdot L \cdot (e_k + e'_k). \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung ist ähnlicherweise zu beweisen. $\square$

Lemma 2.2.

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &\leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot e'_k \cdot h + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h) \\
e'_{k+1} &\leq L \cdot e_k \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) + e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) + C_6 \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \\
(k &= 0; 1; 2; \dots; n-1),
\end{aligned}$$

wo $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6$ positive Konstanten sind. $\square$

Beweis.

Es sei

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 1; 2; \dots; n-1).$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
|y(x) - S_k(x)| &= \left| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t f[u, y(u), y'(u)] du dt - \right. \\
&\quad \left. - S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t f[u, h_k(u), h'_k(u)] du dt \right| \leq \\
&\leq e_k + e'_k \cdot h + L \cdot \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t \{|y(u) - h_k(u)| + |y'(u) - h'_k(u)|\} du dt \leq \\
&\leq e_k + e'_k \cdot h + L \cdot \int_{x_k}^x \int_{x_k}^t \left\{ e_k + e'_k \cdot (u - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (u - x_k)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{L}{2} \cdot (e_k + e'_k) \cdot (u - x_k)^2 + e'_k + \omega_2(h) \cdot (u - x_k) + L \cdot (e_k + e'_k) \cdot (u - x_k) \right\} du dt \leq \\
&\leq e_k \cdot \left(1 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{24} \cdot h^4 + \frac{L^2}{6} \cdot h^2 \right) + \\
&+ e'_k \cdot \left(h + \frac{L}{6} \cdot h^3 + \frac{L^2}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{6} \cdot h^3 \right) + \omega_2(h) \cdot \left(\frac{L}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{6} \cdot h^3 \right).
\end{aligned}$$

Bei

$$x = x_{k+1} \quad (k = 1; 2; \dots; n-2)$$

$$\begin{aligned}
|y(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})| &= |y(x_{k+1}) - S_{k+1}(x_{k+1})| = e_{k+1} \leq \\
&\leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + e'_k \cdot h \cdot C_2 + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h).
\end{aligned}$$

Bei

$$x = x_n$$

$$|y(x_n) - S_{n-1}(x_n)| = e_n \leq e_{n-1} \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + e'_{n-1} \cdot h \cdot C_2 + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h).$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ und für die zweite Ungleichung ähnlicherweise durchgeführt werden. $\square$

Lemma 2.3.

$$e'_{k+1} \leq C_7 \cdot e_{r_0} \cdot (1 + C_4 \cdot h) + C_8 \cdot h \cdot \omega_2(h) \\ (k = 0; 1; 2; \dots; n-1),$$

wo $C_7; C_8$ positive Konstanten sind,

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; \dots; e_k\} \quad \text{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k. \quad \boxed{\times}$$

Beweis.

Wenden wir die Lemma 2.2. mehrmals an, dann bekommen wir die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} e'_{k+1} &\leq L \cdot e_k \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) + e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \\ e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) &\leq L \cdot e_{k-1} \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h) + e'_{k-1} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 + \\ &\quad + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h) \\ e'_{k-1} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 &\leq L \cdot e_{k-2} \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 + e'_{k-2} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^3 + \\ &\quad + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 \\ &\vdots \\ e'_1 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k &\leq L \cdot e_0 \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k + e'_0 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k+1} + \\ &\quad + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} e'_{k+1} &\leq L \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot \sum_{j=0}^k e_j \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k-j} + e'_0 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k+1} + \\ &\quad + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot \sum_{j=0}^k (1 + C_5 \cdot h)^j \\ e'_{k+1} &\leq L \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot e_{r_0} \cdot \frac{(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} - 1}{C_5 \cdot h} + \\ &\quad + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot \frac{(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} - 1}{C_5 \cdot h}, \end{aligned}$$

wo

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\} \quad \text{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k.$$

Auf Grund der Ungleichung

$$(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} = \left(1 + C_5 \cdot \frac{b-a}{n}\right)^{k+1} \leq \left[1 + \frac{C_5 \cdot (b-a)}{n}\right]^n \leq e^{C_5 \cdot (b-a)} = \text{const}$$

bekommen wir die Lemma 2.3. $\boxed{\times}$

Lemma 2.4.

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \\ (k = 0; 1; 2; \dots; n-1),$$

wo $C_9; C_{10}$ positive Konstanten sind,

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\} \quad \text{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k. \quad \boxed{\times}$$

Beweis.

Wenden wir die Lemmata 2.2. und 2.3. an, dann bekommen wir Lemma 2.4. $\boxed{\times}$

Lemma 2.5.

$$e'_{r_0} \leq C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

wo $C_{11}; C_{12}; C_{13}$ positive Konstanten sind,

$$e'_{r_0} = \max\{e'_0; e'_1; e'_2; \dots; e'_k\}; \quad 0 \leq r_0 \leq k, \\ e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1. \quad \boxed{\times}$$

Beweis.

Lemma 2.5. ergibt sich aus Lemma 2.3. $\boxed{\times}$

Lemma 2.6.

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo C_{14}, C_{15} positive Konstanten sind,

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}; \quad 0 \leq r_0 \leq k, \\ e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1. \quad \boxed{\times}$$

Beweis.

Aus Lemma 2.2. folgt

$$e_{r_0} \leq e_{r_0-1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) + C_{17} \cdot e'_{r_0-1} \cdot h + C_{18} \cdot h^3 \cdot \omega_2(h) \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) + \\ + C_{17} \cdot e'_{r_0-1} \cdot h + C_{18} \cdot h^3 \omega_2(h).$$

Aus Lemma 2.5. folgt

$$e'_{r_0-1} \leq C_{11} \cdot e_{r_1}^* \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_1}^* = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-2}\}.$$

Wenn wir die Ungleichung $e_{r_1}^* \leq e_{r_1}$ anwenden, bekommen wir:

$$e'_{r_0-1} \leq C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h).$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung bekommt man:

$$\begin{aligned} e_{r_0} &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) + C_{17} \cdot h \cdot \{C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)\} + \\ &\quad + C_{18} \cdot h^3 \cdot \omega_2(h), \\ e_{r_0} &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h). \quad \square \end{aligned}$$

SATZ 2.1.

$$e_{k+1} \leq C_{19} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0; 1; 2; \dots; n-1),$$

wo

$$\omega_2(h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)|. \quad \square$$

Beweis.

Laut Lemma 2.4.:

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; \dots; e_k\}; \quad 0 \leq r_0 \leq k,$$

und

$$(k = 0; 1; 2; \dots; n-1).$$

Laut Lemma 2.6.

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_1} = \max\{e_0; e_1; \dots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1,$$

$$e_{r_1} \leq e_{r_2} \cdot (1 + C_1^* \cdot h) + C_1^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_2} = \max\{e_0; e_1; \dots; e_{r_1-1}\}; \quad 0 \leq r_2 \leq r_1 - 1,$$

$$e_{r_2} \leq e_{r_3} \cdot (1 + C_2^* \cdot h) + C_2^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_3} = \max\{e_0; e_1; \dots; e_{r_2-1}\}; \quad 0 \leq r_3 \leq r_2 - 1$$

und so weiter, endlich ergibt sich

$$e_{r_s} \leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_s^* \cdot h) + C_s^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_s} = \max\{e_0; e_1\} \quad \text{und} \quad e_{r_{s+1}} = \max\{e_0\} = 0.$$

Es sei

$$C_{20} = \max\{C_9; C_{14}; C_1^*; C_2^*; \dots; C_s^*\}$$

und

$$C_{21} = \max\{C_{10}; C_{15}; C_1^{**}; C_2^{**}; \dots; C_s^{**}\}.$$

Dann bekommen wir die folgenden Ungleichungen (ähnlicherweise, wie im Beweis der Lemma 2.3.):

$$\begin{aligned} e_{k+1} &\leq e_{r_0} \cdot (1 + C_{20} \cdot h) + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h), \\ e_{r_0} \cdot (1 + C_{20} \cdot h) &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2 + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h), \\ e_{r_1} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2 &\leq e_{r_2} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^3 + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2, \\ &\vdots \\ e_{r_s} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+1} &\leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+1}. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &\leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot \frac{(1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} - 1}{C_{20} \cdot h}, \\ e_{k+1}^s &\leq C_{19} \cdot h \cdot \omega_2(h) \cdot \boxed{\times} \end{aligned}$$

SATZ 2.2.

$$e'_{k+1} \leq C_{22} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0; 1; 2; \dots; n-1) \cdot \boxed{\times}$$

Beweis.

Wenden wir die Lemma 2.3. und SATZ 2.1. an, dann bekommen wir SATZ 2.2. $\boxed{\times}$

SATZ 2.3.

$$e''_k \leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0; 1; 2; \dots; n) \cdot \boxed{\times}$$

Beweis.

Für $k = 1; 2; \dots; n-1$

$$\begin{aligned} e''_k &= |y''(x_k) - S''_k(x_k)| = |y'_k(x_k) - f(x_k, h_k(x_k), h'_k(x_k))| = \\ &= |y''(x_k) - f[x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k)]| = \\ &= |f(x_k, y_k, y'_k) - f[x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k)]| \leq \\ &\leq L \cdot \{|y_k - S_k(x_k)| + |y'_k - S'_k(x_k)|\} \leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h). \end{aligned}$$

Für $k = n$:

$$\begin{aligned}
 e_n'' &= |y''(x_n) - S_{n-1}''(x_n)| = |y_n'' - f[x_n, h_{n-1}(x_n), h_{n-1}'(x_n)]| = \\
 &= |f(x_n, y_n, y_n') - f[x_n, h_{n-1}(x_n), h_{n-1}'(x_n)]| \leq \\
 &\leq L \cdot \{|y_n - h_{n-1}(x_n)| + |y_n' - h_{n-1}'(x_n)|\} = \\
 &= L \cdot \left\{ \left| y_{n-1} + y_{n-1}' \cdot h + \frac{y''(\xi_{n-1})}{2} \cdot h^2 - S_{n-1}(x_{n-1}) - S_{n-1}'(x_{n-1}) \cdot h - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S_{n-1}'(x_{n-1})]}{2} \cdot h^2 \right| + \right. \\
 &\quad \left. + \left| y_{n-1}' + y''(\eta_{n-1}) \cdot h - S_{n-1}'(x_{n-1}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S_{n-1}'(x_{n-1})] h \cdot \right| \right\} \leq \\
 &\leq L \cdot \left\{ e_{n-1} + e_{n-1}' \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot |y''(\xi_{n-1}) - y_{n-1}''| + \frac{h^2}{2} \cdot |f(x_{n-1}, y_{n-1}, y_{n-1}') - \right. \\
 &\quad \left. - f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S_{n-1}'(x_{n-1})]| + e_{n-1}' + h \cdot |y''(\eta_{n-1}) - y''(x_{n-1})| + \right. \\
 &\quad \left. + h \cdot |f(x_{n-1}, y_{n-1}, y_{n-1}') - f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S_{n-1}'(x_{n-1})]| \right\} \leq \\
 &\leq L \cdot \left\{ e_{n-1} + e_{n-1}' \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot \omega_2(h) + \frac{h^2}{2} \cdot L \cdot [|y_{n-1} - S_{n-1}(x_{n-1})| + \right. \\
 &\quad \left. + |y_{n-1}' - S_{n-1}'(x_{n-1})|] + e_{n-1}' + h \cdot \omega_2(h) + \right. \\
 &\quad \left. + h \cdot L \cdot [|y_{n-1} - S_{n-1}(x_{n-1})| + |y_{n-1}' - S_{n-1}'(x_{n-1})|] \right\} \leq \\
 &\leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h) \cdot \boxed{\times}
 \end{aligned}$$

SATZ 2.4.

$$\begin{aligned}
 |y(x) - S_A(x)| &\leq K \cdot h \cdot \omega_2(h), \\
 |y'(x) - S_A'(x)| &\leq K_1 \cdot h \cdot \omega_2(h), \\
 |y''(x) - S_A''(x)| &\leq K_2 \cdot h \cdot \omega_2(h),
 \end{aligned}$$

wo $y(x)$ die Lösung des (1) Cauchy-Problems, $S_A(x)$ die in (2) definierte Spline-Funktion sind, und $K_1; K_2; K_3$ die Konstanten sind und

$$\omega_2(h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)| \cdot \boxed{\times}$$

Beweis.

Wenden wir die Sätze 2.1. und 2.2., Lemma 2.1. und die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 |y(x) - S_k(x)| &\leq e_k \cdot \left(1 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{24} \cdot h^4 + \frac{L^2}{6} \cdot h^3 \right) + \\
 &\quad + e'_k \cdot \left(h + \frac{L}{6} \cdot h^3 + \frac{L^3}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{6} \cdot h^3 \right) + \\
 &\quad + \omega_2(h) \cdot \left(\frac{L}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{6} \cdot h^3 \right), \\
 |y'(x) - S'_k(x)| &\leq e_k \cdot \left(L \cdot h + \frac{L^2}{6} \cdot h^3 + \frac{L^2}{2} \cdot h^2 \right) + \\
 &\quad + e'_k \cdot \left(1 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^3}{6} \cdot h^3 + L \cdot h + \frac{L^2}{2} \cdot h^2 \right) + \omega_2(h) \cdot \left(\frac{L}{6} \cdot h^3 + \frac{L}{2} \cdot h^2 \right), \\
 |y''(x) - S''_k(x)| &\leq L \cdot \{ |y(x) - h_k(x)| + |y'(x) - h'_k(x)| \}
 \end{aligned}$$

an, dann bekommen wir SATZ 2.4. $\square$

Wir werden im SATZ 2.5. zeigen, dass die durch (2) definierte Spline-Funktion die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ befriedigt, wenn $n \rightarrow \infty$ (das heisst $h \rightarrow 0$).

SATZ 2.5.

Es sei $S_A(x)$ die durch (2) definierte Spline-Funktion und

$$S_A^*(x) := f(x, S_A(x), S'_A(x)),$$

ferner

$$f(x, y, y') \in \text{Lip}_L 1.$$

Dann ist

$$|S''(x) - S_A^*(x)| \leq K_3 \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

wo

$$\omega_2(h) = \sup_{|x - x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)|. \quad \square$$

Beweis.

Wenden wir den SATZ 2.4. und die Bedingung $f \in \text{Lip}_L 1$ an, dann bekommen wir den SATZ 2.5.

Es sei

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |S''(x) - S_d^*(x)| &= |S_k''(x) - f[x, S_k(x), S_k'(x)]| \leq \\ &\leq |S_k''(x) - y''(x)| + |f[x, y(x), y'(x)] - f[x, S_k(x), S_k'(x)]| \leq \\ &\leq K_2 \cdot h \cdot \omega_2(h) + L \cdot \{|y(x) - S_k(x)| + |y'(x) - S_k'(x)|\} \leq K_3 \cdot h \cdot \omega_2(h). \end{aligned}$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ ähnlicherweise durchgeführt werden. $\square$

REFERENCES

- [1] *T. Fawzy*: Spline Functions and Cauchy Problems, III.; Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Computatoria I. (1978), pp. 35–45.
- [2] *T. Fawzy*: Spline Functions and Cauchy Problems VII.; Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math. XXIV. (1981), pp. 57–62.
- [3] *J. Györfvári*: Spline-Funktion und die Cauchy – Problem; Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna 31. 05–6. 06. 1981.

