ОБ ОДНОМЕРНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

А. С. ПОДКОЛЗИН

Москва

(Поступило 16. 5. 1979)

Для воспроизведения в однородных структурах различных процессов особый интерес представляют универсальные однородные структуры, которые позволяют моделировать поведение любых однородных структур той же размерности. Такие одноордные структуры были построены для размерности $k \geq 2$ в работах [2,4], где рассматривались также некоторые вопросы алгоритмического характера, связанные с распознаванием универсальности однородных структур; оценивалась сложность взаимного моделирования однородных структур, характеризущихся различными значениями параметров, и приводились примеры простейших двумерных универсальных однородных структур. Вместе с тем, использованные в этих работах конструкции универсальных однородных структур были основаны на вложении в k-мерную решетку некоторых сетей автоматов и непригодны в одномерном случае из-за ограниченной пропускной способности одномерной однородной структуры как информационного канала. В настоящей работе показывается, что универсальные однородные структуры существуют также и в одномерном случае, причем устанавливается необходимое и достаточное условие возможности реализации универсальной одномерной однородной структуры итеративной сетью в базисе вида $\{\mathfrak{A}_з, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_n\}$, где $\mathfrak{A}_з$ — элемент, реализующий двоичную задержку на один такт; $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n$ — элементы, реализующие некоторые функции алгебры логики.

1. Основные понятия и результаты

Однородной структурой (ОС) называется четверка $\langle Z^k, E_n, V, \varphi\rangle$, где Z^k есть множество k-мерных векторов с целыми координатами, называемых ячейками ОС; $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — множество состояний, которые может принимать ячейка ОС; $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}\}$ упорядоченный набор попарно различных ненулевых векторов из Z^k, называемый шаблоном соседства ОС и определяющий для каждой ячейки α ее окрестность

$V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$; φ есть отображение $(E_n)^h$ в E_n, называемое локальной функцией переходов. ОС. Если в момент t состояния ячеек $\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}$ были равны соответственно $x_0, x_1, \ldots x_{h-1}$, то состояние α в момент $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Пусть состояние ОС (то есть функция, сопоставляющая каждой ячейке ее состояние из E_n) в момент t есть f; тогда ее состояние в момент $t+1$ есть функция g, определяемая равенством:

$$g(\alpha) = \varphi\big(f(\alpha), f(\alpha+\alpha_1), \ldots, f(\alpha+\alpha_{h-1})\big).$$

Это равенство определяет также основную функцию переходов Φ: $g = \Phi(f)$. Поведением ОС называется последовательность $\{f_i\}$ ее состояний, такая, что $f_{i+1} = \Phi(f_i)$.

Рассмотрим следующий способ моделирования поведения ОС σ посредством поведений ОС σ' той же размерности k. Выберем натуральный вектор $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_k)$ и разобьем множество ячеек ОС σ' на параллелепипеды $P_{\bar{v}}$:

$$P_{\bar{v}} = \{(x_1, \ldots, x_k)/l_i v_i \le x_i < l_i(v_i+1)\}$$

Очевидно, все $P_{\bar{v}}$ содержат по $\prod_{i=1}^{k} l_i$ ячеек и подобны некоторому стандартному параллелепипеду P. Пусть E_n и $E_{n'}$ — множества состояний ячейки ОС σ и σ'. Выберем в множестве состояний P (состояния ячеек которого принадлежат множеству $E_{n'}$) n-элементное подмножество M и рассмотрим произвольное взаимно-однозначное отображение $\xi: E_n \to M$. Тогда определяется взаино-однозначное отображение Θ состояний ОС σ на подмножество множества состояний ОС σ', которое приписывает параллелепипеду $P_{\bar{v}}$ состояние, полученное применением ξ к состоянию ячейки $\bar{v}$ в ОС σ. Если натуральное N таково, что для любого поведения $\{f_i\}$ ОС σ существует поведение $\{g_i\}$ ОС σ', такое, что $g_{N\cdot i} = \Theta(f_i)$, то σ называется представимой в σ' с замедлением $N \cdot k$-мерная ОС называется универсальной, если любая ОС той же размерности представима в ней с некоторым замедлением.

Имеет место следующая

Теорема 1. Существует универсальная одномерная ОС с окрестностью ячейки α, изображенной на рис. 1.

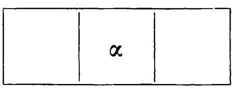

рис. 1.

Ячейку одномерной ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$ можно реализовать в виде схемы, изображенной на рис. 2.; здесь буквой з обозначен элемент двоичной задержки на один такт; Σ-схема, построенная в некотором базисе элементов, реализующих функции алгебры логики $\psi_1, \ldots, \psi_m$, такая, что

$y = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Систему $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ функций алгебры логики назовем универсальной, если из элементов, реализующих функции этой системы, можно построить схема вида рис. 2, задающую универ-

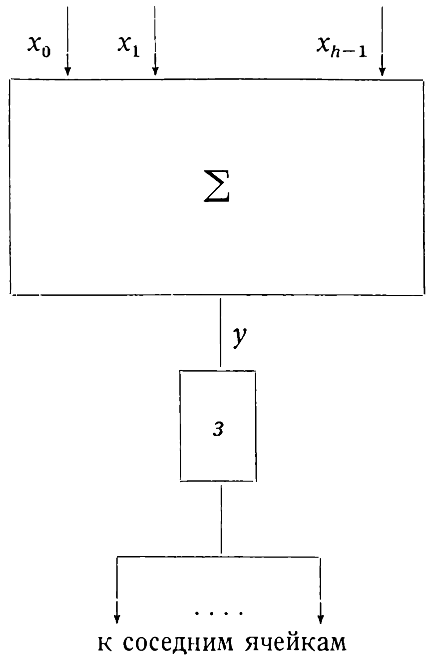

рис. 2.

сальную одномерную ОС. Чтобы сформулировать критерий универсальности системы S, напомним обозначения некоторых замкнутых классов функций алгебры логики (см. [5]). L_1 есть класс всех линейных функций, то есть функций $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \pmod 2$ $(c_i \in \{0, 1\})$; S_6 есть класс всех функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_m}$, а также 0, 1; P_6-класс функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}$, а также 0, 1; F_4^∞ есть класс функпий вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \vee g(x_1, \ldots, x_n)$, и F_8^∞ — класс всех функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 2. Система S функций алгебры логики универсальна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $L_1, S_6, P_6, F_4^\infty, F_8^\infty$.

2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 2.1 Если ОС σ_1 представима в ОС σ_2, а ОС σ_2 — в ОС σ_3, то ОС σ_1 представима в ОС σ_3.

Лемма 2.2 Для любой одномерной ОС σ_1 существует одномерная ОС σ_2 с окрестностью ячейки α вида рис. 1, в которой представима σ_1.

Лемма 2.3 Существует одномерная ОС σ_0, в которой каждое поведение, начинающееся с состояния, вид которого указан на рис. 3, обладает тем свойством, что ячейки α_i принимают состояние $*$ в точности в моменты $0,\ \tau,\ 2\tau,\ 3\tau,\ \ldots$, где $\tau = 2^l(l+1)$.

$\ldots 0$	$*$	$0 \ldots 0$	$*$	$0 \ldots 0$	$*$	$0 \ldots 0$	$*$	$0 \ldots$
	$\alpha-1$	$\underbrace{\qquad}_{l}$	α_0	$\underbrace{\qquad}_{l}$	α_1	$\underbrace{\qquad}_{l}$	α_2	

рис. 3.

Лемма 2.1 очевидна; доказательство леммы 2.2 содержится в [4]. Для доказательства леммы 2.3 рассмотрим ОС σ_0 с окрестностью ячейки вида рис. 1. Состояния ячейки ОС σ_0 нам будет удобно изображать в виде пар (x_1, x_2), где $x_i \in \{0, 1, 2\}$ причем нулевое состояние есть $(0, 0)$, а состояние $*$ — $(2,2)$. Для задания функции переходов ОС σ_0 обозначим состояние ячейки α в момент t посредством $A = (A_1,\ A_2)$; состояния ячеек $\alpha - 1$ и $\alpha + 1$ — посредством $B = (B_1,\ B_2)$ и $C = (C_1, C_2)$ соответственно. Состояние $A' = (A_1',\ A_2')$, в котором ячейка α оказывается в момент $t+1$, определяется следующим образом:

1. Если $A_2 = 2;\ A_1 \neq 2$, то $A_1' = 1 - A_1$.
2. Если $A_2 \neq 0$, то $A_2' = 0$.
3. Если $A_2 = 0$ и либо $C_2 = 1, C_1 \neq 2$, либо $C_2 = 2, C_1 = 0$, то $A_2' = 1$.
4. Если $A_2 = 0, C_1 = 2, C_2 \neq 0$, то $A_2' = 2$.

В остальных случаях $A_i' = A_i$.

Пусть в некоторый момент t ОС σ_0 имеет состояние вида рис. 4, где $c \in \{1,\ 2\}$; $b_i \in \{0,\ 1\}$. Тогда, как легко следует из п. п. 1—4, ненулевые b-компоненты состояний ячеек будут перемещаться влево, переводя набор $b_1 \ldots b_l$ в такой набор $b_1' \ldots b_l'$, что

$$b' = \sum_{i=1}^{l} 2^{l-i} b_i' = \sum_{i=1}^{l} 2^{l-i} b_i + 1 (\operatorname{mod} 2^l) = b + 1\ (\operatorname{mod} 2^l).$$

$x_1 \to$	b_l	2	b_1	b_2	$\ldots$	b_l	2	b_1	b_2	$\ldots$	b_l	2	b_1	$\ldots$
$x_2 \to$	0	c	0	0	$\ldots$	0	c	0	0	$\ldots$	0	c	0	$\ldots$
		$\alpha-1$					α_0					α_1		

рис. 4.

Если при этом $b_1' = \ldots = b_l' = 0$, то к моменту $t+l+1$ ОС σ_0 будет иметь состояние вида рис. 3; если же не все b_i' равны 0, то к этому моменту ОС σ_0 примет состояние, вид которого указан на рис. 4, где

$c = 1$ и b_i заменены на b_i'. В результате период появления состояния $*$ в ячейках α_i оказывается равен $2^l(l+1)$, что и требовалось.

Перейдем к описанию устройства универсальной одномерной ОС σ с окрестностью ячейки α, указанной на рис. 1. Состояния ячеек ОС σ будут изображаться наборами $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, где $x_1 \in \{0, 1, \ldots, 8\}$; $x_3 \in \{0, 1\}$ $x_4, x_5, x_9, x_{10} \in \{0, 1, 2\}$; $x_6, x_7 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $x_8 \in \{0, 1, 2, 3\}$, а x_2 пробегает множество состояний ячейки ОС σ_0 из леммы 2.3. Пусть в момент t состояние ячейки α есть $A = (A_1, \ldots, A_{10})$; состояния ячеек $\alpha-1$ и $\alpha+1$ — $B = (B_1, \ldots, B_{10})$ и $C = (C_1, \ldots, C_{10})$ соответственно. Тогда состояние $A' = (A_1', \ldots, A_{10}')$, в котором ячейка α оказывается в момент $t+1$, определяется при помощи таблицы 1. Если при этом имеет место ситуация, не предусмотренная в таблице 1, то считается, что

Таблица 1

1. $A_2' = \varphi_0(A_2, B_2, C_2)$, где φ_0 — функция переходов ОС σ_0 из леммы 2.3.
2. $B_1 = 0$; $A_1 \in \{1, 2\} \Rightarrow A_1' = 0$.
3. $A_1 = 0$; $C_1 \in \{1, 2\} \Rightarrow A_1' = C_1$.
4. $A_1 \neq 0$; $A_3 = 1$; $A_4 = A_5 = 0 \Rightarrow A_1' = 0$; $A_4' = A_1$; $A_5' = A_1$.
5. $A_1 = 0$; $C_1 = 5 \Rightarrow A_1' = \max(C_4, C_5)$.
6. $A_1 \neq 0$, причем либо $A_7 = 4$, либо $B_6 = 3 \Rightarrow A_1' = 0$.
7. $A_1 = 0$; $C_1 = 4 \Rightarrow A_1' = A_1' = C_9$.
8. $A_1 = 0$; $C_1 \in \{3, 6, 7, 8\} \Rightarrow A_1' = C_{10}$.
9. $A_3 = 0$; $B_2 = * \Rightarrow A_3' = 1$.
10. $A_3 = 1$; $A_1 = C_1 = 0 \Rightarrow A_3' = 0$.
11. $A_3 = A_4 = 0$; $B \neq 5 \Rightarrow A_4' = B_4$.
12. $A_i \neq 0$; $i \in \{4, 5, 8, 9, 10\} \Rightarrow A_i' = 0$.
13. $A_3 = 0$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A_5' = C_5$.
14. $A_6 \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow A_6' = 0$.
15. Пусть $A_6 = B_6 = A_7 = B_7 = 0$. Тогда:
   а) $A_4 = B_4 = 0$; $C_4 \neq 0$; $C_1 = 5 \Rightarrow A_6' = 1$; $A_7' = 1$.
   б) $A_1 = 4$; $C_6 \in \{1, 2\}$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A_6' = C_6 + 1$.
   в) $A_1 \neq 4$; $C_6 \in \{1, 2\}$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A_6' = C_6$.
16. $A_6 = 3$; $A_1 \in \{4, 5\}$; $C_1 = C_8 = 0 \Rightarrow A_6' = 4$.
17. $B_6 = 4$; $A_1 \notin \{4, 5\}$; $B_1 \neq 5$; $A_6 = 0 \Rightarrow A_6' = 4$.
18. $A_1 = B_6 = 4$; $A_6 = 0 \Rightarrow A_6' = 3$.
19. $A_7 \in \{1, 2, 3\}$; $A_1 \neq A_7 + 5 \Rightarrow A_7' = 0$.

20. $A_7 = 0;\ B_7 \in \{1, 2, 3\};\ B_1 \neq B_7+5;\ B_8 \neq 3 \Rightarrow A'_7 = B_7.$
21. $A_7 \neq 0;\ A_8 \in \{2, 3\} \Rightarrow A'_7 = 0.$
22. $A_7 = 0;\ B_7 \neq 0;\ B_8 \in \{2, 3\} \Rightarrow A'_7 = B_7 + B_8 - 2.$
23. $A_7 = 4;\ A_1 = A_9 = 0 \Rightarrow A'_7 = 0.$
24. $B_6 = 3;\ A_1 \neq 0;\ A_8 = 0 \Rightarrow A'_8 = A_1.$
25. $B_7 = A_8 = 0;\ B_6 \notin \{3, 4\} \Rightarrow A'_8 = B_8.$
26. $B_6 = 3;\ B_1 \in \{4, 5\};\ A_1 = A_8 = 0 \Rightarrow A'_8 = 3.$
27. $A_7 = 4;\ A_9 = 0 \Rightarrow A'_9 = A_1.$
28. $A_7 \neq 4;\ C_1 \neq 3;\ A_9 = 0 \Rightarrow A'_9 = C_9.$
29. $C_7 = 4;\ A_{10} = 0 \Rightarrow A'_{10} = C_1.$
30. $C_7 \neq 4;\ A_{10} = 0;\ B_1 \notin \{3, 6, 7, 8\} \Rightarrow A'_{10} = B_{10}.$

Покажем, что построенная таким образом ОС σ универсальна. Для этого, в силу лемм 2.1 и 2.2, достаточно показать, что в ней представима любая одномерная ОС σ' с окрестностью ячейки вида рис. 1. Пусть $\sigma' = \langle Z, E_n, V' \varphi' \rangle$, где $V' = \{1,1\}$. Состояние $i \in E_n$ ячейки ОС σ будем кодировать состоянием отрезка длины $l = n^4 + n^2 + 5n + 1$ в ОС σ, вид которого указан на рис. 5, где изображены лишь x_1-компоненты состоя-

	$\overbrace{}^{i}$	$L_0 \downarrow$	$\overbrace{}^{i}$	$L_1 \downarrow$	$L_2 \downarrow$		$L_3 \downarrow$		
3	2...2 1...1	4	2...2 1...1	4	0...0	5	0...0	5	T
	$\underbrace{}_{n-1}$		$\underbrace{}_{n-1}$		$\underbrace{}_{n-1}$		$\underbrace{}_{n-1}$		

рис. 5.

ний ячеек. При $i \neq 1$ x_i-компоненты состояний ячеек этого отрезка равны 0, за исключением x_2-компоненты состояния левого конца отрезка, равной $*$ (см. лемму 2.3). Отрезок T служит для кодирования таблицы функции переходов φ'; он устроен так, как показано на рис. 6 (указаны x_1-компоненты состояний ячеек).

T:	6	T_0	6	T_1	6			6	T_{n-1}
T_i:	7	T_{i0}	7	T_{i1}	7			7	$T_{i,n-1}$
T_{ij}:	8	T_{ij0}	8	T_{ij1}	8			8	$T_{ij,n-1}$

$$T_{ijk}\colon\ \boxed{\underbrace{\overbrace{2\ldots2}^{\varphi'(i,j,k)}\,1\ldots1}_{n-1}}$$

рис. 6.

Пусть в момент $t=0$ ОС σ имеет состояние f, кодирующее некоторое состояние g ОС σ', причем состояние ячейки α ОС σ' кодируется состоянием отрезка P_α в ОС σ. Выделим в каждом P_α отрезки L_0, L_1, L_2, L_3, T так, как это показано на рис. 5. Тогда, как следует из п. 9 таблицы 1, при $t=1$ x_3-компоненты левых концов отрезков P_α станут равы 1. Используя п.п. 2—5, 10—13 таблицы 1, нетрудно проследить, что после этого содержимое x_1-компонент отрезков L_0 начнет передаваться по x_4 и x_5-компонентам состояний ячеек ОС σ соответственно вправо и влево, и в конце концов заполнит x_1-компоненты состояний ячеек отрезка L_2, находящегося внутри $P_{\alpha+1}$, и отрезка L_3, находящегося внутри $P_{\alpha-1}$. В результате x_1-компоненты состояний ячеек отрезка примут вид, указанный на рис. 7. При этом (см. п. 15а таблицы 1) x_6 и x_7-компоненты

			$g(\alpha)$		$g(\alpha-1)$		$g(\alpha+1)$		
3	0...0	4	2...21...1	4	2...21...1	5	2...21...1	5	T
		$\uparrow\gamma_1$		$\uparrow\gamma_2$	$\uparrow\beta$	$\uparrow\gamma_3$			

рис. 7.

состояния ячейки β (см. рис. 7) окажутся равными 1; прочие компоненты (кроме x_2-компонент) состояний ячеек отрезка P_α будут равны 0. Как следует из п. п. 14, 15б, в таблицы 1, ненулевая x_6-компоненте состояния ячейки будет перемещаться влево по отрезку P_α, пока на достигнет ячейки γ_1 (рис. 7), так что x_6-компонента состояния ячейки γ_1 станет равной 3. Одновременно (см. п. п. 19, 20 таблицы 1) единичная x_7-компонента состояния ячейки переместится по отрезку P_α вправо до первой ячейки отрезка T. В тот момент, когда x_6-компонента состояния ячейки γ_1 станет равной 3, начнется передача x_1-компонент состояний ячеек отрезка L_1 по x_8-компонентам вправо по отрезку P_α (см. п. п. 6, 24, 25 таблицы 1). При этом ненулевой сигнал в x_8-компоненте исчезнет в ячейке с x_7-компонентой, равной 1 (п. 25 таблицы 1) и, если этот сигнал был равен 2, то единичная x_7-компонента состояния ячейки начнет перемещаться вправо до следующей ячейки с x_1-компонентой, равной 6 (п. п. 19—22 таблицы 1). В результате по окончании передачи x_1-компонент состояний ячеек отрезка L_1 по x_8-компонентам единичную x_7-компоненту будет иметь ячейка отрезка T, расположенная непосредственно слева от отрезка $T_{g(\alpha)}$. После прохождения последнего ненулевого сигнала отрезка L_1 через ячейку γ_1 x_6-компонента состояния этой ячейки становится равной 4, а x_8-компонента ячейки γ_{1+1}-равной 3 (см. п. п. 16, 26 таблицы 1), и ненулевой сигнал в x_6-компонентах состояний ячеек перемещается вправо до ячейки γ_2, у которой x_6-компонента состояния становится равной 3 (см. п. п. 17, 18 таблицы 1). Значение 3 x_8-компоненты состояния ячейки перемещаестя вправо до ячейки с единичной x_7-компонентой состояния, после чего эта ячейка будет иметь нулевую x_7-компоненту, а ячейка, расположенная справа от нее (то есть первая ячейка отрезка $T_{g(\alpha)}$) будет иметь x_7-компоненту состояния, равную 2 (см. п. п. 21, 22 таблицы 1). Далть, аналогично описанному выше процессу, по x_8-компонентам состояний ячеек начнется передача вправо x_1-компонент состояний ячеек отрезка L_2; затем — отрезка L_3, и в некоторый момент x_1-компоненты состояний ячеек отрезка P_α примут вид, показанный на рис. 8, причем x_7-компонента первой ячейки отрезка

3	0...0	4	0...0	4	0...0	5	0...0	5	T

рис. 8.

$T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ будет равна 4, а прочие x_i-компоненты состояний ячеек отрезка P_α (кроме x_2-компонент) будут равны 0. Наконец, используя п. п. 6—8, 23, 27—30 таблицы 1, нетрудно проверить, что далее содержимое x_1-компонент состояний ячеек отрезка $T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ будет по x_9-компонентам передано в x_1-компоненты состояний ячеек отрезков L_0 и L_1(при этом для восстановления x_1-компонент состояний ячеек отрезка $T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ они по циклу через x_{10}-компоненты снова передаются на этот же отрезок). Таким образом, к некоторому моменту $t = t_0$ x_j-компоненты состояний ячеек отрезка P_α при $j \neq 1{,}2$ окажутся равными 0, а x_1-компоненты будут иметь вид на рис. 5, где $i = \varphi'(g(\alpha), g(\alpha-1), g(\alpha+1))$. Заметим, что изменения x_2-компонент состояний ячеек в ОС σ происходят независимо от прочих компонент, в соответствии с функцией переходов ОС σ_0 из леммы 2.3. Поэтому значение $*$ x_2-компоненты состояния левого конца отрезка P_α будет возникать в моменты $t = 0$, τ, 2τ ..., где $\tau = 2^l(l+1)$. Поэтому при $t_0 \leq \tau$ к моменту $t = \tau$ состояние отрезка P_α будет кодировать состояние $\varphi'(g(\alpha), g(\alpha-1), g(\alpha+1))$ ячейки ОС σ', что и завершит цикл моделирования перехода этой ОС. Так как, очевидно, $t_0 \leq cl$ для некоторой константы C, то существует такое n_0, что при $n \geq n_0$ $t_0 \leq cl \leq 2^l(l+1)$, то есть при $n \geq n_0$ любая ОС $\sigma = \langle Z, E_n, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС σ. Так как, очевидно, каждая ОС вида $\langle Z, E_m, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС $\langle Z, E_n, V', \varphi'' \rangle$ при $n \geq \max(m, n_0)$, то, с учетом леммы 2.1, любая ОС вида $\langle Z, E_n, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС σ, то есть ОС σ универсальна.

3. Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм.

Лемма 3.1 Если одномерная ОС σ_1 представима в ОС $\sigma_2 = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, причем функция алгебры логики φ принадлежит некоторому замкнутому классу K, то существует ОС σ_3 вида $\langle Z, E_2, V', \varphi'\rangle$, такая, что $\varphi' \in K$ и σ_1 представима в σ_3 с замедлением 1.

Пусть ОС σ_1 представима в ОС σ_2 с замедлением N. Как нетрудно заметить, состояние, которое ячейка α ОС σ_2 принимает через N моментов времени, зависит только от состояния в настоящий момент множества ячеек $\alpha + \underbrace{\tilde{V} + \ldots + \tilde{V}}_{n}$, где $\tilde{V} = V \cup \{0\}$ (имеется в виду множество всевозможных сумм вида $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, где $\alpha_i \in \tilde{V}$), которое можно рассматривать как окрестность ячейки α, определяемую некоторым шаблоном соседства V'. Функция φ', осуществляющая данную зависимость, получается суперпозициями из функции φ, то есть $\varphi' \in K$, и ясно, что ОС σ_1 представима в ОС σ_3 $\langle Z, E, V', \varphi'\rangle$ с замедлением 1.

Лемма 3.2. Не существует универсальной одномерной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу L_1.

Предположим, что существует универсальная ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $\varphi \in L_1$. Тогда в ней представима ОС $\sigma_1 = \langle Z, E_2, V_1, \varphi_1\rangle$, где $V_1 = \{-1, 1\}$; $\varphi_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 \vee x_1 \vee x_2$, и по лемме 3.1 найдется ОС $\sigma_2 = \langle Z, E_2, V_2, \varphi_2\rangle$, в которой σ_1 представима с замедлением 1, причем $\varphi_2 \in L_1$. Пусть f-состояние ОС σ_1, у которого каждая ячейка имеет состояние 1; g-состояние ОС σ_1, у которого ячейка 0 имеет состояние 0, а прочие ячейки – состояние 1. Тогда $\Phi_1(f) = f$; $\Phi_1(g) = f$ (Φ_1-основная функция переходов ОС σ_1). Поэтому, если обозначить f', g' состояния ОС σ_2, кодирующие состояния f и g ОС σ_1, то будем иметь $\Phi_2(f') = \Phi_2(g') = f'$. Так как f' и g' отличаются друг от друга лишь на отрезке конечной длины, то из последнего равенства вытекает существование в ОС σ_2 взаимно стираемых конфигураций (см. [1,3]), что в случае $\varphi_2 \in L_1$ возможно лишь при $\varphi_2 \equiv 0$ либо при $\varphi \equiv 1$. Эти случаи, очевидно, также невозможны, ибо в σ_2 представима невырожденная ОС σ_1. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 3.3 Не существует одномерной универсальной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу F_4^∞.

Рассмотрим произвольную ОС σ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$; $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) \in F_4^\infty$, то есть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) = x_i \vee \psi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Если в момент t ячейка α ОС σ имеет состояние 1, то в момент $t+1$, как нетрудно заметить, ячейка $\alpha - \alpha_i$ тоже окажется в состоянии 1, и вообще в момент $t+k$ состояние 1 будет иметь ячейка $\alpha - k\alpha_i$. Пусть ОС $\sigma_1 = \langle Z, E_2, V_1, \varphi_1\rangle$ представима в ОС σ с замедлением N. Рассмотрим произвольное состояние f ОС σ_1 и кодирующее его состояние g ОС σ; пусть состояние ячейки α ОС σ_1 при этом кодируется состоянием отрезка P_α длины l в ОС σ. Если j-я слева ячейка отрезка P_α находится в состоянии 1, то, обозначив эту ячейку β, получим, что через lN моментов в состоянии 1 окажется ячейка $\beta - lN\alpha_i$, которая является j-й слева ячейкой отрезка $P_{\alpha - N\alpha_i}$. Поэтому, если $(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ и $(\tau_1', \ldots, \tau_l')$ - наборы, определяющие состояния отрезка P_α при $t = 0$ и отрезка $P_{\alpha-N\alpha_i}$ при $t = lN$, то $\tau'_k \geq \tau_k$ $(k = 1, \ldots, l)$. Обозначим $\delta(x)$ набор $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$, используемый для кодирования состояния x ячейки ОС σ_1 $(x \in \{0, 1\})$; пусть $\delta(\varrho_1) \not\equiv \delta(\varrho_2)$. Тогда, если при $t = 0$ состояние отрезка P_α определяется набором $\delta(\varrho_1)$, то при $t = lN$ состояние отрезка $P_{\alpha-N\alpha_i}$ определяется тем же набором. Это условие для ОС σ_1 означает, что если в момент t некоторая ячейка α находится в состоянии σ_1, то в момент $t+l$ в том же состоянии должна оказаться ячейка $\alpha - N\alpha_i$. Если положить при $\alpha_i \neq 0$ $\varphi(x_0, \ldots, x_{h_1-1}) \equiv x_0$, а при $\alpha_i = 0$ $\varphi_1(x_0, \ldots, x_{h_1-1}) \equiv x$, то σ_1 не будет удовлетворять последнему условию, то есть она не будет представима в σ, и ОС σ не универсальна. Лемма доказана.

Так как ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$ универсальна тогда и только тогда, когда универсальна двойственная ОС $\sigma' = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, где $\varphi'(x_0, \ldots, x_{h-1}) = \overline{\varphi(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{h-1})}$, то вместе с леммой 3.3 получаем, что не существует и универсальной одномерной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу F_8^∞, двойственному для F_4^∞. Так как $S_6 \cup P_6 \subseteq F_4^\infty \cup F_8^\infty$, то не существует также универсальной одномерной ОС с локальной функцией переходов из P_6 либо из S_6. Таким образом, если система функций S содержится в одном из классов P_6, S_6, L_1, F_4^∞, F_8^∞, то суперпозициями функций этой системы нельзя получить функцию переходов универсальной ОС, и первая часть утверждения теоремы 2 доказана. Для доказательства второй части заметим, что, как видно из диаграммы Поста (см. [5]), каждый замкнутый класс функций алгебры логики, не содержащийся ни в одном из классов P_6, S_6, L_1 F_4^∞, F_8^∞, содержит один из классов D_2, F_μ^∞, F_6^∞ $(\mu = 2, 3, \ldots)$ (см. [5]). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что в каждом из этих классов существует локальная функция переходов универсальной одномерной ОС. Для рассмотрения класса D_2, состоящего из монотонных самодвойственных функций, нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 3.4. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$-различные попарно несравнимые двоичные наборы длины n, причем $\beta_i = \overline{\alpha}_i$. Тогда для любого двоичного набора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in D_2$ такая, что $f(\alpha_i) = \gamma_i$; $i = 1, 2, \ldots m$.

Пусть $\delta_i = \alpha_i^{\gamma_i}$, $\nu_i = \alpha_i^{\overline{\gamma}_i}$. Тогда $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m\} = \{\delta_1, \ldots \delta_m, \nu_1 \ldots, \nu_m\}$, $\nu_i = \overline{\delta}_i$, причем для доказательства леммы требуется построить функцию $f \in D_2$ такую, что $f(\delta_i) = 1$; $f(\nu_i) = 0$. Так как наборы δ_i, ν_i попарно несравнимы, то ни для какого набора α не может одновременно выполняться $\alpha \geq \delta_i$ и $\alpha \leq \nu_j$. Поэтому определим f следующим образом: если $\alpha \leq \nu_i$ для некоторого i, то $f(\alpha) = 0$; если $\alpha \geq \delta_i$ для некоторого i, то $f(\alpha) = 1$. Если набор α несравним ни с одним из наборов δ_i, ν_i, причем число единиц в α меньше, чем $\frac{n}{2}$, то полагаем $f(\alpha) = 0$; если оно больше, чем $\frac{n}{2}$, то $f(\alpha) = 1$; если же набор α содержит ровно

$\frac{n}{2}$ единиц, то на наборах α, $\overline{\alpha}$ определяем значения f произвольно, с соблюдением условия $f(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})}$. Нетрудно проверить, что построенная таким образом функция f является монотонной и самодвойственной.

Лемма 3.5 Существует универсальная ОС σ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, такая, что $\varphi \in D_2$.

Пусть $\sigma' = \langle Z, E_n, V', \varphi'\rangle$-универсальная ОС и $V' = \{-1, 1\}$; существование такой ОС установлено в теореме 1. Покажем, что возможно так подобрать локальную функцию переходов $\varphi \in D_2$ ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $V = \{-4n-11, -4n-10, \ldots, -1, 1, \ldots, 4n+10, 4n+11\}$, что σ' окажется представима в ОС σ с замедлением 1. Состояние $i \in E_n$ ячейки ОС σ' закодируем состоянием отрезка длины $2n+6$ в ОС σ, определяемым набором $\underbrace{1, \ldots, 1}_{n+2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{i+2}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1-i}$. При этом каждое состояние f ОС σ' будет кодироваться состоянием $g = \Theta(f)$ ОС σ, у которого отрезки $P_\alpha = \{x/(2n+6)\,\alpha \leq x < (2x+6)(\alpha+1)\}$ имеют состояния, кодирующие состояния $f(\alpha)$. Обозначим $\mathfrak{M}_\beta$ множество двоичных наборов длины $8n+23$, определяющих состояния окрестности $V(\beta)$ ячейки $\beta \in P_\alpha$, возникающие при указанном кодировании различных состояний ОС σ'. Если β есть i-я слева ячейка отрезка P_α, то каждый принадлежащий $\mathfrak{M}_\beta$ набор имеет вид $\xi_1, \ldots, \xi_{2n+6-i}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6}, \varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+6}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2n+6}, \psi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$, где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6})$ — набор, кодирующий состояние $f(\alpha-1)$; $(\varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+6})$ — набор, кодирующий $f(\alpha)$ и $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2n+6})$ — набор, кодирующий $f(\alpha+1)$, причем в наборе $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n+6-i})$ не встречаются подряд $n+2$ единицы, а набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6})$ начинается с $n+2$ единиц и $\xi_{2n+6-i} = 0$. Поэтому для различных ячеек $\beta \in P_\alpha$ множества $\mathfrak{M}_\beta$ не пересекаются, причем по любому набору $\nu \in \mathfrak{M}_\beta$ однозначно восстанавливаются состояния $f(\alpha-1)$, $f(\alpha)$ и $f(\alpha+1)$. Чтобы определить значение $\varphi(\nu_0, \nu_{-4n-11}, \nu_{-4n-10}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \ldots, \nu_{4n+11})$, где $\nu = (\nu_{-4n-11}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{4n+11}) \in \mathfrak{M}_\beta$, поступаем теперь следующим образом: сначала по набору ν восстанавливаем значения $f(\alpha-1)$, $f(\alpha)$ и $f(\alpha+1)$; затем находим значение $\varphi'(f(\alpha), f(\alpha-1), f(\alpha+1))$ и набор $(\gamma_1 \ldots, \gamma_{2n+6})$, кодирующий это значение, после чего по определению полагаем $\varphi(\nu_0, \nu_{-4n-11}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_{4n+11}) = \gamma_i$. При таком определении значений фунции φ на наборах указанного вида, как нетрудно заметить, ОС σ' оказывается представима в ОС σ с замедлением 1. Покажем, что на остальных наборах функцию φ можно доопределить так, чтобы она вошла в класс D_2. Для этого, согласно лемме 3.4, достаточно установить, что различные наборы из множеств $\mathfrak{M}_\beta$, где $\beta \in P_\alpha$ при фиксированном α, а также отрицания этих наборов не сравнимы друг с другом. При $\beta_1 \neq \beta_2$ несравнимость друг с другом наборов из $\mathfrak{M}_{\beta_1}$ и $\mathfrak{M}_{\beta_2}$ вытекает из различного расположения в этих наборах кортежей из $n+2$ единиц; при $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M}_\beta$, $\nu_1 \neq \nu_2$, несравнимость ν_1 с ν_2 вытекает из различного расположения в этих наборах изолированных единиц. Поэтому любые два различных набора $\nu_1, \nu_2 \in \bigcup_{\beta \in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ а также их отрицания, несравнимы друг с другом. Если $\nu_1 \in \mathfrak{M}_{\beta_1}$, то набор $\bar{\nu}_1$ содержит кортежи из единиц длиной не более чем $n+1$, и поэтому невозможно соотношение $\nu_2 \leq \bar{\nu}_1$ при $\nu_2 \in \bigcup_{\beta \in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$. С другой стороны, в $\bar{\nu}_1$ имеется кортеж вида $\overbrace{1, \ldots, 1}^{j}, 0, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n+3-j}$, и если $\bar{\nu}_1 \leq \nu_2$ при $\nu_2 \in \bigcup_{\beta \in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$, то в ν_2 можно выделить кортеж вида $\overbrace{1, \ldots, 1}^{j}, \Theta, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n+3-j}$, где $\Theta \in \{0, 1\}$. Но любые два кортежа из единиц в ν_2 отделены друг от друга хотя бы двумя нулями, так что $\Theta \neq 0$. Случай $\Theta = 1$ также невозможен, так как тогда в ν_2 нашелся бы кортеж из $n+4$ единиц, в то время как максимальная длина таких кортежей в ν_2 равна $n+2$. Поэтому $\bar{\nu}_1 \not\leq \nu_2$, и попарная несравнимость наборов из $\bigcup_{\alpha \in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ и их отрицаний доказана, а вместе с ней доказана и лемма 3.5.

Лемма 3.6 При любом натуральном $\mu \geq 2$ существует универсальная ОС σ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, где $\varphi \in F_2^\mu$.

Как и в предыдущей лемме, рассмотрим универсальную ОС $\sigma' = \langle Z, E_n, V', \varphi' \rangle$, где $V' = \{-1, 1\}$, и покажем, что возможно так подобрать локальную функицю переходов $\varphi \in F_2^\mu$ ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, что σ' окажется представима в ОС σ с замедлением 1. Здесь $V = \{-2l+1, -2l+2, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 2l-1\}$; $l = \max\left(n+4, \left[\dfrac{13\mu+1}{4}\right]+1\right)$. Состояние $i \in E_n$ ячейки ОС σ' закодируем состоянием отрезка длины l в ОС σ, определяемым набором $1, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{i+1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{l-i-4}$. При этом каждое состояние f ОС σ' будет кодироваться состоянием ОС σ, у которого отрезки P_α (см. лемму 3.5) имеют состояния, кодирующие состояния $f(\alpha)$. Пусть $\mathfrak{M}_\beta$-множество двоичых наборов длины $4l-1$, определяющих состояния окрестности $V(\beta)$ ячейки $\beta \in P_\alpha$, возникающие при указанном кодировании различных состояний ОС σ'. Как и при доказательстве леммы 3.5, получаем, что для различных ячеек $\beta \in P_\alpha$ множества $\mathfrak{M}_\beta$ не пересекаются и по любому набору $\nu \in \mathfrak{M}_\beta$ однозначно востанавливаются соответствующие состояния ячеек $\alpha-1$, α и $\alpha+1$ в ОС σ'; поэтому для представимости ОС σ' в ОС σ с замедлением 1 достаточно определить значения функции φ на наборах $(\nu_0, \nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2l-1})$, где $\nu = (\nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2l-1}) \in \mathfrak{M}_\beta$ так же, как это делалось при доказательстве леммы 3.5. Покажем, что на остальных наборах функцию φ можно доопределить так, чтобы она вошла в класс F_2^μ. При $\varkappa \geq \nu$, где $\nu \in \mathfrak{M}_\beta$ и $\varphi(\nu_0, \nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \ldots, \nu_{2l-1}) = 1$, положим $\varphi(\varkappa_0, \varkappa_{-2l+1}, \ldots, \varkappa_{-1}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2l-1}) = 1$ (это определение корректно, так как различные наборы из $\bigcup_{\beta \in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ несравнимы); если в наборе $\varkappa$ имеется более, чем 13 единиц, то полагаем $\varphi(\varkappa_0, \varkappa_{-2l+1}, \ldots, \varkappa_{-1}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2l-1}) = 1$ (это возможно в силу того, что каждый набор из $\bigcup\limits_{\beta \in P_\beta} \mathfrak{M}_\beta$ имеет не более 13 единиц); на остальных наборах значения функции φ полагаем равными 0. Тогда, по построению, φ есть монотонная α-функция, и остается проверить, что φ обладает свойством a_μ. Пусть $\tau_1 = (\tau_{11}, \ldots, \tau_{1\,4l-1})$; …; $\tau_\mu = (\tau_{\mu 1}, \ldots, \tau_{\mu, 4l-1})$ - наборы, на которых φ обращается в 0. Так как каждый из них имеет не более 13 единиц, то число разрядов, ненулевых хотя бы у одного из этих наборов, не превосходит 13μ. Имеем далее:

$$4l - 1 \geq 4\left(\left[\frac{13\mu + 1}{4}\right] + 1\right) \geq 4\,\frac{13\mu + 1}{4} = 13\mu + 1 > 13\mu,$$

то есть существует такое j, что $\tau_{1j} = \tau_{2j} = \ldots = \tau_{\mu j} = 0$, и свойство a_μ выполнено. Лемма доказана.

Так как класс F_6^μ двойственный для класса F_2^μ, то одновременно получаем существование одномерных универсальных ОС с локальной функцией переходов из F_6^μ. Таким образом, в каждом из классов D_2, F_2^μ, F_6^μ существуют локальные функции переходов универсальных одномерных ОС, что и завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мур Э. Ф.*, Математические модели самовоспроизведения. Сб «Математические проблемы в биологии», М., «Мир», 1966.

[2] *Подколзин А. С.*, О сложности моделирования в однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 30, М., «Наука», 1975.

[3] *Подколзин А. С.*, О поведениях однородных структур. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 31, М., «Наука», 1975.

[4] *Подколзин А. С.*, Об универсальных однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 34, М., «Наука», 1978.

[5] *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.*, Функции алгебры логики и классы Поста. М., Физматгиз, 1966.