О ПРИМЕНЕНИИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. МОЛНАРКА, Р. Х. ФАРЗАН

(Поступило 12. 10. 1978)

В настоящей работе результаты, полученные в [1] для одного уравнения обобщаются на случай системы дифференциальных уравнений параболического типа со слабой нелинейностью. Показаны достаточные условия для сходимости и устойчивости решения в метрике, эквивалентной равномерной.

Рассматривается краевая задача:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_j(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu(x,t)\,u_j\right)=f_j(x,t,u_1,\dots,u_K), \tag{1}$$

$$(x,t)\in\Omega=\{(x,t),\ x\in(0,1),\ t\in(0,T]\},\ j=1,\dots,K;$$

$$\begin{aligned} u_j(0,t)&=\varphi_1(t),\\ u_j(1,t)&=\varphi_2(t),\ t\in[0,T],\\ u_j(x,0)&=\varphi(x),\ x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{2}$$

Такого типа краевые задачи имеют место при моделировании многокомпонентных процессов в химических реакторах, причем, u_j — плотность j-той компоненты, $D_j>0$ — ее коэффициент диффузии, ν — скорость потока, f_j — функция источника. D_j, ν и f_j предполагаются непрерывными, D_j и ν, кроме того, непрерывно дифференцируемыми по x, а f_j удовлетворяет условию Липшица по u_m:

$$|f_j(x,t,u_1^*,\dots,u_K^*)-f_j(x,t,u_1^{**},\dots,u_K^{**})|\le\sum_{m=1}^{K}L_j^m|u_m^*-u_m^{**}|. \tag{3}$$

В дальнейшем для краткости будем записывать $f_j(_m)$, предполагая, что индекс m пробегает значения от 1 до K.

На области $\overline{\Omega}$ введем сетку

$$\overline{\Omega}_h = \{(x_i, t^n),\ x_i = i\,h,\ i = 0, 1, \ldots, M,$$
$$h = 1/M,\ t^n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots, N,\ \tau = T/N\}.$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений можно предложить различные неявные схемы. Мы будем рассматривать две схемы:

$$(4')\qquad A_j^{n+1} y_j^{n+1} = y_j^n + \tau f_j^n(y_m^n),$$
$$(4'')\qquad A_j^{n+1} y_j^{n+1} = y_j^n + \tau f_j^{n+1}(y_m^{n+1}),\qquad \begin{cases} j = 1, \ldots, K \\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

где

$$A_j^n (y_j^n)_i = y_{ji}^n - \frac{\tau}{h^2}\left[D_{ji+1/2}^n (y_{ji+1}^n - y_{ji}^n) - D_{ji-1/2}^n (y_{ji}^n - y_{ji-1}^n)\right] +$$

$$(5)\qquad + \frac{\tau}{2h}\left[v_{i+1/2}^n (y_{ji+1}^n + y_{ji}^n) - v_{i-1/2}^n (y_{ji}^n - y_{ji-1}^n)\right]$$

и обозначено: $y_j^n = \{y_{j1}^n, \ldots, y_{jM}^n\}^T$. y_{ji}^n приближает значение функции u_j в точке (x_i, t^n). Схемы (4′) и (4″), если разделить их на τ, аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения (1) с точностью $O(\tau + h^2)$. Граничные условия для систем разностных уравнений определяются из (2) без погрешности.

Введем вектор $\mathbf{y}^n = \{y_1^n, \ldots y_K^n\}^T$. Таким образом, его размерность $K \times M$. Определим для y_j^n естественную норму:

$$(6)\qquad \|y_j^n\|_K = \max_i |y_{ji}^n|\,.$$

Введем, кроме того, K-норму вектора $\mathbf{y}^n$ следующим образом:

$$(7)\qquad \|\mathbf{y}^n\|_K = \sum_{j=1}^{K} \|\mathbf{y}_j^n\|\,.$$

Если теперь (4′) и соответственно (4″) переписать в виде:

$$(8')\qquad A^{n+1}\,\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \tau\,\mathbf{f}^n(\mathbf{y}^n),$$
$$(8'')\qquad A^{n+1}\,\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \tau\,\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{n+1}),$$

то очевидно матрица A^n имеет блочную структуру, причем вдоль главной диагонали расположены квадратные матрицы A_j^n одинаковой размерности $M \times M$. Остальные элементы — нули.

В [2] было показано, что для матрицы вида A_j^n

$$(9)\qquad \|(A_j^n)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \tau \cdot c}\,,$$

где $c = \sup\limits_{x,t} |v(x,t)|$, причем заданные в [2] условия в нашем случае преобразуются к виду:

$$h \le \min_j \inf_{x,t} \frac{2D_j(x,t)}{\|v(x,t)\|}. \tag{10}$$

Таким образом, эта оценка не зависит ни от n, ни от j, и следовательно одинакова для всех n и j. Более того, поскольку $(A^n)^{-1}$ - блочная матрица, где вдоль главной диагонали располагаются матрицы $(A_j^n)^{-1}$, то и норма $(A^n)^{-1}$ оценивается также, причем как в норме, соответствующей равномерной метрике, так и в метрике, соответствующей K-норме:

$$\|(A^n)^{-1}\|_K = \|(A^n)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\tau\cdot c}. \tag{11}$$

Система уравнений (8′) представляет линейную систему относительно $\mathbf{y}^{n+1}$ с тридиагональной матрицей при каждом n, и для ее решения можно использовать метод прогонки, причем при выполнении условия (10) этот метод будет устойчивым и сходящимся [2], [3]. Система уравнений (8″) есть нелинейная система и для ее решения при фиксированном n предлагается использовать метод итерации:

$$A^{n+1} \overset{(S+1)}{\mathbf{y}^{n+1}} = \mathbf{y}^n + \tau\, \mathbf{f}^n(\overset{(S)}{\mathbf{y}^{n+1}}), \tag{12}$$

где S – номер итерации, или

$$\overset{(S+1)}{\mathbf{y}^{n+1}} = \mathbf{g}(\overset{(S)}{\mathbf{y}^{n+1}}) \equiv (A^{n+1})^{-1}[\mathbf{y}^n + \tau\, \mathbf{f}^n(\overset{(S)}{\mathbf{y}^{n+1}})].$$

Для сходимости итерационного процесса (12) необходимо и достаточно, чтобы существовало $q<1$ такое, что [4]:

$$\varrho(\mathbf{g}(\mathbf{y}^*), \mathbf{g}(\mathbf{y}^{**})) \le q\varrho(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^{**}). \tag{13}$$

Пусть

$$\varrho(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^{**}) = \|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}^{**}\|_K. \tag{14}$$

Тогда, из (12),

$$\varrho(\mathbf{g}(\mathbf{y}^*), \mathbf{g}(\mathbf{y}^{**})) \le \|(A^{n+1})^{-1}\|_K \cdot \tau \|\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^*) - \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{**})\|_K. \tag{15}$$

Из (3) и (7) следует, что

$$\|\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^*) - \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{**})\|_K \le \sum_{m=1}^{K} \|y_m^* - y_m^{**}\| \cdot \sum_{j=1}^{K} L_j^m.$$

Если обозначить

$$L = \max_m \left(\sum_{j=1}^{K} L_j^m \right),$$

то очевидно

$$\|\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^*)-\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{**})\|_K \leq L\|\mathbf{y}^*-\mathbf{y}^{**}\|_K. \tag{16}$$

Следовательно, для сходимости итерационного процесса достаточно потребовать

$$\frac{\tau}{1-\tau c}\cdot L<1,$$

откуда

$$\tau<\frac{1}{c+L}. \tag{17}$$

Очевидно, условие (17) легко выполнимое.

Рассмотрим достаточные условия для сходимости решения системы разностных уравнений y_j к решению u_j исходной системы дифференциальных уравнений. Обозначим:

$$Z_{ji}^n = y_{ji}^n-u_{ji}^n,\ u_{ji}^n = u_j(x_i, t^n).$$

Введем аналогично предыдущему вектора $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{u}^n$ и запишем для погрешности решения соотношения:

$$\mathbf{Z}^{n+1} = (A^{n+1})^{-1}[\mathbf{Z}^n+\tau(\mathbf{f}^n(\mathbf{y}^n)-\mathbf{f}^n(\mathbf{u}^n))+\mathbf{R}^n],$$

$$\mathbf{Z}^{n+1} = (A^{n+1})^{-1}[\mathbf{Z}^n+\tau(\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{n+1})-\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1}))+\mathbf{R}^{n+1}], \tag{18}$$

где

$$\|\mathbf{R}^n\|_K = \tau\cdot 0(\tau+h^2)$$

Переходя к K-норме и пользуясь (11) и (16), получим:

$$\|\mathbf{Z}^{n+1}\|_K\leq\frac{1+\tau L}{1-\tau c}\|\mathbf{Z}^n\|_K+\tau\, 0(\tau+h^2). \tag{19'}$$

$$\|\mathbf{Z}^{n+1}\|_K\leq\frac{1}{1-\tau c}\|\mathbf{Z}^n\|_K+\frac{\tau L}{1-\tau c}\|\mathbf{Z}^{n+1}\|_K+\tau\, 0(\tau+h^2). \tag{19''}$$

Подставляя вместо $\|\mathbf{Z}^n\|_K$ его оценку через $\|\mathbf{Z}^{n-1}\|_K$ и продолжая этот процесс, получим:

$$\|\mathbf{Z}^n\|_K\leq\left(\frac{1+\tau L}{1-\tau c}\right)^n\|\mathbf{Z}^0\|_K+\tau\, 0(\tau+h^2)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+\tau L}{1-\tau c}\right)^k, \tag{20'}$$

$$\|\mathbf{Z}^n\|_K\leq\left(\frac{1+\tau L}{1-\tau(c+L)}\right)^n\|\mathbf{Z}^0\|_K+\tau\, 0(\tau+h^2)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1-\tau(c+L)}\right)^k. \tag{20''}$$

В [1] было показано, что при условии

$$(21') \qquad \tau \leq \frac{1}{2c},$$

и соответственно,

$$(21'') \qquad \tau \leq \frac{1}{2(c+L)},$$

имеет место оценка:

$$(22) \qquad \frac{1+\tau L}{1-\tau c} \leq e^{\tau(L+2c)}, \quad \frac{1}{1-\tau(c+L)} \leq e^{2\tau(L+c)}.$$

Учитывая, что $\|\mathbf{Z}^0\|_K = 0$, и $\tau \cdot N = T$, получим

$$(23') \qquad \|\mathbf{Z}^n\|_K \leq 0(\tau+h^2)\cdot Te^{T(L+2c)} \cong 0(\tau+h^2),$$

$$(23'') \qquad \|\mathbf{Z}^n\|_K \leq 0(\tau+h^2)\cdot Te^{2T(L+c)} \cong 0(\tau+h^2).$$

Таким образом, при выполнении (21′) и соответственно (21″) решение разностной задачи сходится к решению исходной дифференциальной задачи. Отметим, что условие (21′) более строгое, чем (17), хотя тоже легко выполнимое.

Покажем теперь достаточные условия для устойчивости решения системы (8″) (случай (8′) отличается несущественно). При этом мы рассмотрим устойчивость как по начальным данным, так и по правой части уравнения. Пусть $\tilde{\mathbf{y}}^n$-решение системы уравнений

$$(24) \qquad A^{n+1}\,\tilde{\mathbf{y}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{y}}^n + \tau\tilde{\mathbf{f}}^{n+1}(\tilde{\mathbf{y}}^{n+1})$$

с начальными условиями $\tilde{y}_j^0 = \tilde{\varphi}_j$ и граничными условиями, совпадающими с условиями задачи для y^n. Относительно возмущенной функции $\tilde{\mathbf{f}}^n$ предполагаем, что она также удовлетворяет условию Липшица:

$$(25) \qquad \|\tilde{f}_j^n(\tilde{y}_m^*) - \tilde{f}_j^n(\tilde{y}_m^{**})\| \leq \sum_{m+1}^{K} \tilde{L}_j^m \,\|\tilde{y}_m^* - \tilde{y}_m^{**}\|.$$

Обозначая $\tilde{\mathbf{Z}}^n = \mathbf{y}^n - \tilde{\mathbf{y}}^n$, получим:

$$(26) \qquad \tilde{\mathbf{Z}}^{n+1} = (A^{n+1})^{-1}[\tilde{\mathbf{Z}}^n + \tau(\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{y}^{n+1}) - \tilde{\mathbf{f}}^{n+1}(\tilde{\mathbf{y}}^{n+1}))],$$

откуда, переходя к К-норме,

$$(27) \qquad \|\tilde{\mathbf{Z}}^{n+1}\|_K \leq \frac{1}{1-\tau c}\,[\|\tilde{\mathbf{Z}}^n\|_K + \tau(r_{n+1} + \tilde{L}\cdot\|\tilde{\mathbf{Z}}^{n+1}\|_K)],$$

где

$$\tilde{L} = \max_m \left(\sum_{j=1}^{K} \tilde{L}_j^m\right), \quad r_n = \|f^n(y^n) - \tilde{f}^n(y^n)\|_K.$$

Используя схему доказательства, приведенную выше, при

$$\tau \leq \frac{1}{2(c+\tau)} \tag{28}$$

получим:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}^n\|_K \leq e^{2T(\tilde{L}+c)}\,\|\tilde{\mathbf{Z}}^0\|_K + T \cdot e^{2T(\tilde{L}+c)} \cdot \max_n r_n .$$

Так как коэффициенты не зависят от n, эта оценка сохраняется для всех n, и следовательно,

$$\max_n \|\mathbf{y}^n - \tilde{\mathbf{y}}^n\|_K \leq K_1 \sum_{j=1}^{K} \|\varphi_j - \tilde{\varphi}_j\| + K_2 \max_n \|f^n(\mathbf{y}^n) - \tilde{\mathbf{f}}^n(\mathbf{y}^n)\|_K , \tag{29}$$

где значения K_1 и K_2 очевидны.

Полученная оценка есть выражение устойчивости решения разностного уравнения (8″) относительно возмущения начальных данных и правой части уравнения [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Д. Молнарка, Р. Х. Фарзан, Л. Фаи.* О применении неявной разностной схемы для решения одномерного дифференциального уравнения параболического типа со слабой нелинейностью MTA SZTAKI közlemények 21/1978, Budapest.

[2] *Я. Н. Farzan, G. Molnárka:* On uniform convergence and stability of finite difference equation of boundary value problems of weakly nonlinear parabolic equation in cylinder with axial symmetry Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 22. Numerical Methods, Keszthely (Hungary), 1977.

[3] *А. А. Самарский.* Теория разностных схем. М. 1977.

[4] *Н. С. Бахвалов.* Численные методы. М. 1973.

Eötvös Loránd's University
Department of Numerical Analysis and Computer Science
1088 Budapest, Muzeum krt. 6–8.