ПРУБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ВЕКТОРАМИ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Й. ДЮЛА ОБАДОВИЧ

Будапешт

(Поступило 15. 8. 1973)

1. Обобщенные полиномиальные векторы

Определение. Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_j, \ldots$ заданные, линейнонезависимые скалярные функции в (скалярном) функциональном пространстве $W_p^{(n)} \equiv W_p^{(n)}[a, b]$. Если N произвольное неотрицательное целое число, $c_0, c_1, \ldots, c_j, \ldots$ любые константные векторы m-мерного евклидова пространства E_m то вектор-функция

$$q(x) = \sum_{j=0}^{N} c_i g_j(x), \tag{1}$$

принимающая значения из E_m, называется обобщенным полиномиальным вектором N-ой степени (в дальнейшем кратче: полиномиальным вектором).

В том случае, когда $g_j(x) = x^j (j = 0, 1, 2, \ldots)$, функция (1) принимает вид

$$q(x) = \sum_{j=0}^{N} c_i x^j. \tag{2}$$

В этом случае координаты вектора $q(x)$ являются обыкновенными полиномами не более N-ой степени, таким образом функцию (2) целесообразно называть обыкновенным полиномиальным вектором.

В дальнейшем мы обозначим через Q_N множество обобщенных полиномиальных векторов не более N-ой степени. Легко видеть, что Q_N представляет собой линейное пространство (векторного) функционального пространства $W_p^{(n)}$, для которого

$$\dim Q_N = (N+1)\, m. \tag{3}$$

2. Пространство полиномиальных векторов, удовлетворяющих заданным краевым условиям

Введем обозначение

$$U_i y = \sum_{k=0}^{n-1} \{A_{ik} y^{(k)}(a) + B_{ik} y^{(k)}(b)\}, \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

где A_{ik} и B_{ik} заданные постоянные матрицы типа $m \times m$, а y произвольная вектор-функция из (векторного) пространства $W_p^{(n)}$. Пусть

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix},$$

и обозначим через Q_N^0 множество полиномиальных векторов $q(x)$ не более N-ой степени, удовлетворяющих краевому условию $Uq = 0$, т.е.

$$Q_N^0 = \{q : q \in Q_N, \ U_q = 0\}.$$

Очевидно, что Q_N^0 линейное подпространство пространства Q_N. Возможно, что Q_N^0 состоит только из тождественно нулевого полиномиального вектора, однако, как это видно из следующей леммы, при всех достаточно больших N, Q_N^0 содержит отличные от нуля полиномиальные векторы.

Лемма 2.1 При всех $N \geqq n-1$ выполняется следующее неравенство:

(4) $$\dim Q_N^0 \geqq (N + 1 - n)\, m.$$

Доказательство. Пусть $N \geqq n-1$, и пусть $q(x)$ — произвольный полиномиальный вектор вида (1).

Рассмотрим теперь, какими разными способами могут быть выбраны векторы $c_0, c_1, \dots, c_N$, находящиеся в (1), чтобы условие $U_q = 0$ удовлетворялось.

Условие $U_q = O$-эквиваленто выполнением равенств

$$\sum_{k=0}^{n-1} [A_{ik} q^{(k)}(a) + B_{ik} q^{(k)}(b)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

из которых, подставляя выражение $q(x)$ вида (1), получаем

(5) $$\sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n-1} [g_j^{(k)}(a)\, A_{ik} + g_j^{(k)}(b)\, B_{ik}] \right) c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Введем обозначение

$$M_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} [g_j^{(k)}(a)\, A_{ik} + g_j^{(k)}(b)\, B_{ik}]$$

тогда из (5) следует уравнение

$$\sum_{j=0}^{N} M_{ij} c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или подробнее:

$$\begin{bmatrix} M_{10} & M_{11} & \ldots & M_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n0} & M_{n1} & \ldots & M_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Легко видеть, что $\dim Q_N^0$ равно числу линейно независимых векторрешений линейной однородной системы (6), в которой неизвестными являются координаты m-мерных векторов $c_0, c_1, \ldots, c_N$. Так как матрица системы (6) представляет собой матрицу типа $nm \times (N+1)\, m$, то очевидно, что ранг этой матрицы удовлетворяет неравенству $r \leq nm$, таким образом число принадлежащих к $E_{(N+1)m}$ линейно независимых векторрешений системы уравнений (6) есть число $(N+1)m - r$, которое не меньше числа $(N+1)m - nm$, и из этого следует неравенство (4).

3. Последовательность минимизирующих полиномиальных векторов

Обозначим через L m-мерный линейный дифференциальный оператор порядка n, т.е.

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x)\, y^{(i)},$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad F_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

представляют собой матрицы типа $m \times m$, элементы которых принадлежат к пространству $L_p[a, b]$. Областью определения оператора L мы выбираем совокупность всех вектор-функций из пространства $W_p^{(n)}$, удовлетворяющих краевому условию $U_y = 0$ (см. п. 2), т.е.

$$D(L) = \{y : y \in W_p^{(n)},\ U_y = 0\}.$$

В дальнейшем мы все время предпологаем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L.

Пусть $f(x)\in L_p\,[a,b]$-заданная вектор-функция, и введем следующее обозначение

$$(7)\qquad \varepsilon_N = \inf_{q\in Q_N^0} \|f-L_q\|_{L_p}, \quad (N=0,1,2,\ldots).$$

Очевидно, что $\varepsilon_N\geqq 0$, и так как $Q_0^0\subset Q_1^0\subset\ldots\subset Q_N^0\subset\ldots$, то $\varepsilon_0\geqq\varepsilon_1\geqq\geqq\ldots\geqq\varepsilon_N\geqq\ldots$.

Теорема 3.1 Существует полиномиальный вектор $q_N(x)\in Q_N^0$ такой, что

$$\varepsilon_N = \|f-Lq_N\|_{L_p},$$

если же $1<p<+\infty$, то существует один и только один такой полиномиальный вектор.

Доказательство. Пусть $d_N=\dim Q_N^0$ и пусть

$$(8)\qquad q_1(x),\quad q_2(x),\quad \ldots,\quad q_{d_N}(x)$$

произвольный базис в проcтванстве Q_N^0. Введем обозначение

$$(9)\qquad f_k(x) = Lq_k(x)\quad (k=1,2,\ldots,d_N).$$

Покажем, что вектор-функции

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_{d_N}(x)$$

принадлежащие L_p, являются линейно независимыми. Если же при некоторых числах $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{d_N}$ при почти всех $x\in[a,b]$ выполняется равенство

$$(10)\qquad \sum_{k=1}^{d_N}\lambda_k f_k(x)=0,$$

то вместе с тем выполняется и

$$L\left(\sum_{k=1}^{d_N}\lambda_k q_k(x)\right)=0,$$

и это означало бы, что вектор-функция

$$(11)\qquad q(x)=\sum_{k=1}^{d_N}\lambda_k q_k(x),$$

принадлежащая Q_N^0, удовлетворяла бы уравнению $Ly=0$.

Так как $Q_N^0\subset D(L)$, поэтому вектор-функция $q(x)$ определенная равенством (11), принадлежит к $D(L)$, откуда в следствие условия для оператора L, (см. начало параграфа) $q(x)\equiv 0$, однако вектор-функции $q_1(x)$, $q_2(x),\ldots,q_{d_N}(x)$ являются линейно независимыми, поэтому, из равенства $q(x)\equiv 0$ следует, что $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{d_N}=0$, откуда из (10) уже вытекает, что вектор-функции $f_1(x), f_2(x,\ldots,f_{d_N}(x)$ линейно независимы.

Так как вектор-функции (8) образуют базис в пространстве Q_N^0, поэтому все вектор-функции $q(x) \in Q_N^0$ представляются в виде

$$q(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x) , \tag{12}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$ — комплексные числа.

Так как по обозначению (9) из (12) получается

$$\|f - Lq\|_{L_p} = \left\| f - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k f_k \right\|_{L_p} ,$$

где вектор-функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{d_N}(x)$ по доказанному выще являются линейно независимыми, поэтому доказываемая теорема эквивалентна доказательству наличия таких комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$, при которых выражение

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k f_k \right\|_{L_p}$$

принимает минимальное значение. По известной теореме теории аппроксимации [3] существуют такие комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$ и при $1 < p < +\infty$, когда пространство L_p представляет собой независимое строго нормированное пространство, эти числа однозначно определены, и этим теорема доказана.

Определение. Пусть $q_N(x)$ полиномиальный вектор, принадлежащий к Q_N^0, такой, что

$$\|f - Lq\|_{L_p}, \quad q(x) \in Q_N^0$$

принимает минимальное значение, то есть

$$\varepsilon_N = \|f - Lq_N\|_{L_p} ; \tag{13}$$

в этом случае последовательность полиномиальных векторов $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ называется последовательностью минимизирующих полиномиальных векторов.

4. Сходимость последовательности минимизирующих полиномиальных векторов

Пусть $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ последовательность минимизирующих полиномиальных векторов, определенных в параграфе (3).

Введем обозначение

$$Q^0 = \bigcup_{N=0}^{\infty} Q_N^0 ,$$

то есть Q^0 означает множество всех полиномиальных векторов $q(x)$, которые удовлетворяют условию $Uq = 0$.

Очевидно, что $Q^0 \subset W_p^{(n)}$ и вместе с тем $Q^0 \subset D(L)$; далее, легко видеть, что Q^0 представляет собой линейное (но не замкнутое) подпространство пространства $D(L)$.

Теорема 4.1 Предположим, что Q^0 лежит всюду плотно в $D(L)$ то есть для любых вектор-функций $y(x) \in D(L)$ найдется последовательность полиномиальных векторов $\{y_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$, принадлежащих Q^0, такая, что

$$\|y - y_N\|_{W_p^{(n)}} \to 0 .$$

(Норма может быть какая-нибудь из нормы (21), (22), (23), [6]).

Пусть $y^*(x)$ решение уравнения $Ly = f(x)$ из $D(L)$, пусть $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ — последовательность минимизирующих полиномиальных векторов, принадлежащих к Q^0, определенных в параграфе 3, тогда

$$\|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \to 0, \quad \text{если} \quad N \to \infty . \tag{14}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\delta_N = \inf_{q \in Q_N^0} \|y^* - q\|_{W_p^{(n)}}$$

и рассмотрим проблему, имеется ли такой полиномиальный вектор, принадлежащий к Q_N^0, для которого выражение

$$\|y^* - q\|_{W_p^{(n)}}, \quad q \in Q_N^0$$

принимает минимальное значение, другими словами, существует ли полиномиальный вектор $q_N^*(x) \in Q_N^0$ такой, что

$$\delta_N = \|y^* - q_N^*\|_{W_p^{(n)}} . \tag{15}$$

Аналогично параграфу 3, пусть $d_N = \dim Q_N^0$ и пусть

$$q_1(x), \ \ldots, \ q_{d_N}(x)$$

произвольный базис в пространстве Q_N^0, тогда любой из полиномиальных векторов $q(x) \in Q_N^0$ может быть представлен в виде

$$q(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x) ,$$

таким образом, предыдущая проблема состоит в определении таких комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$, для которых выражение

$$\left\| y^* - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k \right\|_{W_p^{(n)}}$$

принимает минимальное значение. По аппроксимационной теореме, упомянутой в параграфе 3, существуют такие комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$.

Нетрудно проверить, что при $1<p<\infty$, пространство $W_p^{(n)}$ — строго нормированное пространство, таким образом, при $1<p<\infty$ эти комплексные числа однозначно определены.

Принимая все это во внимание, существует — при $1<p<\infty$ — такой единственный полиномиальный вектор $q_N^*(x)\in Q_N^0$, для которого выполняется равенство (15).

Имея в виду, что, по предположению, Q^0 лежит всюду плотно в пространстве $D(L)$, $\delta_N\to 0$, если $N\to\infty$.

По теореме 2.6.2 [5] легко видно, что существует постоянная $k>0$, такая, что неравенство

$$\|y\|_{W_p^{(n)}}\leqq k\,\|Ly\|_{L_p} \tag{16}$$

выполняется для любой вектор-функции $y(x)\in D(L)$.

Действительно, по предположению об операторе L, существует L^{-1}, и по упомянутой теореме $L^{-1}\in L_p\to W_p^{(n)}$ является линейным ограниченным оператором, и далее $R(L^{-1})=D(L)$, таким образом существует постоянная $k>0$, такая, что

$$\|L^{-1}\varphi\|_{W_p^{(n)}}\leqq k\,\|\varphi\|_{L_p} \tag{17}$$

для всех вектор-функций $\varphi\in L_p$, откуда с введением обозначения $y=$ $=L^{-1}\varphi$ из (17) сразу же вытекает неравенство (16).

Так как $y^*(x)-q_N(x)\in D(L)$, поэтому по (16)

$$\|y^*-q_N\|_{W_p^{(n)}}\leqq k\,\|Ly^*-Lq_N\|_{L_p},$$

откуда, с учетом $Ly^*=f$

$$\|y^*-q_N\|_{W_p^{(n)}}\leqq k\,\|f-Lq_N\|_{L_p},$$

то есть, по (13)

$$\|y^*-q_N\|_{W_p^{(n)}}\leqq k\,\varepsilon_N\,. \tag{18}$$

Так как $q_N(x)\in Q_N^0$, поэтому по определению ε_N при (7)

$$\varepsilon_N\leqq\|f-Lq_N^*\|_{L_p}\,.$$

Так как по теореме 1.1 [7] $L\in W_p^{(n)}\to L_p$ является линейным ограниченным оператором, определенным во всем пространстве $W_p^{(n)}$, поэтому существует постоянная k_1, такая, что

$$\|Ly\|_{L_p}\leqq k_1\,\|y\|_{W_p^{(n)}}$$

при всех $y(x)\in W_p^{(n)}$, таким образом

$$\varepsilon_N\leqq\|f-Lq_N^*\|_{L_p}=\|Ly^*-Lq_N^*\|_{L_p}\leqq k_1\,\|y^*-q_N^*\|_{W_p^{(n)}}$$

то есть по (15)

$$\varepsilon_N\leqq k_1\,\delta_N\,.$$

Из (18) получим:

$$\|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \leqq kk_1 \delta_N , \tag{19}$$

откуда, по $\delta_N \to 0$ следует теорема.

Замечание 1. С учетом нормы (*c*), определенной равенством (23) [6], по доказанной теореме 4.1 получается

$$\|y^* - q_N\|^{(c)}_{W_p^{(n)}} \to 0, \quad \text{если} \quad N \to \infty$$

откуда вытекает, что

$$q_N(x) \to y^*(x)$$

равномерно в $[a, b]$, далее, что

$$\frac{d^k}{dx^k} q_N(x) \to \frac{d^k}{dx^k} y^*(x), \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

равномерно в $[a, b]$.

Замечание 2. Доказанная теорема предпологает, что Q^0 лежит всюду плотно в пространстве $D(L)$. Очеводно, что выполнение этого предположения зависит от функций $g_1(x), \ldots, g_j(x)$ определенных в параграфе 1. В том специальном случае, когда $g_j(x) = x^j$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, с помощью аппроксимационной теоремы Вейерштрасса можно доказать, что Q^0 лежит всюду плотно в пространстве $D(L)$.

Замечание 3. С помощью теоремы 4.1 мы можем представить приближенное векторное решение граничной задачи $Ly = f(x)$, $Uy = 0$.

Это можно сделать особенно просто при $p = 2$, то есть ищем последовательность минимизирующих полиномиальных векторов $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ в следующем виде:

$$q_N(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x) \tag{20}$$

де $q_1(x)$, $q_2(x), \ldots, q_{d_N}(x)$-произвольный базис в Q_N^0, и в этом случае

$$\|f - Lq_N\|^2_{L_2} = \|f\|^2_{L_2} - (f, Lq_N) - (Lq_N, f) - \|Lq_N\|^2_{L_2} =$$

$$= \|f\|^2_{L_2} - \sum_{k=1}^{d_N} \bar{\lambda}_k (f, q_k) - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k (q_k, f) + \sum_{k=1}^{d_N} \sum_{j=1}^{d_N} \lambda_k \bar{\lambda}_j (q_k, q_j), \tag{21}$$

который представляет собой некоторую квадратичную функцию переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$. Таким образом нам надо определить только то, при каких значениях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d_N}$ выражение (21) принимает минимальное значение.

При определенных таким образом постоянным λ_k для вектор-функции $q_N(x)$, определенной равенством (20), выполняется неравенство (19), которое означает, что полиномальный вектор $q_N(x)$ в норме $W_p^{(n)}$ аппрок симирует решение $y^*(x)$ граничной задачи $Ly = f(x)$, $Uy = 0$, где мера аппроксимации зависит очевидно от сходимости к нулю последовательности $\{\delta_N\}_{N=0}^{\infty}$.

В целях применения в практике вышеупомянутых способов, нужно рассматривать быстроту сходимости к нулю последовательности $\{\delta_N\}_{N=0}^{\infty}$, которая может быть достигнута при задачнных функциях $g_1(x), \ldots, g_j(x), \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Соболев, С. Л.:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-ва ЛГУ. 1950.

[2] *Рисс, Ф, – Секефальви Надь, Б.:* Лекции по функциональному анализу, И. Л. 1954.

[3] *Ахиезер, Н. И.:* Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М – Л. 1947.

[4] *Meinardus, G.:* Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg – New-York, 1964.

[5] *Obádovics J. Gyula:* Differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti és peremérték-problémáról. Kandidátusi értekezés. 1966. Bp.

[6] *Обадович, Й. Дь.:* Определение и исследование пространства вектор-функции с одной переменной $W_p^{(n)}[a, b]$. Miskolc, NME. Idegennyelvű kiadványok, XXXI. köt. 1970.

[7] *Михлин, С. Г.:* Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.

MÜM SZÁMTI
1089 Budapest, Reguly A. u. 57 – 59.