Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 54 (2023) 125–142

FONCTIONS MOYENNES SUR LES ENTIERS SANS FACTEURS CARRÉS ET y-FRIABLES

Anaclet Congera, Janvier Pesser Ntahomvukiye and Servat Nyandwi (Bujumbura, Burundi)

Communicated by Jean-Marie De Koninck

(Received April 30, 2023; accepted August 10, 2023)

Résumé. Un entier naturel plus grand que 1 est dit y-friable, y réel, si tous ses facteurs premiers n'excèdent pas y. Dans ce travail, nous nous intéressons aux estimations de moyennes sur les entiers friables de la fonction $f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum\limits_{d/n} g(d)f(d)$, où $h = g * 1$, f et g appartiennent à une classe S contenant l'ensemble $\{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{n}{\varphi(n)}, \frac{\varphi(n,l)}{n}\}$, où $\varphi(n,l) = n\Pi_{p/n}\left(1+\frac{l-1}{p}\right)$, $l \geq 2$. Nous utilisons deux approches, l'une élémentaire et l'autre analytique. Nous montrons que la fonction $S_{fg}(x,y) = \sum_{n\leq x, P(n)\leq y} f_g(n)$ est proportionnelle à la fonction sommatoire des entiers sans facteurs carrés et y-friables. Cette étude généralise celle de J.M. De Koninck et J. Grah pour la fonction f_{μ^2} et celle de M. Naîmi pour la moyenne sur les entiers friables de la fonction $\mu^2 f$.

Mots clés : Fonctions moyennes, valeurs moyennes, entiers sans facteur carré, entiers friables.

Abstract. A natural number greater than 1 is said to be $y-$smooth, y real, if all its prime factors do not exceed y. In this work, we are interested in the estimates of means on integers free of Prime factors $^{>}y$ of the function $f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum\limits_{d/n} g(d)f(d)$, where $h = g * 1$, f and g belong to a class S containing the set $\{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{n}{\varphi(n)}, \frac{\varphi(n,l)}{n}\}$, where function $S_{fg}(x,y) = \sum_{n\leq x, P(n)\leq y} f_g(n)$ is proportional to the summation function of integers without square factors and y-smooth. This study generalizes that by J.M. De Koninck and J. Grah for the function f_{μ^2} and that of M. Naîmi for the mean over the friable integers of the function $\mu^2 f$.

Key words and phrases: Mean functions, mean values, integers without a squared factor, integers without large prime factors.
2010 Mathematics Subject Classification: 11N25, 11N37, 11N56, 11N64.

1. Introduction

Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier $n > 1$ et convenons que $P(1) = 1$. L'étude de l'ensemble $S(x, y)$ des entiers y-friables n'excédant pas x, autrement dit des entiers n tels que $P(n) \leq y$ et $n \leq x$, s'avère capitale en théorie analytique des nombres. Par différentes méthodes, la fonction $\Psi(x, y) = |S(x, y)|$ a été étudiée de manière approfondie par de nombreux auteurs. Une synthèse sur ce sujet est rédigée par A. Hildebrand et G. Tenenbaum [6]. Par exemple, la proposition 1.1 utile pour la suite est due à A. Hildebrand [5].

Proposition 1.1. *Pour $x \geq 3$, on a uniformément pour tout y satisfaisant, $\exp\{(\log\log x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\} \leq y \leq x$*

$$\Psi(x, y) = \rho(u)x\left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} \tag{1.1}$$

où ρ est la fonction de Dickman [5, 6] et $u = \frac{\log x}{\log y}$.

Cette fonction ρ est définie par l'équation aux différences suivante :

$$\begin{aligned} &u\rho'(u) = -\rho(u-1) \ (u > 1),\\ &\rho(u) = 1 \ \ (0 \leq u \leq 1),\\ &\rho(u) = 0 \ \ (u < 0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Elle vérifie quelques propriétés groupées dans le lemme 1.1

Lemme 1.1. ([12], [13]) *La fonction de Dickman vérifie les relations suivantes.*

1) *Pour $u \geq 1$, on a $u\rho(u) = \int_{u-1}^{u} \rho(t)\,dt$*

2) $-\frac{\rho'(u)}{\rho(u)} \leq \log(u\log^2 u),\ \ u \geq e^4$

3) $\frac{\rho(u-t)}{\rho(u)} \ll (u\log^2 u)^t$ *uniformément pour $u \geq 1$ et $0 \leq t \leq u$.*

L'estimation (1.1) possède beaucoup d'applications (cf. [7, 8] et [12, 13]) comme la démonstration du théorème des nombres premiers [3] et l'estimation par A. Ivić [7] de la fonction $\psi(x, y) = \sum_{n\leq x, P(n)\leq y} \mu^2(n)$. Cette fonction dépend de la densité des entiers sans facteurs carrés et de la fonction $\Phi(x, y)$ (cfr proposition 1.2).

Proposition 1.2. *Pour $x \geq 3$, on a uniformément pour tout y satisfaisant, $\exp\{(\log\log x)^{2+\varepsilon}\} \leq y \leq x$*

$$\theta(x, y) = \frac{6}{\pi^2}\rho(u)x\left(1 + O_\varepsilon((\log\log x)^{-\varepsilon})\right). \tag{1.3}$$

Ce résultat est obtenu par les méthodes élémentaires et montre que la densité des entiers sans facteur carré est $\frac{6}{\pi^2}\rho(u)$.

Utilisant la méthode du col, M. Naîmi [9] a amélioré l'estimation de $\theta(x,y)$ ainsi que le domaine d'étude. Plus précisément, il a montré la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Uniformément pour $y \geq (\log x)^{1+\varepsilon}$, $u \geq (\log\log x)^2$, on a*

$$\theta(x,y) = \frac{\zeta_2(\beta,y)x^\beta}{\beta\sqrt{2\pi\eta_2(\beta,y)}}\left(1 + O_\varepsilon(\frac{1}{u})\right) \tag{1.4}$$

où $\zeta_2(s,y) = \Pi_{p\leq y}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)$, $\eta_2(s,y) = \sum_{p\leq y} p^s \frac{\log^2 p}{(p^s+1)^2}$, β est le réel défini par l'équation

$$\log x = \sum_{p\leq y} \frac{\log p}{p^\beta + 1}. \tag{1.5}$$

Le réel β vérifie l'estimation suivante établie par M. Naîmi dans [9]

$$\beta(x,y) = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + O\left(\frac{\log x}{y}\right) + O\left(\exp^{-\sqrt{\log y}}\right) \tag{1.6}$$

où $\xi(u)$ est la fonction définie implicitement par

$$e^{\xi(u)} = 1 + u\xi(u). \tag{1.7}$$

Remarque 1.1. La démonstration de (1.6) utilise les estimations de $\xi(u)$ et celle de l'intégrale

$$\int_1^y \frac{dt}{1+t^\beta}.$$

Parmi les estimations de la fonction $\xi(u)$, il y a la relation (1.8)

$$\xi(u) = \log u + \log\log u + O(1) \tag{1.8}$$

valable lorsque $u \geq 3$.

Soit x_0 un réel suffisamment grand. Ainsi des relations (1.6) et (1.8), on en déduit, dans le domaine $(logx)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x, x \geq x_0$, que $\beta(x,y) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$. Cette inégalité est démontrée dans [11].

Utilisant les propositions 1.1 et 1.3, M. Naîmi [9] a estimé la fonction

$$\theta_f(x,y) = \sum_{\substack{n\leq x \\ P(n)\leq y}} \mu^2(n)f(n) \tag{1.9}$$

lorsque f est une fonction multiplicative positive telle que la série $\sum_{p\geq 2}\frac{|(f(p)-1)|}{p^{\delta}}$ converge pour un certain réel $\delta\in]0,1[$. Il obtient alors les propositions 1.4, 1.5.

Proposition 1.4. *Pour* $x\geq 3$, *on a uniformément pour tout* y *satisfaisant,* $\exp\{(\log\log x)^{2+\varepsilon}\}\leq y\leq x$

$$\theta_f(x,y)=G(1)\frac{6}{\pi^2}\rho(u)x(1+O_{\varepsilon}((\log\log x)^{-\varepsilon})), \tag{1.10}$$

où pour $\mathrm{Re}(s)>\delta$

$$G(s)=\Pi_p\left(1+\frac{f(p)-1}{p^s+1}\right).$$

Proposition 1.5. *Uniformément pour* $y\geq(\log x)^{\frac{1}{1-\delta}}$, $u\geq(\log\log x)^2$, *on a*

$$\theta_f(x,y)=\frac{\zeta_f(\beta,y)x^{\beta}}{\beta\sqrt{2\pi\varphi_2(f,\beta,y)}}\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right) \tag{1.11}$$

pour $\mathrm{Re}(s)>\delta$, $\zeta_f(s,y)=\zeta_2(s,y)G(s,y)$, $\varphi_2(f,s,y)=\frac{\partial^2(\log\zeta_f(s,y))}{\partial s^2}$, $G(s,y)=$ $=\Pi_{p\leq y}\left(1+\frac{f(p)-1}{p^s}\right)$.

La démonstration de la proposition 1.4 se déduit de la proposition 1.1, du lemme 1.1 et des propriétés de la fonction f.

Démonstration. On trouve la démonstration de ce lemme dans [1] ou [13].

Pour la proposition 1.5, M. Naîmi utilise la proposition 1.3 et la méthode du col que nous rappelons brièvement dans le cas des entiers sans facteur carré et y-friables.

Avant de rappeler la méthode du col dans le cas des entiers sans facteurs carrés et y-friables [9], nous énonçons d'abord la proposition 1.6 qui est la base du théorème 2.2.

Proposition 1.6. *Soit* c_1, ε *deux constantes strictement positives. On a uniformément pour* $y\geq(\log x)^{1+\varepsilon}$, $u\geq(\log\log x)^2$,

$$\theta(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-iT}^{\beta+iT}\zeta_2(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds+O_{\varepsilon}(R(x,y)), \tag{1.12}$$

où

$$R(x,y)=\zeta_2(\beta,y)x^{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}+\max_{1\leq|t|\leq T}\left|\frac{\zeta_2(\beta+it,y)}{\zeta_2(\beta,y)}\right|\right),$$

et

$$T=\left\{\exp^{-(logy)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}+\exp^{-c_1\frac{u}{(\log u)^2}}\right\}^{-2}.$$

Ainsi la méthode du col consiste à exprimer la fonction sommatoire $\theta(x, y)$ de μ^2 sur les entiers friables sous forme d'une intégrale dans le plan complexe, via la méthode de Perron [6] en premier lieu. En second lieu, on choisit dans l'intégrale le point selle β défini dans (1.5) et on montre, via la formule de Taylor à l'ordre quatre, que la contribution principale de l'intégrale provient d'un petit voisinage de β. Cette méthode est utilisée dans ce travail car elle améliore sensiblement le domaine d'étude et le terme d'erreur de la fonction $S_{f_g}(x, y)$. Comme nous l'avons signalé dans le résumé, le cas particulier de notre fonction f_g est étudié dans [4] par De Koninck et Grah où ils insistent surtout sur les propriétés des fonctions moyennes. L'intérêt de l'utilisation de la méthode du col est que le résultat obtenu peut être utilisé pour étudier localement la fonction S_{f_g}, (cf. A. Hildebrand et G. Tenenbaum [6] et S. Nyandwi [10]). En terme de moyenne, la relation (1.10) montre que la densité de certains diviseurs d'entiers sans facteurs carrés et y-friables est proportionnelle au réel "$\frac{\pi^2}{6}\rho(u)$". Cette propriété reste conservée pour la fonction $S_{f_g}(x, y)$, voir le théorème 2.1.

Nous définissons maintenant l'ensemble S. Un couple de fonctions (f, g) est un élément de S^2 si

(i) f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives positives et $g(p^r) = 0$ si $r \geq 2$

(ii) la série $\sum_{p\geq 2} \frac{|(f(p)-1)|}{p^\delta}$ converge pour un certain réel $\delta \in]0, 1[$.

Comme la fonction $f_{\mu^2}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)f(d)$, la fonction f_g représente une moyenne pondérée des valeurs de f sur les diviseurs de n. Les fonctions ayant des propriétés proches à celles de la classe S ont été exploitées par G. Bareikis et E. Manstavicius [1], et par S.D. Mohamed, H. Afef et M. Naimi [2] pour étudier les lois de certains diviseurs.

Remarque 1.2. On rappelle les définitions des fonctions qui interviennent dans les applications :

$$\sigma(n) = \sum_{d/n} d, \quad \varphi(n) = card\{l,\ 1 \leq l \leq n, \quad pgcd(l, d) = 1\}$$

et $\frac{\varphi(n,l)}{n} = \prod_{p/n} \left(1 + \frac{l-1}{p}\right)$. Il nous semble que la dernière fonction est rarement exploitée dans la littérature de la théorie des nombres.

Après l'introduction, nous abordons la partie 2 qui contient des nouveaux résultats mais introduisons d'abord quelques notations :

Notations

La fonction g_1 est définie par la relation de convolution

$$f_g = \mu^2 * g_1.$$

Dans le demi-plan Re $> \max(\frac{1}{2}, \delta)$, le produit eulérien associé à la série de Dirichlet de la fonction g_1 est

$$G_1(s) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)}\right).$$

Dans la suite on utilisera les fonctions

$$G_1(s,y) = \prod_{p\le y} \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)}\right),$$

$$R_\varepsilon = \frac{1}{(\log\log x)^\varepsilon}.$$

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, le produit eulérien associé à la série de Dirichlet de μ^2 est

$$\zeta_2(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)$$

où ζ est la fonction Zêta de Riemann.

2. Résultats

Théorème 2.1. *Soit* $(f,g) \in S^2$. *Pour* $x \ge 3$, *on a uniformément pour tout* y *satisfaisant,* $\exp\{(\log\log x)^{2+\varepsilon}\} \le y \le x$

$$S_{f_g}(x,y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1,y)\rho(u)x\left\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\right\}. \tag{2.1}$$

Corollaire 2.1. *Sous les mêmes conditions que celles du théorème 2.1, lorsque* $x \to +\infty$, *on a*

$$S_{f_g}(x,y) \sim G_1(1)\theta(x,y). \tag{2.2}$$

Corollaire 2.2. *Sous les mêmes conditions que celles du théorème 2.1, on a*

i) $$\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} \frac{1}{k^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(d)} \frac{d}{\varphi(d)} =$$
$$= \frac{6}{\pi^2} \prod_{p\le y} \left(1 + \frac{k-1}{k(p^2-1)} + \frac{kp-1}{k(p-1)(p^2-1)}\right) \rho(u)x\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\},$$

ii) $$\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} \frac{1}{k^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(d)} \frac{\varphi(d,l)}{d} =$$
$$= \frac{6}{\pi^2} \prod_{p\le y} \left(1 + \frac{(k-1)(l-1)}{kp(p+1)} + \frac{p+(kp+l-1)}{kp(p^2-1)}\right) \rho(u)x\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\},$$

iii) $$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \frac{1}{k^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(d)} \frac{\sigma(d)}{d} =$$
$$= \frac{6}{\pi^2} \prod_{p\leq y} \left(1 + \frac{k-1}{kp(p+1)} + \frac{k(p+1)-1}{kp(p^2-1)}\right) \rho(u)x\{1+O_\varepsilon(R_\varepsilon)\}.$$

Théorème 2.2. *Soit $(f,g) \in S^2$. Uniformément pour $y \geq (\log x)^{\frac{1}{1-\theta}}$ et $u \geq$ $\geq (\log\log x)^2$, on a*

$$S_{f_g}(x,y) = \frac{\zeta_{f_g}(\beta,y)x^\beta}{\beta\sqrt{2\pi\gamma_2(f_g,\beta,y)}} \left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{u}\right)\right), \tag{2.3}$$

où pour $\mathrm{Re}(s) > \theta, \zeta_{f_g}(s,y) = \zeta_2(s,y)G_1(s,y),\ \gamma_2(f_g,s,y) = \frac{\partial^2\left(log\zeta_{f_g}(s,y)\right)}{\partial s^2}$ *et* $\theta = \max(\frac{1}{2},\delta)$.

Corollaire 2.3. *Sous les conditions du théorème 2.2, on a*

$$S_{f_g}(x,y) = G_1(\beta,y)\theta(x,y)\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Démonstration du corollaire 2.1. Chaque entier n se décompose de manière unique sous la forme d'un produit $n = ab$ avec $P(a) \leq y$ et $P^-(b) > y$, où $P^-(b)$ est le plus petit facteur premier de l'entier « b » avec convention $P^-(1) = +\infty$.

En remarquant que $G_1(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{g_1(n)}{n}$ et d'après cette factorisation, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{g_1(n)}{n} = \sum_{\substack{a\geq 1\\ P(a)\leq y,}} \sum_{\substack{b\geq 1\\ P^-(b)>y}} \frac{g_1(ab)}{ab} =$$
$$= \sum_{\substack{a\geq 1\\ P(a)\leq y}} \frac{g_1(a)}{a} \sum_{\substack{b>y\\ P^-(b)>y}} \frac{g_1(b)}{b} + \sum_{\substack{a\geq 1\\ P(a)\leq y}} \frac{g_1(a)}{a}.$$

Sous les conditions du théorème 2.1, on a

$$\sum_{\substack{b>y\\ P^-(b)>y}} \frac{g_1(b)}{b} \ll_\varepsilon \frac{1}{y^{1-\theta}} \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log\log x)^c}$$

où c est une constante strictement positif. Comme

$$G_1(1,y) = \sum_{\substack{a\geq 1\\ P(d)\leq y}} \frac{g_1(a)}{a},$$

on a alors

$$G_1(1) = G_1(1, y)\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log\log x)^c}\right)\right).$$

Finalement, on obtient

$$S_{f_g}(x, y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1)\rho(u)x\left\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\right\}. \tag{2.4}$$

Comme

$$\theta(x, y) = \frac{6}{\pi^2} x\rho(u)\left\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\right\},$$

on conclut, lorsque $x \to +\infty$, que $S_{f_g}(x, y) \sim G_1(1)\theta(x, y)$.

Démonstration du corollaire 2.2. C'est une conséquence du théorème 2.1 et de la définition des fonctions $\frac{n}{\varphi(n)}$, $\frac{\varphi(n,l)}{n}$, $\frac{\sigma(n)}{n}$. ■

Démonstration du théorème 2.1. Elle découle en partie du lemme 1.1 et des propositions 1.2–1.3.

En effet, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, puisque f_g est multiplicative, la série de Dirichlet $F_{f_g}(s)$ associée à la fonction f_g peut s'écrire

$$F_g(s) = \Pi_p\left(1 + \sum_{r\geq 1}\frac{f_g(p^r)}{p^{rs}}\right). \tag{2.5}$$

Or, si $r \geq 1$, on a $f_g(p^r) = \frac{1}{1+g(p)}(1 + g(p)f(p))$. Cette dernière relation s'écrit encore

$$f_g(p^r) = 1 + \frac{g(p)(f(p) - 1)}{1 + g(p)}.$$

Puisque $\sum_{r\geq 2}\frac{f_g(p^r)}{p^{rs}} = \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))p^s(p^s-1)}$, si on pose

$$l_p(s) = \frac{g(p)(f(p) - 1)}{(1 + g(p))(p^s + 1)}, \quad \zeta_2(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mu^2(n)}{n^s}$$

et d'après la définition de $G_1(s)$ (cfr. notations), on obtient dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \max(\frac{1}{2}, \delta)$,

$$G_1(s) = \Pi_{p\geq 2}\left\{1 + l_p(s) + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))(p^{2s} - 1)}\right\}.$$

Ainsi la relation (2.5) devient $F_g(s) = \zeta_2(s)G_1(s)$. Les propriétés de S montrent que $G_1(s)$ est un produit eulérien qui converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) >$ $> \max(\frac{1}{2}, \delta)$, δ étant le réel défini par la caractérisation de la fonction f. La dernière relation de la fonction $F_g(s)$ est équivalente en terme de convolution à $f_g = \mu^2 * g_1$, où g_1 est la fonction arithmétique dont le produit eulérien associé à sa série de Dirichlet est $G_1(s)$. Par conséquent, on a

$$S_{f_g}(x,y) = \sum_{\substack{d\leq x \\ P(d)\leq y}} g_1(d)\theta\left(\frac{x}{d},y\right). \tag{2.6}$$

Disons que

$$S_{f_g}(x,y) = S_1' + S_2',$$

où on a posé

$$S_1' = \sum_{\substack{d\leq \log\log x \\ P(n)\leq y}} g_1(d)\theta\left(\frac{x}{d},y\right) \quad \text{et} \quad S_2' = \sum_{\substack{d> \log\log x \\ P(d)\leq y}} g_1(d)\theta\left(\frac{x}{d},y\right). \tag{2.7}$$

L'estimation de $\theta(x,y)$ (proposition 1.2) montre que

$$S_2' \ll x \sum_{\substack{d> \log\log x \\ P(d)\leq y}} \frac{|g_1(d)|}{d}\rho(u-u_d), \tag{2.8}$$

avec $u_d = \frac{\log d}{\log y}$. D'après le lemme 1.1, (3), on a

$$\rho(u-u_d) \ll \rho(u)\exp\left(\frac{\log u}{\log y}\log d\right). \tag{2.9}$$

Puisque $y \geq \exp\left\{(\log\log x)^{2+\varepsilon}\right\}$ et pour x grand, on choisit $\delta \in]0,1[$ tel que

$$1 - \frac{\log u}{\log y} > \max\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$S_2' \ll x\rho(u) \sum_{d>\log\log x} \frac{|g_1(d)|}{d^{1-\frac{\log u}{\log y}}}. \tag{2.10}$$

La convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|g_1(n)|}{n^\sigma}$ pour $\sigma > \max\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}$ implique que

$$S_2' \ll x\rho(u)\frac{1}{(\log\log x)^{1-\frac{\log u}{\log y}}}. \tag{2.11}$$

.

De la proposition 1.2, nous déduisons que

$$S'_1 = C_x \sum_{\substack{d \le \log\log x \\ P(d) \le y}} \frac{g_1(d)}{d} \rho(u - u_d)$$

avec $C_x = \frac{6}{\pi^2} x \left\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\right\}$.

Utilisant la formule des Accroissements finis, le lemme 1.1 et la définition de $\rho(u)$, nous montrons que

$$\rho(u - u_d) = \rho(u) \left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(loglogx)^\varepsilon}\right)\right\}. \tag{2.12}$$

Si on insère les relations précédentes dans S'_1, on obtient finalement

$$S'_1 = C_x \sum_{\substack{d \le \log\log x \\ P(d) \le y}} \frac{g_1(d)}{d} \rho(u).$$

Écrivons encore

$$S'_1 = C_x \sum_{\substack{d \ge 1 \\ P(d) \le y}} \frac{g_1(d)}{d} \rho(u) + S_3, \tag{2.13}$$

avec

$$S_3 = C_x \sum_{d > \log\log x,\ P(d) \le y} \frac{g_1(d)}{d} \rho(u). \tag{2.14}$$

La convergence absolue du produit eulérien

$$G_1(s) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p) - 1)}{(1 + g(p))(p^s + 1)} + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))(p^{2s} - 1)}\right) \tag{2.15}$$

dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \max\{\delta, \frac{1}{2}\}$ montre que

$$\sum_{\substack{d > \log\log x \\ P(d) \le y}} \frac{g_1(d)}{d} \ll \frac{1}{(\log\log x)^c}, \quad 0 < c < 1. \tag{2.16}$$

En groupant toutes les estimations précédentes, on obtient l'estimation énoncée

$$S_{f_g}(x, y) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1, y) \rho(u) x \left\{1 + O_\varepsilon(R_\varepsilon)\right\}. \tag{2.17}$$

■

Remarque 2.1. Le corollaire 2.2 montre que la densité des sous ensembles des diviseurs étudiés dans ce travail est proportionnelle à celle des entiers sans facteurs carrés et y-friables, propriété observée par M. Naîmi [9] et H. Van. Lint and H. E. Richert [14].

Dans la suite de ce travail, nous estimons $S_{f_g}(x,y)$ par la méthode du col.

Puisque $\zeta_{f_g}(s,y)=\zeta_2(s,y)G_1(s,y)$ et que $G_1(s,y)$ est un produit convergent, le point selle que nous allons utiliser est celui de $\zeta_2(s,y)\frac{x^s}{s}$, à savoir le réel β défini dans la relation (1.5). Ainsi l'équivalent de la proposition 1.6 est la proposition 2.1.

Proposition 2.1. *La forme intégrale de la fonction sommatoire $S_{f_g}(x,y)$ est donnée par la relation* (2.18)

$$S_{f_g}(x,y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-iT}^{\beta+iT}\zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s},ds+R, \tag{2.18}$$

avec

$$R\ll x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\left(\frac{1}{\sqrt{T}}+\max_{1\le|t|\le T}\left|\frac{\zeta_{f_g}(\beta+it,y)}{\zeta_{f_g}(\beta,y)}\right|\right),$$

et T est un réel strictement positif.

Démonstration. Elle se fait de la même manière comme le cas de la proposition 1.6. ∎

Soit

$$\gamma(f_g,s,y)=\log(\zeta_{f_g}(s,y))=\eta(s,y)+\log G_1(s,y)\text{ où }\eta(s,y)=\log\zeta_2(s,y).$$

Nous montrons qu'il y a des relations entre les dérivées par rapport à "s" de la fonction $\gamma(f_g,s,y)$ et celles de $\eta(s,y)$, à savoir la proposition 2.2.

Proposition 2.2. *Si $y\ge(\log x)^{\frac{1}{1-\delta}}$, on a*

$$\gamma_l(f_g,\beta,y)=\eta_l(\beta,y)\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right),\quad 1\le l\le 3,$$
$$|\gamma_4(f_g,\beta+it,y)|\approx u\log^4 y,\ \textit{pour } |t|\le\frac{1}{\log y}.$$

où $\eta_l(x,y)=\frac{\partial^l}{\partial s^l}log\zeta_2(s,y)$, $\gamma_l(f_g,s,y)=\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\zeta_{f_g}(s,y)$.

Démonstration. Puisque $\zeta_{f_g}(s,y)=\zeta_2(s,y)G_1(s,y)$, on a

$$\gamma(f_g,s,y)=\log(\zeta_{f_g}(s,y))=\eta(s,y)+\nu(s,y),\text{où }\ \nu(s,y)=\log(G_1(s,y). \tag{2.19}$$

Pour établir cette proposition, il suffit de montrer que

$$\left|\frac{\partial^l \nu(s,y)}{\partial s^l}\right|_{(\beta,y)} \ll \log^l y, \qquad 1 \le l \le 3$$
$$\left|\frac{\partial^4 \nu(s,y)}{\partial s^4}\right|_{(\beta,y)} \ll u\log^4 y, \qquad |t| \le \frac{1}{\log y}.$$

Posons $c_p(f,g) = \frac{g(p)(f(p)-1)}{1+g(p)}$. On a alors

$$\nu(s,y) = \sum_{p\le y} \log\left(1 + \frac{c_p(f,g)}{p^s+1} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)}\right). \tag{2.20}$$

Or

$$\frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)} = \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)} + \frac{1}{p^{2s}-1}.$$

Par conséquent

$$\nu(s,y) = \sum_{p\le y} \log\left(1 + \frac{c_p(f,g)}{p^s+1} + \frac{c_p(f,g)}{p^{2s}-1} + \frac{1}{p^{2s}-1}\right). \tag{2.21}$$

On a aussi

$$1 + \frac{c_p(f,g)}{p^s+1} + \frac{c_p(f,g)}{p^{2s}-1} + \frac{1}{p^{2s}-1} = \frac{1+p^{2s}-1+c_p(f,g)+c_p(f,g)(p^s-1)}{p^{2s}-1} =$$
$$= \frac{p^{2s}+c_p(f,g)p^s}{p^{2s}-1}.$$

On peut alors écrire

$$\nu(s,y) = \sum_{p\le y} \left(\log(p^{2s}+c_p(f,g)p^s) - \log(p^{2s}-1)\right). \tag{2.22}$$

En dérivant par rapport à s, on obtient

$$\nu'(s,y) = \sum_{p\le y} \frac{-(c_p(f,g)p^{2s} + 2p^s + c_p(f,g))}{(p^s+c_p(f,g))(p^{2s}-1)} \log p.$$

Disons

$$\nu'(s,y) = -\sum_{p\le y} \frac{c_p(f,g)}{p^s+1} \left(l_{1p}(s) + l_{2p}(s)\right) \log p,$$

avec $l_{1p}(s) = \frac{p^{2s}+1}{(p^s+c_p(f,g))(p^{2s}-1)}$; $l_{2p}(s) = \frac{2p^s}{c_p(f,g)(p^s+c_p(f,g))(p^{2s}-1)}$. Des estimations $|l_{1p}(s)| \ll 1$ et $|l_{2p}(s)| \ll 1$, nous déduisons que

$$|\nu'(s,y)| \ll \log y \sum_{p\le y} \frac{|c_p(f,g)|}{p^\delta} \ll \log y. \tag{2.23}$$

Si $2 \le l \le 3$, on pose $\nu_l(s,y)$ au lieu de $\nu^{(l)}(s,y)$, on montre que $|\nu_l(s,y)| \ll \ll \log^l y$. En effet, on a

$$\nu''(s,y) = \sum_{p\le y} \frac{p^s c_p(f,g)}{(p^s+1)^2}(l_{1p}(s)+l_{2p}(s))\log^2 p + S_y$$

où

$$S_y = -\sum_{p\le y} \frac{c_p(f,g)}{p^s+1}(l'_{1p}(s)+l'_{2p}(s))\log p.$$

Or

$$l'_{1p}(s) = \frac{2p^{2s}\log p}{(p^s+c_p(f,g))(p^{2s}-1)} - \frac{p^s(p^{2s}+1)\log p}{(p^s+c_p(f,g))^2(p^{2s}-1)} - \\ - \frac{2p^{2s}(p^{2s}+1)\log p}{(p^s+c_p(f,g))(p^{2s}-1)^2}.$$

Disons $l'_{1p}(s) = Q_{12}(p^s)\log p$, où Q_{12} est une fraction en p^s bornée. On montre de même que $l'_{2p}(s) = Q_{22}(p^s)\log p$, où Q_{22} est une fraction en p^s bornée. Par conséquent

$$|\nu''(s,y)| \ll \sum_{p\le y} \frac{c_p(f,g)}{|p^s+1|}\log^2 p \ll \log^2 y. \tag{2.24}$$

La dérivée d'ordre 3 de la fonction $\nu(s,y)$ vérifie la relation

$$\nu'''(s,y) = \sum_{p\le y} \frac{c_p(f,g)}{p^s+1} Q_3(p^s)\log^3 p \ll \log^3 y,$$

où Q_3 est une fraction en p^s bornée .

Pour $s=\beta+it,\ |t|\le \frac{1}{\log y}$, on en déduit que

$$|\eta^{(iv)}(s,y)| = \sum_{p\le y} \frac{|c_p(f,g)|}{p^\beta}\log^4 p \ll \log^4 y.$$

Utilisant les relations précédentes et celles qui suivent

$$\gamma^{(l)}(f_g,s,y) = \eta^{(l)}(s,y) + \nu^{(l)}(s,y),$$
$$\eta^{(l)}(\beta,y) \approx u\log^l y,$$

on obtient

$$\gamma^{(l)}(f_g,\beta,y) = \eta^{(l)}(\beta,y)\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{u}\right)\right). \tag{2.25}$$

L'avant dernière relation est établie dans la référence [9]. ■

Nous améliorons maintenant l'estimation du reste de la proposition 2.1.

Proposition 2.3. *Soit c une constante strictement positif, u_0 un réel suffisamment grand, $\theta = \max(\frac{1}{2}, \delta)$ et posons de nouveau $u = \frac{\log x}{\log y}$. Uniformément pour $y \geq (\log x)^{\frac{1}{1-\theta}}$, $u \geq u_0$, on a*

$$\left|\frac{\zeta_{f_g}(\beta+it,y)}{\zeta_{f_g}(\beta,y)}\right| \ll_{\varepsilon,\delta} \tag{2.26}$$

$$\ll_{\varepsilon,\delta} \begin{cases} \exp(-ct^2\eta_2(\beta,y)), & si \quad |t| \leq \frac{1}{\log y} \\ \exp\left(-c\frac{ut^2}{(1-\beta)^2+t^2}\right), & si \ \frac{1}{\log y} \leq |t| \leq \exp(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}. \end{cases}$$

Démonstration. De la relation, $\zeta_{f_g}(s,y) = \zeta_2(s,y)G_1(s,y)$, on en déduit que

$$\frac{\zeta_{f_g}(\beta+it,y)}{\zeta_{f_g}(\beta,y)} = \frac{\zeta_2(\beta+it,y)G_1(\beta+it,y)}{\zeta_2(\beta,y)G_1(\beta,y)}$$

où

$$G_1(s,y) = \prod_{p\leq y}\left(1+\frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)}+\frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)}\right),$$

dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \theta$.

Ainsi, on obtient

$$\left|\frac{\zeta_{f_g}(\beta+it,y)}{\zeta_{f_g}(\beta,y)}\right| \ll_{\varepsilon,\delta} \frac{|\zeta_2(\beta+it,y)|}{\zeta_2(\beta,y)} \ll_{\varepsilon,\delta} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} \exp(-ct^2\eta_2(\beta,y)), & \text{si} \quad |t| \leq \frac{1}{\log y} \\ \exp\left(-c\frac{ut^2}{(1-\beta)^2+t^2}\right), & \text{si} \ \frac{1}{\log y} \leq |t| \leq \exp(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}. \end{cases}$$

La dernière estimation est établie dans [9]. Nous déterminons maintenant le terme principal de l'intégrale figurant dans la proposition 2.1. ■

Proposition 2.4. *Uniformément pour $y \geq (\log x)^{\frac{1}{1-\theta}}$, $u \geq (\log\log y)^2$, on a*

(i) $S_{f_g}(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i/\log y}^{\beta+i/\log y} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds + r_1$ *où* $r_1 \ll \frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\sqrt{\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\frac{1}{u}.$

(ii) *Uniformément pour $x \geq y \geq (\log x)^{\frac{1}{1-\theta}}$, $u \geq u_0$, on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i/\log y}^{\beta+i/\log y} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,dss = \frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{2\pi\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\left(1+O_{\delta,\varepsilon}\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Démonstration. **(i)** D'après le théorème de Perron [12], on a

$$S_{f_g}(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-iT}^{\beta+iT} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds + O_{\delta,\varepsilon}(R_1), \tag{2.28}$$

où

$$T = R_0^2(x,y), R_1(x,y) = x^\beta \sum_{P(n)\le y} \frac{f_g(n)}{n^\beta \left(1+T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}$$

et

$$R_0(x,y) = \exp\left(-(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\right) + \exp\left(-c_1\frac{u}{(\log u)^2}\right).$$

Si

$$u \ge (\log\log y)^2, \text{ on a } R_0(x,y) \ll \frac{1}{\beta u\sqrt{\gamma_2(f_g,\beta,y)}}.$$

En suivant le même raisonnement que dans [6], on montre que

$$R_1(x,y) \ll x^\beta \zeta_{f_g}(\beta,y)\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Utilisant la deuxième estimation de la proposition 2.4, on obtient

$$\int_{\beta-iT}^{\beta-i/\log y} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds \ll x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\int_{1/\log y}^{T}\frac{\exp\left(-\frac{c_2ut^2}{(1-\beta)^2+t^2}\right)}{\beta+t}\,dt \ll$$

$$\ll x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\left(\int_{1/\log y}^{\varepsilon_1}\frac{\exp\left(-\frac{c_2ut^2}{2(1-\beta)^2}\right)}{\beta+t} + \int_{\varepsilon_1}^{T}\frac{\exp(-c_2u/2}{\beta+t}\,dt\right),$$

où $\varepsilon_1 = \max\left(|1-\beta|, \frac{1}{\log y}\right)$.

Comme

$$\int_{1/\log y}^{\varepsilon_1}\frac{\exp\left(-\frac{c_2ut^2}{2(1-\beta)^2}\right)}{\beta+t}\,dt \ll \exp\left(-\frac{c_2u}{2(1-\beta)^2(\log y)^2}\right)\log y$$

et

$$\int_{\varepsilon_1}^{T}\frac{\exp(-c_2u/2)}{\beta+t}\,dt \ll \exp(-c_2u/2)\log T,$$

on a

$$x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\int_{1/\log y}^{T}\frac{\exp\left(-\frac{c_2ut^2}{(1-\beta)^2+t^2}\right)}{\beta+t}\,dt \ll$$

$$\ll x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\exp\left(-\frac{c_3u}{(\log u)^2}\right)\log T \ll x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

De la même façon, on montre que

$$\int_{\beta+i/\log y}^{\beta+iT} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds \ll x^\beta \zeta_{f_g}(\beta,y)\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

La relation (2.28) devient

$$S_{f_g}(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i/\log y}^{\beta+i/\log y} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds + O_\delta\left(x^\beta \zeta_{f_g}(\beta,y)\frac{1}{\sqrt{T}}\right). \tag{2.29}$$

Comme le terme reste de l'expression précédente est de l'ordre de

$$x^\beta \frac{\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{\gamma_2\left(f_g,\beta,y\right)}}\frac{1}{u},$$

on conclut que

$$S_{f_g}(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\beta-i/\log y}^{\beta+i/\log y} \zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}\,ds + O_\delta\left(\frac{x^\beta \zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\frac{1}{u}\right). \tag{2.30}$$

Nous établissons maintenant le deuxième point de la proposition 2.4 et dont le théorème 2.2 en découle.

Pour $s=\beta+it$, on peut écrire

$$\zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s} = \frac{x^\beta}{\beta+it}\exp\left(\log\zeta_{f_g}(s,y)+it\log x\right).$$

Au voisinage de $t=0$, la formule de Taylor à l'ordre 4 implique

$$\log\zeta_{f_g}(s,y)+it\log x = \gamma_0 + i(\log x+\gamma_1)t - \frac{\gamma_2}{2}t^2 - i\frac{\gamma_3}{6}t^3 + O(\gamma_4 t^4)$$

via l'estimation $\left|\frac{\partial^4}{\partial s^4}\log\zeta_{f_g}(s,g)\right| \ll \gamma_4$ pour $|t|\le\delta_1=\frac{1}{\log y\sqrt[3]{u}}$, où on a posé $\gamma_l=\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\zeta_{f_g}(s,y)$ au point $s=\beta$ et $t=0$.

D'après la proposition 2.2, on a

$$\frac{\gamma_3}{6}t^3 + O\left(\gamma_4 t^4\right) \ll \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}.$$

La relation (1.5) implique $\log x+\gamma_1=0$. Puisque $\beta\gg\frac{1}{\log y}$, on a $\frac{t}{\beta}\ll\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}$.

Ainsi $\frac{1}{\beta+it}=\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{it}{\beta}+O\left(\frac{t^2}{\beta^2}\right)\right)$ et $\exp\left(-i\frac{\gamma_3}{6}t^3+O\left(\gamma_4t^4\right)\right)=1-i\frac{\gamma_3}{6}t^3+$ $+O\left(\gamma_3^2t^6+\gamma_4t^4\right)$.

Par conséquent

$$\zeta_{f_g}(s,y)\frac{x^s}{s}=\zeta_{f_g}(\beta,y)\frac{x^\beta}{\beta}e^{-\gamma_2\frac{t^2}{2}}\left(1-\frac{it}{\beta}-i\frac{\gamma_3}{6}t^3+O(\gamma_3^2t^6+\gamma_4t^4+\beta^{-2}t^2)\right).$$

Il découle de l'estimation précédente et la nullité de l'intégrale d'une fonction impaire que

$$S_{f_g}(x,y)=\frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{2\pi\beta}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}e^{-\frac{\gamma_2t^2}{2}}v(t)\,dt+O_{\delta,\varepsilon}\left(\frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\frac{1}{u}\right),$$

où $v(t)=1+O(\gamma_3^2t^6+\gamma_4t^4+\beta^{-2}t^2)$.

La relation $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\gamma_2t^2}{2}}\,dt=\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_2}}$ implique

$$S_{f_g}(x,y)=\frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{2\pi\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\left(1+O_{\delta,\varepsilon}\left(e^{-c_2\gamma_2\delta_1^2+\frac{1}{u}}\right)\right)$$

puisque $\int_{-\delta_1}^{\delta_1}e^{-\frac{\gamma_2t^2}{2}}(v(t)-1)\,dt\ll\frac{1}{u\sqrt{\gamma_2}}$.

Comme $e^{-c_2\gamma_2\delta_1^2}+\frac{1}{u}\ll\frac{1}{u}$, on conclut que

$$S_{f_g}(x,y)=\frac{x^\beta\zeta_{f_g}(\beta,y)}{\beta\sqrt{2\pi\gamma_2(f_g,\beta,y)}}\left(1+O_{\delta,\varepsilon}\left(\frac{1}{u}\right)\right).\qquad\blacksquare$$

Corollaire 2.4. *Uniformément pour $y\geq(\log x)^{\frac{1}{1-\delta}}, u\geq(\log\log y)^2$, on a*

$$S_{f_g}(x,y)=G_1(\beta,y)\theta(x,y)\left(1+O_{\delta,\varepsilon}\left(\frac{1}{u}\right)\right).\tag{2.31}$$

Démonstration. On utilise la relation $\zeta_{f_g}(s,y)=\zeta_2(s,y)G_1(s,y)$ et les estimations

$$\theta(x,y)=\frac{\zeta_2(\beta,y)x^\beta}{\beta\sqrt{2\pi\eta_2(\beta,y)}}\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{u}\right)\right),$$

$$\gamma_l\left(f_g,\beta,y\right)=\eta_l(\beta,y)\left(1+O_\delta\left(\frac{1}{u}\right)\right),\quad 1\leq l\leq 3.\qquad\blacksquare$$

Références

[1] **Bareikis, G. and E. Manstavicius,** On the DDT theorem, *Acta Arith.*, **126(2)** (2007), 155–168.

[2] **Afef H., S.D. Mohamed and M. Naimi,** *Lithuanian Mathematical Journal*, **55(4)** (2015), 474–488.

[3] **Daboussi, H.,** Sur le théorème des nombres premiers, *C.R Acad. Sc. Paris* , Série I no 8, 161–164.

[4] **De Koninck, J.-M. et J. Grah,** Moyennes sur certains ensembles de diviseurs d'un Entire, *L'enseignement mathématique*, **42** (1996), 97–123.

[5] **Hildebrand, A.,** On the number of positiv integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory*, **22** (1986), 289–307.

[6] **Hildebrand, A. et G. Tenenbaum,** On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **296** (1986), 265–290.

[7] **Ivić, A,** On square free nombre with restricted prime factors, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **20** (1985), 189–192.

[8] **Ivić, A. et G. Tenenbaum,** Local densite over integers of large factors, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **37** (1986), 401–417.

[9] **Naïmi, M.,** Les entiers sans facteur carré $\leq x$ dont les facteurs premiers sont $\leq y$, *Publ. Math. Orsay*, Univ. Paris XI , Orsay, 1987.

[10] **Nyandwi, S.,** Mean value of Piltz function over integers free of large prime factors, *Publications de l'Institut mathématique, Nouvelle série*, **74 (88)**, Belgrade 2003, 37–66.

[11] **Smati, A.,** Sur l'itération du nombre de diviseurs des entiers sans grand facteur premier, *Journal of Number Theory*, **57** (1996), 66–89.

[12] **Tenenbaum, G.,** Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Société mathématique de France, (1995).

[13] **Tenenbaum, G. et J. Wu,** Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres, *Sociétés mathématique de France*, (1995).

[14] **Van Lint, J.H. and H.-E. Richert,** Über die Summe $\sum_{n\leq x,P(n\leq y)} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$, *Indag. Math.*, **26** (1964), 582–587.

A. Congera, J.P. Ntahomvukiye and S. Nyandwi

Université du Burundi

Bujumbura

Burundi

anaclet.congera@ub.edu.bi, janvier-pesser.ntahomvukiye@ub.edu.bi, servat.nyandwi@ub.edu.bi