MOYENNE DE LA FONCTION DE PILTZ SUR LES ENTIERS SANS FACTEUR PREMIER DANS UN INTERVALLE

Anaclet Congera and Servat Nyandwi
(Bujumbura, Burundi)

Dedicated to the memory of Professor János Galambos

Communicated by Jean-Marie De Koninck

(Received November 25, 2019; accepted May 15, 2020)

Résumé. Dans ce travail, nous étudions le comportement en moyenne de la fonction de Piltz "τ_k", ou k est un réel strictement positif, sur les entiers sans facteurs premiers dans un intervalle donné. Cette étude complete les travaux d'Andreas Weingartner et de Gérald Tenenbaum concernant la fonction $1(n) = 1$. De ce travail, nous déduisons l'estimation de la fonction τ_2 sur les entiers ayant au plus deux facteurs premiers dans un intervalle $]x^{1/3}, x^{1/2}]$, ou x est un réel $\geqslant 2$.

Abstract. In this work, we study the average behavior of the Piltz function "τ_k", where k is a strictly positive real number, on integers without prime factors in a given interval. This study completes the work of Andreas Weingartner and Gérald Tenenbaum concerning the function $1(n) = 1$. From this work, we deduce the estimate of the function τ_k on integers having at most two prime factors in an interval $]x^{1/3}, x^{1/2}]$, where x is a real number $\geqslant 2$.

Key words and phrases: Fonction de Piltz, facteurs premiers.
2010 Mathematics Subject Classification: 11A99, 11A41.

1. Introduction

Ce travail a pour l'objectif principal de fournir quelques propriétés de la fonction de Piltz sur les entiers ayant des facteurs premiers soumis a certaines contraintes.

La fonction de Piltz, notée τ_k, est définie par la série de Dirichlet suivante

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau_k(n)}{n^s}=\zeta^k(s) \tag{1.1}$$

ou k est un réel strictement positif et $Re(s)>1$.

La fonction de Piltz a attiré l'attention de plusieurs chercheurs a cause des propriétés analytiques de sa série de Dirichlet et sa prédominance dans la convolution des fonctions arithmétiques [4], [5], [6], [8], [9] et [13]. Parmi les contraintes soumises aux facteurs premiers, il y a les entiers y-friables, les entiers y-criblés et les entiers qui ne possedent pas de facteurs premiers dans un intervalle donné.

Dans cet article, nous étudions principalement les entiers du troisieme type en faisant appel aux propriétés des entiers y-friables et y-criblés. La partie de la littérature relative a la théorie analytique des nombres contient beaucoup de travaux qui traitent les entiers y-friables contrairement aux entiers y-criblés et aux entiers sans facteurs premiers dans un intervalle donné. Cette rareté des résultats sur ces derniers types d'entiers est l'une des raisons qui nous ont poussés a rédiger cet article. Un autre argument fondamental est l'utilisation des entiers cités dans ce texte dans la démonstration élémentaire et analytique du théoreme des nombres premiers et leur rôle en cryptographie [2] et [3].

Pour faciliter la compréhension de ce texte, nous l'avons subdivisé en plusieurs paragraphes. Nous avons également défini les nouveaux concepts utiles pour ce travail, d'une part, et d'autre part, nous avons étudié séparément la moyenne de la fonction de Piltz sur les entiers y-criblés et ceux dont fait l'objet de cette étude. Le résultat principal de ce travail dépend d'une fonction a deux variables qui sera définie ultérieurement. Nous avons établi quelques propriétés de cette fonction entre autre celles des dérivées partielles et une équation fonctionnelle que vérifie cette fonction. L'idée de base de nos résultats est la décomposition d'un entier générique $n\geqslant 1$ comme suit $n=ab$, avec $P(a)\leqslant z$ et $P^-(b)>y$, ou z et y sont deux réels supérieurs a deux et $P(a)$ désigne le plus grand facteur premier de l'entier a alors que $P^-(b)$ est le plus petit facteur premier d'un entier générique b avec la convention $P(1)=1$ et $P^-(1)=+\infty$. Cette décomposition montre clairement le lien entre les entiers considérés dans ce travail et ceux des autres cas. Apres cette décomposition, le gros du travail est d'estimer la moyenne de la fonction de Piltz sur les entiers y-friables et celle des entiers y-criblés. Le premier cas a été déja traité par plusieurs chercheurs y compris le premier auteur de ce travail. Pour le second cas, nous le ferons dans cet article. Pour établir les résultats relatifs aux entiers y-criblés, nous utilisons la méthode suivie dans [1], méthode utilisée pour estimer la fonction

$$S_\omega(x,y) = \sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y} z^{\omega(n)},$$

ou $\omega(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de l'entier positif n, c'est-a-dire la fonction $\omega(n) = \sum_{P|n} 1$. Le lien entre la fonction précédente et celle de ce travail est l'étude de la fonction

$$S(x,y,k) = \sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y} \tau_k(n).$$

Pour ne pas surcharger cet article, nous avons préféré estimer la quantité $S(x,y,k)$ via les résultats de la fonction $S_\omega(x,y)$. En regardant de pres la décomposition citée dans le paragraphe précédent, nous constatons que nous avons besoin de l'estimation de la fonction

$$S_k(x,y) = \sum_{n\leqslant x,\ P(n)\leqslant y} \tau_k(n). \tag{1.2}$$

Cette fonction est abondamment étudiée par plusieurs chercheurs comme par exemples Drappeau, Smida et Song [4], [8] et [9].

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les résultats utiles a ce travail et nous donnons quelques commentaires sur la fonction a étudier. Soit f une fonction arithmétique et pour $(x,y,z) \in\,]0,+\infty[\, \times [2,+\infty[\, \times [2,+\infty[$, nous notons par

$$\Gamma_f(x,y,z) = \sum_{n\leqslant x,\ p|n,\ p\notin]z,y]} f(n) \tag{1.3}$$

Si $f(n) = 1(n) := 1$, la fonction $\Gamma_f(x,y,z)$ sera notée par $\Gamma(x,y,z)$. Cette fonction a été étudiée par Andreas Weingartner dans [14] et Gérald Tenenbaum dans [3]. Pour une fonction quelconque f, il est rare de trouver des résultats concernant la fonction $\Gamma_f(x,y,z)$. Il est donc naturel d'enrichir la littérature en y introduisant d'autres fonctions. Dans cette optique, nous avons pensé a la fonction $f(n) = \tau_k(n)$. Lorsque p est un nombre premier, nous avons $\tau_k(p) = k$.

L'étude des moyennes de certaines fonctions multiplicatives utilise quelques fois les propriétés de la série $\zeta^k(s), Re(s) > 1$ [8]. Dans cette étude, Smida s'intéresse aux fonctions pouvant s'écrire $\tau_k * h$, ou h est petite en moyenne. La convolution précédente montre que la plupart des moyennes des fonctions arithmétiques dépend impérativement de celle de la fonction de Piltz.

Notre étude pourrait donc avoir un impact sur les autres estimations. Cette étude concerne la moyenne de la fonction τ_k sur les entiers sans facteurs premiers dans un intervalle du type $]z, y]$ ou z et y vérifient $2 \leqslant z \leqslant y$. Lorsque $k = 2$, le réel $\tau_2(n)$ sera noté par $\tau(n)$ qui désigne le nombre de diviseurs de l'entier n.

Pour estimer cette moyenne, nous suivons l'approche d'Andreas Weingartner qui est fondée sur les estimations des fonctions:

$$\phi(x,y) = \sum_{n\leqslant x,\ P(n)\leqslant y} 1; \quad \upsilon(x,y) = \sum_{n\leqslant x,\ P^-(n)>y} 1.$$

Ces fonctions dépendent des fonctions $\rho(u)$ et $\eta(u)$, ou ces dernieres vérifient les équations différentielles aux différences ci-dessous

$$\begin{aligned} v\rho^{'}(v) + \rho(v-1) &= 0 \qquad (v > 1),\\ \rho(v) &= 1 \quad (0 \leqslant v \leqslant 1)\\ \rho(v) &= 0 \qquad \text{lorsque } v \text{ est négatif},\\ (u\eta(u))^{'} &= \eta(u-1) \quad (u > 2),\\ u\eta(u) &= 1 \quad (1 \leqslant u \leqslant 2),\\ \eta(u) &= 0 \quad (u < 1), \end{aligned}$$

avec $u = \frac{\log x}{\log y}$ et $v = \frac{\log x}{\log z}$.

Le résultat que nous généralisons est le théoreme 1.1, établi par Andreas Weingartner.

Theoreme 1.1. *Nous avons*

$$\text{(i)} \quad \Gamma(x,y,z) = x\theta(u,v) + O\left(\frac{x}{\log y}\right) \qquad (x \geqslant y \geqslant z \geqslant 3/2)$$

$$\text{(ii)} \quad \Gamma(x,y,z) = x\theta(u,v)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \qquad (x \geqslant yz)$$

$$\text{(iii)} \quad \Gamma(x,y,z) = x\theta(u,v)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\rho(v)\log x + \log(\frac{x}{y})}\right)\right\} \qquad (x \leqslant yz)$$

ou

$$\theta(u,v) = \rho(v) + \int_0^u \rho\left(\frac{tv}{u}\right)\omega(u-t)\mathrm{d}t \qquad (0 < u \leqslant v).$$

L'idée fondamentale de la démonstration du théoreme 1.1 est basée sur la décomposition d'un entier générique n comme produit d'un entier y-friable et d'un entier y-criblé.

Cette association des entiers rend complexe l'estimation de la fonction $\Gamma_f(x,y,z)$ lorsque f est une fonction arithmétique multiplicative quelconque. Cette difficulté est due, en partie, au manque des résultats de référence sur les moyennes de la fonction f sur les entiers criblés. Les moyennes des fonctions sur les entiers ayant des facteurs premiers soumis a certaines contraintes [2] sont utilisées non seulement en théorie analytique et probabiliste des nombres mais aussi en cryptographie.

La prédominance de la fonction τ_k dans l'estimation de ces moyennes a contribué a la prise de décision sur l'étude du comportement de la fonction $\Gamma_{\tau_k}(x,y,z)$, notée dans la suite de ce travail par $\Gamma_k(x,y,z)$.

Notons par ailleurs que la moyenne de la fonction de Piltz sur les entiers $y-$ friables est liée a l'hypothese de Riemann d'une part, et d'autre part, certaines séries de Dirichlet s'écrivent comme un produit de la série **(1.1)** et d'une autre série absolument convergente dans le demi-plan plus large que celui $Re(s) > 1$.

Nous introduisons maintenant d'autres notations et quelques travaux réalisés sur des entiers friables liés a la fonction de Piltz. Les auteurs de ces travaux sont: Smida, Tenenbaum, Joung Min Song, Sary Drappeau, voir respectivement dans, [8], [11], [9] et [14].

Utilisant l'estimation de la fonction $S_k(x,y)$, Drappeau [4] a montré la non nullité de la série de Dirichlet **(1.1)** dans le demi-plan $Re(s) > \frac{3}{4}$.

Les diverses applications de la fonction de Piltz et les propriétés analytiques de la série de Dirichlet **(1.1)** nous ont amené a estimer la fonction

$$\Gamma_k(x,y,z) = \sum_{n\leqslant x, p|n, p\notin]z,y]} \tau_k(n) \tag{1.4}$$

Puisque l'estimation de la fonction $S_k(x,y)$ influence celle de la fonction précédente, nous présentons cette approximation via le théoreme **1.2**.

Posons d'abord

$$H_\epsilon = \left\{(x,y) : x \geqslant 2, 1 \leqslant u \leqslant \exp(\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right\}$$

Avec cette notation, nous avons le théoreme 1.2.

Theoreme 1.2. *Nous avons uniformément pour* $(x,y) \in H_\epsilon$,

$$S_k(x,y) = x(\log y)^{k-1}\rho_k(u)\left\{1 + O\left(\frac{\xi(u)}{(\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}} + \frac{1}{(\log y)^k}\right)\right\}. \tag{1.5}$$

Démonstration. C'est le théoreme démontré par Smida dans [8]. ∎

Du théoreme précédent, nous déduisons le corollaire 1 et le théoreme 1.3.

Corollaire 1. *Sous les memes conditions du théoreme* 1.2, *nous avons*

$$S_k(x,y) \ll x(\log y)^{k-1}\rho_k(u).$$

Il existe une constante $c = c(k)$ *telle que l'on ait uniformément, pour* x,

$$S_k(x,y) \ll x(\log x)^{k-1}e^{-cu}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \sum_{n>Y, P(n)\leqslant y} \frac{\tau_k(n)}{n} = 0 \quad ou \quad Y = y^{c\log_2 y}.$$

Démonstration. C'est le théoreme démontré par Martin dans [5]. ■

Les propriétés de la fonction ρ_k qui apparaît dans le théoreme 1.2 ont été étudiées en détail dans [8] mais vu son importance dans notre étude, nous rappelons sa définition.

$$\begin{aligned} \rho_k^{'}(u) &= (k-1)\rho_k(u) - k\rho_k(u-1) \qquad (u > 1) \\ \rho_k(u) &= \frac{u^{k-1}}{\Gamma(k)} \qquad (0 < u \leqslant 1) \end{aligned}$$

$$\rho_k(u) = 0 \qquad (u \leqslant 0) \tag{1.6}$$

Cette fonction intervient dans les estimations des moyennes des fonctions sur les entiers friables et dont les séries de Dirichlet se comportent analytiquement, au voisinage de $Re(s) = 1$, comme la fonction Zeta de Riemann. Pour estimer la fonction $\Gamma_k(x,y,z)$, nous utilisons également le théoreme 1.3 établi par Tenenbaum dans [10].

Theoreme 1.3. *Sous les conditions* $x \geqslant y \geqslant 2$, *nous avons*

$$\sum_{n\leqslant x, P(n)\leqslant y} \frac{\tau_k(n)}{n} = (\log y)^k j_k(u)\left\{1 + O\left(\frac{\log_3(8y)}{\log y} + \frac{1}{L_\epsilon(y)}\right)\right\}$$

ou

$$j_k(u) = \int_0^u \rho_k(t)\mathrm{d}t$$

et

$$L_\epsilon(y) = \exp(\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}. \log_2(x) = \log\log(x).$$

Apres cette breve présentation de certains résultats liés aux entiers dont leurs facteurs premiers possedent des propriétés particulieres et apres avoir expliqué la contribution de ces résultats en théorie des nombres et leurs applications dans le domaine de la télécommunication, nous présentons le résultat principal.

2. Le théoreme principal

Avant d'énoncer ce théoreme, nous introduisons d'abord d'autres notations et des définitions de certains concepts utiles dans la suite. L'autre fonction a laquelle nous allons faire appel est m_k, fonction utilisée par Alladi [1] et définie par

$$\begin{cases} m_k(u) = 0, & u \leqslant 1 \\ m_k(u) = \dfrac{k}{u}, & 1 < u \leqslant 2 \\ m_k(u) = \dfrac{k}{u} + \dfrac{k}{u} \displaystyle\int_2^u m_k(t-1)\mathrm{dt}, & u > 2 \end{cases}$$

Cette derniere fonction intervient dans l'estimation de la fonction $S_\omega(x,y)$, Alladi [1]. Puisque la méthode utilisée dans ce travail est fondée en partie sur les entiers criblés, nous ferons appel également a l'estimation de la fonction $S(x,y,k) = \sum_{n \leqslant x, P^-(n) > y} \tau_k(n)$. Cette estimation découlera de celle de la fonction $S_\omega(x,y)$.

Avant d'énoncer une telle estimation, nous définissons la fonction qui caractérise le théoreme principal. Nous la notons par $\beta_k(u,v)$ et elle est définie comme suit

$$\beta_k(u,v) = \rho_k(v) + \int_0^u \rho_k\left(\frac{tv}{u}\right) m_k(u-t)\mathrm{dt} \qquad (0 < u \leqslant v)$$

$$\beta_k(u,v) = \rho_k(v) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

$$\beta_k(u,v) = 0 \qquad (u < 0 \quad \text{ou} \quad v < 0) \tag{2.1}$$

$$\beta_k(u,v) = \frac{1}{\Gamma(k)} \qquad (0 < v < u)$$

Nous énonçons maintenant le théoreme principal.

Théoreme 2.1. *Posons* $\zeta^k(x,y,z) = \prod_{z < p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$ *et*

$$P_1(x,y,z) = \frac{1}{(\log x)^{\delta_1}} + \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)}, \quad 0 < \delta_1 < 1.$$

Avec les notations, nous avons

(i) $\Gamma_k(x,y,z) = \frac{x}{\Gamma(k)}\,(\log x)^{k-1}\,\zeta^k(x,y,z)\left\{1+O\left(\frac{1}{(\log x)^\epsilon}\right)\right\}$
$(y-z \leqslant (\log x)^{1-\epsilon})$,

(ii) $\Gamma_k(x,y,z) = (\log z)^{k-1}\,x\left\{\beta_k(u,v)+O\left(\frac{1}{\log y}+\rho_k(v)\left(\frac{\log v}{\log z}+\frac{1}{(\log z)^k}\right)\right)\right\}$
$(x \leqslant yz)$,

(iii) $\Gamma_k(x,y,z) = x\beta_k(u,v)(\log z)^{k-1}\left\{1+O\left(P_1(x,y,z)\right)\right\}, \quad (x > yz)$

Corollaire 2. *La fonction $\beta_k(u,v)$ vérifie*

$$\beta_k(u,u) = \frac{u^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad (u>0).$$

Du théoreme 2.1, nous déduisons l'estimation des moyennes de la fonction diviseur sur les entiers ayant au plus deux facteurs premiers dans l'intervalle $\left]x^{1/3},x^{1/2}\right]$.

Plus précisément, si pour $x \geqslant 1$, nous posons

$$\begin{aligned} h_x(n) &= \sum_{p,p|n,p\in\left]x^{1/3},x^{1/2}\right]} 1 \\ c_0 &= \frac{2}{3}\left(2-4\log(3/2)+3(\log(3/2))^2\right) \\ c_1 &= \frac{10}{3}\log(3/2)-4\left(\log(3/2)\right)^2-\frac{1}{3} \quad \text{et} \\ c_2 &= 2\log(3/2)\left(\log(3/2)-\frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

nous avons alors le théoreme suivant.

Théoreme 2.2. *Pour tout $i\in\{0,1,2\}$, nous avons*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ h_x(n)=i}} \tau(n) = c_i x\log x\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}.$$

Remarque. Des fonctions ρ_k et m_k, nous pouvons déduire la formule asymptotique de la fonction $\beta_k(u,v)$. Dans le paragraphe précédent, nous avons parlé de la contribution de la fonction $S(x,y,k)$ dans l'étude de Γ_k, nous estimons donc cette premiere fonction avant la quantité $\Gamma_k(x,y,z)$. Cela est l'objet du paragraphe suivant.

2.1. Estimation de la fonction $S(x,y,k)$

Dans cette partie, nous exploitons le travail d'Alladi [1] pour étudier la valeur moyenne de la fonction de Piltz sur les entiers criblés. Comme nous le verrons dans la suite, cette étude dépend de la fonction ci-apres.

$$A_k(x,y) = \frac{x}{\log y}\int_1^{+\infty} m_k(u-u_t)t^{-2}\mathrm{d}t, \quad \text{ou} \quad u_t = \frac{\log t}{\log y}$$

Soient $\mathcal{F} := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ sans facteur carré }\}$ et

$$S^*(x,y,k) = \sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y, n\in\mathcal{F}} \tau_k(n).$$

Nous avons $S^*(x,y,k) = \sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y} k^{\omega(n)}$. Cette fonction joue un rôle capital dans l'estimation de $S(x,y,k)$. Nous suivons le raisonnement d'Alladi utilisé pour estimer la fonction $S_\omega(x,y) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^-(n)>y}} z^{\omega(n)}$. Alladi considere deux cas: Cas ou y est "petit"(Méthode de Selberg) ou "grand", (Méthode de l'équation fonctionnelle). Les résultats auxquels nous allons faire appel sont résumés dans le lemme 2.1.

Lemme 2.1. *Nous avons les estimations suivantes*

1) $S_w(x,y) = A_k(x,y) + O\left(xu^{2k+1}\exp\left\{-(\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right\}\right) \quad (2\leqslant y\leqslant x)$

2) $S_w(x,y) = \frac{x}{\log y}m_k(u) + O\left(x\frac{u^{k-2}}{(\log y)^2}\right) \quad (\exp(\log_2 x)^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x})$

3) $S_w(x,y) = k.g(k,y)\frac{x}{\log x}u^k + O\left(x\frac{u^{k-1}}{\log x}\right) \quad \left(\frac{3}{2}\leqslant y < \exp(\log x)^{\frac{2}{5}}\right)$

ou

$$g(k,y) = \frac{1}{\Gamma(k)}\left\{(\log y)^k\right\}\prod_{p>y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k\left(1+\frac{z}{p-1}\right).$$

Démonstration. Ce sont les théoremes 1, 2 et 3 de [1], présentés ici de façon a insister sur le rôle de la variable u. ■

Utilisant les estimations du lemme 2.1 et de l'égalité

$$\sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y, n\in\mathcal{F}} \tau_k(n) = \sum_{n\leqslant x, P^-(n)>y} k^{\omega(n)}$$

ainsi que le théoreme de Perron [13], nous établissons le lemme 2.2.

Lemme 2.2.

(i) *Pour tout $x \geqslant y \geqslant 2$, nous avons*

$$S(x,y,k) = A_k(x,y) + O\left(xu^{2k+1}\exp\left\{-(\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\right\}\right).$$

(ii) *Sous la condition* $2 \leqslant y \leqslant \exp(\log x)^{1-\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$, *nous avons également*

$$S(x,y,k) = \frac{\left(\zeta(1,y)^{-1}\log y\right)^k}{\Gamma(k)} \frac{u^k}{\log x} x \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

(iii) *Sous les conditions* $x \geqslant 3, \exp(\log_2 x)^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$, *la fonction* $S(x,y,k)$ *vérifie la relation*

$$S(x,y,k) = \frac{x}{\log y} m_k(u) + O\left(\frac{xu^{k-2}}{(\log y)^2}\right).$$

Remarquons qu'une intégration par parties dans l'intégrale définissant $A_k(x,y)$ *implique*

$$(\log y) A_k(x,y) = x m_k(u) - ky + x \int_0^{u-1} m_k^{'}(u-w) y^{-w} \mathrm{dw} \tag{2.2}$$

et par la formule de Mertens [13], nous déduisons la relation

$$\left(\zeta(1,y)^{-1}\log y\right)^k = e^{-k\gamma}\left\{1 + O\left(\frac{1}{L_\epsilon(y)}\right)\right\}. \tag{2.3}$$

Démonstration. De l'égalité $\sum\limits_{n \leqslant x, P^-(n) > y, n \in \mathcal{F}} \tau_k(n) = \sum\limits_{n \leqslant x, P^-(n) > y} k^{\omega(n)}$ et du théoreme 2 de [1], nous déduisons la relation

$$S^*(x,y,k) = A_k(x,y) + O\left(xu^{2k+1}\left(L_\epsilon(y)\right)^{-1}\right) \tag{2.4}$$

Or, nous pouvons écrire

$$S(x,y,k) - A_k(x,y) = S(x,y,k) - S^*(x,y,k) + S^*(x,y,k) - A_k(x,y)$$

L'inégalité triangulaire et l'estimation (**2.4**) impliquent

$$S(x,y,k) - A_k(x,y) = S(x,y,k) - S^*(x,y,k) + O\left(xu^{2k+1}\left(L_\epsilon(y)\right)^{-1}\right).$$

Du lemme 2.1 et des propriétés de la fonction de Piltz, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |S(x,y,k) - S^*(x,y,k)| &\leqslant \sum_{n \leqslant x, P^-(n) > y, p|n, p^2|n} \tau_k(n) \ll \\ &\ll \sum_{y < p \leqslant x, 2 \leqslant r \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \tau_k(p^r) S\left(\frac{x}{p}, p, k\right) \ll \\ &\ll x\left\{(\log x)^{k-1} + 1\right\} \sum_{y < p \leqslant x, 2 \leqslant r \leqslant \frac{\log x}{\log p}} \frac{1 + k^r}{p^r}. \end{aligned}$$

Etant donné $r \geqslant 2$, on a $\frac{1}{p^r} \leqslant \frac{1}{p^2}$. Puisque $p \geqslant y$, on a $\frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{y^2}$. Ainsi, on a

$$|S(x,y,k) - S^*(x,y,k)| \ll \frac{x}{y^2}\left\{(\log x)^{k-1} + 1\right\} \tag{2.5}$$

ou nous avons utilisé l'inégalité $\tau_k(p^r) \leqslant \max(1, k^r)$.

La conclusion de la démonstration du premier point découle des estimations précédentes.

La démonstration du second point est une conséquence du théoreme de Perron [13] et Alladi [1] via la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geqslant 1, P^-(n)>y} \tau_k(n) n^{-s} = \frac{\zeta^k(s)}{\zeta^k(s,y)}, \quad \text{valable pour} \quad Re(s) > 1.$$

Pour établir le troisieme point, nous utilisons l'inégalité

$$\left|S^*(x,y,k) - \frac{x}{\log y} m_k(u)\right| \leqslant \left|S^*(x,y,k) - A_k(x,y)\right| + r_1$$

ou $r_1 = \left|A_k(x,y) - \frac{x}{\log y} m_k(u)\right|$.

De la relation (**2.2**) et de l'estimation $m_k'(u) \ll u^{k-2}$, voir lemme 1 de [1], nous concluons que

$$r_1 \ll \frac{x}{(\log y)^2} u^{k-2} \tag{2.6}$$

Des relations (**2.4** − **2.6**), nous déduisons la derniere estimation du lemme 2.2. Le paragraphe suivant est réservé a la démonstration du théoreme principal.

2.2. Estimation de la fonction $\Gamma_k(x,y,z)$

La preuve du théoreme 2.1. Nous distinguons trois cas a savoir:

Cas 1. $y - z \leqslant (\log x)^{1+\epsilon}$. Soit la fonction b_k définie par la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_k(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta^k(s)} \quad (Re(s) > 1).$$

Posons $P_{z,y} = \prod_{z<p<y} p$. Avec ces notations, nous avons

$$\Gamma_k(x,y,z) = \sum_{n\leqslant x, d|P_{z,y}, d|n} b_k(d)\tau_k(n/d).$$

Nous pouvons écrire

$$\Gamma_k(x,y,z) = \sum_{n\leqslant x, d|P_{z,y}} b_k(d) \sum_{l\leqslant x/d} \tau_k(l).$$

Or si $y-z\leqslant (\log x)^{1+\epsilon}$, nous avons $d|P_{z,y}$ et $d\leqslant x/2$, la formule de Selberg [13] donne

$$\sum_{l\leqslant x/d} \tau_k(l) = \frac{x}{d\Gamma(k)} (\log x)^{k-1} \left(1-\frac{\log d}{\log x}\right)^{k-1} \left\{1+O\left(\frac{1}{\log(x/d)}\right)\right\}.$$

Or si $d|P_{z,y}$, nous avons $\left(1-\frac{\log d}{\log x}\right)^{k-1} = 1+O\left(\frac{1}{(\log x)^{\epsilon}}\right)$.
Par conséquent, l'estimation de la fonction $\Gamma_k(x,y,z)$ devient

$$\Gamma_k(x,y,z) = \frac{x(\log x)^{k-1}}{\Gamma(k)} \left\{1+O\left(\frac{1}{(\log x)^{\epsilon}}\right)\right\} \sum_{d|P_{z,y}} b_k(d) + r_2$$

ou

$$r_2 \ll x(\log x)^{k-1} \Big| \sum_{d|P_{z,y}} \frac{b_k(d)}{d\log(x/d)} \Big|.$$

Nous avons également

$$r_2 \ll x(\log x)^{k-2} \prod_{z<p\leqslant y} \left(1+\frac{1}{p}\right)^k.$$

La relation $\prod_{z<p\leqslant y} \left(1+\frac{1}{p}\right)^k = \prod_{z<p\leqslant y} \left(1-\frac{1}{p}\right)^k \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2k} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^k$ et la formule de Mertens [13] impliquent

$$r_2 \ll x(\log x)^{k-2} \left(\frac{\log y}{\log z}\right)^{2k} \prod_{z<p\leqslant y} \left(1-\frac{1}{p}\right)^k$$

ou encore

$$r_2 \ll x(\log x)^{k-1} \frac{1}{(\log x)^{\epsilon}} \prod_{z<p\leqslant y} \left(1-\frac{1}{p}\right)^k.$$

La conclusion du point (i) du théoreme principal découle de l'estimation précédente et de la relation

$$\sum_{d|P_{z,y}} b_k(d) = \zeta^k(x,y,z).$$

Remarquons que si nous remplaçons dans le point (i) la fonction $m_k(u)$ par son expression, le résultat devient

$$\Gamma_k(x,y,z) = e^{k\gamma} m_k(u)(\log y)^{k-1}\zeta^k(x,y,z)\left\{1+O\left(\frac{1}{(\log x)^\epsilon}+\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

La suite de la démonstration du théoreme principal découle des lemmes 2.2 et 2.3, de la relation (**1.5**) et du théoreme 1.3.

Lemme 2.3. *Pour $x \geqslant y \geqslant z > 1$, nous avons la relation suivante*

$$(2.7)\qquad \Gamma_k(x,y,z) = S_k(x,z) - S_k\left(\frac{x}{y},z\right) + \sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n},y,k\right).$$

Démonstration. Tout entier $n \geqslant 1$ figurant dans $\Gamma_k(x,y,z)$ se factorise comme suit: $n = ab$, avec $P(a) \leqslant z$ et $P^-(b) > y$.

Nous écrivons alors

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(x,y,z) &= \sum_{ab\leqslant x, P(a)\leqslant z, P^-(b)>y} \tau_k(ab) = \\
&= \sum_{a\leqslant x, P(a)\leqslant z} \tau_k(a) + \sum_{a\leqslant x, P(a)\leqslant z, y<b\leqslant \frac{x}{a}, P^-(b)>y} \tau_k(ab) = \\
&= S_k(x,z) + \sum_{a\leqslant x, P(a)\leqslant z, b\leqslant \frac{x}{a}, P^-(b)>y} \tau_k(ab) - S_k(x,y).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $\frac{x}{y} < a \leqslant x, b = 1$, nous avons

$$(2.8)\qquad \Gamma_k(x,y,z) = S_k(x,z) - S_k(x/y,z) + \sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n},y,k\right).$$

Nous établissons le deuxieme point du théoreme principal. Nous considérons alors le domaine $x \leqslant yz$. Nous remarquons que $1 \leqslant u \leqslant 2$ et si $y \leqslant x \leqslant 2y$, la fonction a estimer n'est autre que

$$\Gamma_k(x,y,z) = S_k(x,z) + S(x,y,k) - 1.$$

Cas 2. Nous établissons le théoreme dans le domaine $2y \leqslant x \leqslant yz$.
Si nous posons $r_3 = \frac{x}{nL_\epsilon(y)}(\log y)^{k-1}$ et $u_n = \frac{\log n}{\log y}$, la premiere partie du lemme 2.2 et la relation (**2.12**) impliquent

$$(2.9)\qquad \begin{aligned}
S\left(\frac{x}{n},y,k\right) &= \frac{x}{n\log y} m_k(u-u_n) - k\frac{y}{\log y} + \\
&+ \frac{x}{n\log y}\int_0^{u-u_n-1} m_k'(u-u_n-t) y^{-t}\mathrm{d}t + O(r_3).
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire

$$
(2.10)\qquad \sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = S_1 - S_2 + S_3 + O\left(x(\log z)^{k-1}\frac{(\log y)^k}{L_\epsilon(y)}\right)
$$

avec

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{x}{\log y}\sum_{n\leqslant x/y}\frac{\tau_k(n)}{n} m_k(u-u_n),\\
S_2 &= \frac{ky}{\log y}\sum_{n\leqslant x/y}\tau_k(n) \quad \text{et}\\
S_3 &= \frac{x}{\log y}\sum_{n\leqslant x/y}\frac{\tau_k(n)}{n}\int_0^{u-u_n-1} m_k^{'}(u-u_n-t)y^{-t}\mathrm{dt}
\end{aligned}
$$

car si $x \leqslant zy$, la condition $P(n) \leqslant z$ est vérifiée.
Evaluons d'abord S_3. Ce terme s'écrit aussi

$$
\begin{aligned}
S_3 = \frac{1}{\log y}\sum_{n\leqslant x/y}\tau_k(n)\int_1^{u-u_n} m^{'}(t)y^t\mathrm{dt} &\ll \frac{1}{(\log y)}\sum_{n\leqslant x/y}\tau_k(n)\int_1^{u} y^t\mathrm{dt} \ll\\
&\ll \frac{1}{(\log y)^2}\sum_{n\leqslant x/y}\tau_k(n).
\end{aligned}
$$

Ces inégalités sont des conséquences des relations $1 \leqslant u \leqslant 2$ et $m_k^{'}(t) \ll t^{k-2}$. Du théoreme de Selberg [13], nous déduisons que

$$
S_3 \ll \frac{x}{y(\log y)^2}(\log z)^{k-1} \ll \frac{x}{\log y}(\log z)^{k-1}.
$$

Le meme raisonnement utilisé pour estimer S_3 montre que

$$
S_2 \ll \frac{x}{\log y}(\log z)^{k-1}.
$$

Maintenant, nous estimons S_1. Nous appliquons le lemme d'Abel [13], pour obtenir

$$
S_1 = \frac{x}{\log y}\int_1^{x/y} m_k(u-u_t)d\left(\sum_{n\leqslant t}\frac{\tau_k(n)}{n}\right).
$$

Disons que $S_1 = S_{11} - S_{12} + S_{13}$, avec

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{x}{\log y} m_k(u); \\ S_{12} &= \frac{kx}{\Gamma(k+1)\log y} \int_1^{x/y} \frac{m_k(u-u_t)(\log t)^{k-1}}{t} \mathrm{dt} \quad \text{et} \\ S_{13} &= \frac{kx}{\Gamma(k+1)\log y} \int_1^{x/y} m_k(u-u_t) d\left(O(\log t)^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$S_{12} = \frac{x}{\log y}(\log z)^{k-1} \int_1^{x/y} \frac{m_k(u-u_t)}{t} \rho_k\left(\frac{\log t}{\log z}\right) \mathrm{dt}.$$

Posons $\omega = \frac{\log t}{\log y}$.

Cela revient a $\log y \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{dt}}{t}$ et l'intégrale devient

$$S_{12} = x(\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} m_k(u-w)\rho_k\left(\frac{u}{v}w\right) \mathrm{dw}.$$

Pour le terme S_{13} nous écrivons

$$S_{13} \ll \frac{x}{\log y} \int_1^{x/y} \frac{m_k^{'}(u-u_t)}{t\log y} (\log t)^{k-1} \mathrm{dt}.$$

L'estimation $m_k^{'}(u-u_t) \ll \frac{1}{(u-u_t)^2} \ll 1$, implique $S_{13} \ll \frac{x}{\log y}(\log z)^{k-1}$. Des estimations précédentes, nous déduisons que

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = x(\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} m_k(u-\omega)\rho_k\left(\frac{u}{v}w\right) \mathrm{d}\omega + \\ + O\left(\frac{x}{\log y}(\log z)^{k-1}\right).$$

Puisque $S_k(x/y, z) \ll \frac{x}{y}(\log z)^{k-1} e^{-u}$ et comme

$$S_k(x,z) = x\rho_k(v)(\log z)^{k-1}\left\{1 + O\left(\frac{\log(v)}{\log z} + \frac{1}{(\log z)^k}\right)\right\},$$

nous obtenons la relation du point (ii) via les estimations précédentes et la relation (**2.8**).

Nous abordons maintenant le troisieme point du théoreme 2.1. Nous établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.4. Soit

$$P_1(x,y,z)=\frac{1}{(\log x)^{\delta_1}}+\frac{\log_2(2z)}{\log z}+\frac{1}{L_\epsilon(z)}.$$

Sous les conditions $x\geqslant yz$ et $v\leqslant\frac{y-z}{\log z}$, on a

$$\sum_{n\leqslant\frac{x}{y},P(n)\leqslant z}\tau_k(n)S\left(\frac{x}{n},y,k\right)=x(\log z)^{k-1}\int\limits_0^{u-1}\rho_k(\frac{v}{u}w)m_k(u-w)\mathrm{dw}\times$$
$$\times\left\{1+O\left(P_1(x,y,z)\right)\right\}.$$

Nous distinguons deux cas

Cas 3 a). Soit y tel que $2\leqslant y\leqslant\exp(\log x)^{2/5}$. Posons $r_4=\dfrac{x\log y}{n}(u-u_n)^{k-2}$.

Du lemme 2.2, nous déduisons que

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x/y,P(n)\leqslant z}\tau_k(n)S\left(\frac{x}{n},y,k\right)=\\ &=\sum_{n\leqslant x/y,P(n)\leqslant z}\tau_k(n)\left\{\frac{x(\log y)^k}{\Gamma(k)\zeta(1,y)^k}\frac{(u-u_n)^k}{n\log(x/n)}+O(r_4)\right\}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Notons par $S_1^{'}$ le terme principal de la relation (**2.10**). Nous avons alors

$$S_1^{'}=\frac{x(\log y)^k}{\Gamma(k)\zeta(1,y)^k}\sum_{n\leqslant x/y,P(n)\leqslant z}\frac{\tau_k(n)}{n}(u-u_n)^{k-1}.\tag{2.12}$$

Par le lemme d'intégration par parties,

$$S_1^{'}=\frac{x(\log y)^k}{\Gamma(k)\zeta(1,y)^k}S_1^{''},$$

ou nous avons posé

$$\begin{aligned}S_1^{''}&=\int\limits_1^{x/y}(u-u_t)^{k-1}d\left(\sum_{n\leqslant t,P(n)\leqslant z}\frac{\tau_k(n)}{n}\right)=\\ &=\int\limits_1^{x/y}(u-u_t)^{k-1}\left((\log z)^k j_k\left(\frac{\log t}{\log z}\right)\right)^{'}\mathrm{dt}+r_5\end{aligned}\tag{2.13}$$

avec

$$r_5 \ll \left\{ \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)} \right\} \int_1^{x/y} (u-u_t)^{k-1} \left((\log z)^k j_k \left(\frac{\log t}{\log z} \right) \right)' \mathrm{dt}.$$

Les deux dernieres relations découlent du théoreme 1.3 voir l'estimation de la fonction $\sum_{n\leqslant t, P(n)\leqslant z} \frac{\tau_k(n)}{n}$. Un changement de variables $w = \frac{\log t}{\log y}$ et la définition de la fonction $j_k(u)$, voir [10] impliquent

$$\int_1^{x/y} (u-u_t)^{k-1} \left((\log z)^k j_k \left(\frac{\log t}{\log z} \right) \right)' \mathrm{d}t =$$

$$= \log y (\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k \left(\frac{u}{v} w \right) \mathrm{d}w.$$

Le meme raisonnement montre que
(2.14)

$$r_5 \ll \left\{ \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)} \right\} \log y (\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k \left(\frac{u}{v} w \right) \mathrm{d}w.$$

Nous montrons de meme que
(2.15)

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) r_4 \ll x \frac{(\log y)^2}{u} (\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k \left(\frac{u}{v} w \right) \mathrm{d}w.$$

Des estimations $(\mathbf{2.11} - \mathbf{2.15})$, nous déduisons que

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k \right) =$$

$$= \frac{x(\log y)^k}{\Gamma(k)\zeta(1,y)^k} (\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k \left(\frac{u}{v} w \right) \mathrm{d}w + r_6,$$

ou

$$r_6 \ll \left\{ \frac{(\log y)^2}{u} + \frac{(\log(2z))}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)} \right\} x \frac{(\log y)^2}{u} (\log z)^{k-1} \times$$

$$\times \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k \left(\frac{u}{v} w \right) \mathrm{d}w.$$

Or si $2 \leqslant y \leqslant \exp(\log x)^\delta, (0 < \delta < 1/3)$, nous avons

$$\frac{(\log y)^2}{u} = \frac{(\log y)^3}{\log x} \ll \frac{(\log y)^{3\delta}}{\log x} = \frac{1}{(\log x)^{1-3\delta}} \ll \frac{1}{(\log x)^{\delta_1}}, \quad \text{et} \quad 0 < \delta_1 < 1.$$

Par la relation **(2.3)** et les estimations précédentes, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = \\
&= \frac{x}{\Gamma(k)} e^{-k\gamma} (\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k\left(\frac{u}{v} w\right) \mathrm{d}w + r_7
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ou $r_7 \ll \dfrac{x}{L_\epsilon(y)} (\log z)^{k-1} \displaystyle\int_0^{u-1} (u-w)^{k-1} \rho_k\left(\frac{u}{v} w\right) \mathrm{d}w.$
Par ailleurs, le lemme 2.1 d'Alladi implique

$$\frac{e^{-k\gamma}}{\Gamma(k)} (u-w)^{k-1} = m_k(u-w) + O(u-w)^{k-2}.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) &= x(\log z)^{k-1} P(x,y,z) \times \\
&\times \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v} w\right) m_k(u-w) \mathrm{d}w \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right)
\end{aligned}$$

ou

$$P(x,y,z) = \left\{\left(1 + O\left(\frac{1}{L_\epsilon(y)}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{\delta_1}} + \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)}\right)\right)\right\}.$$

En remarquant que

$$P(x,y,z) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{\delta_1}} + \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)}\right),$$

et que $\frac{1}{u} \ll \frac{(\log y)^2}{u} \ll \frac{1}{(\log x)^{\delta_1}}$ nous obtenons alors

$$P(x,y,z)\left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^{\delta_1}} + \frac{\log_2(2z)}{\log z} + \frac{1}{L_\epsilon(z)}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) &= x(\log z)^{k-1} \times \\
&\times \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v} w\right) m_k(u-w) \mathrm{d}w \left(1 + O\left(P_1(x,y,z)\right)\right).
\end{aligned}$$

C'est la preuve du lemme 2.4 dans le cas ou $2 \leqslant y \leqslant \exp(\log x)^{2/5}$.

Cas 3 b). Nous considérons le cas ou $x \geqslant 3, \exp(\log_2 x)^3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$. Sous ces conditions, nous utilisons le point (iii) du lemme 2.2 et nous obtenons

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = \frac{x}{\log y} \sum_{n\leqslant x, P(n)\leqslant z} \frac{\tau_k(n)}{n} m_k(u-u_n) + r_8$$

avec

$$r_8 \ll \frac{x}{(\log y)^2} \sum_{n\leqslant x, P(n)\leqslant z} \frac{\tau_k(n)}{n} (u-u_n)^{k-2}.$$

En suivant le meme raisonnement du cas 1, nous obtenons

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = x(\log z)^{k-1}\times$$
$$\times \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v}w\right) m_k(u-w)\mathrm{d}w \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = x(\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v}w\right) m_k(u-w)\mathrm{d}w + r_9$$

avec

$$r_9 \ll \frac{x}{\log x}(\log z)^{k-1} \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v}w\right) m_k(u-w)\mathrm{d}w.$$

Comme $\frac{1}{\log x} \ll \frac{1}{(\log)^{\delta_1}}$, nous avons alors établi que pour $x \geqslant yz$,

$$\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right) = x(\log z)^{k-1}\times$$
$$\times \int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{u}{v}\omega\right) m_k(u-\omega)\mathrm{d}\omega\left(1 + O\left(P_1(x,y,z)\right)\right).$$

Pour compléter la preuve du théoreme principal, nous regroupons les résultats du lemme 2.4 et ceux du théoreme 1.2. ∎

Preuve du corollaire 2. Elle s'obtient en remplaçant dans le théoreme 2.1 les différentes expressions de $\sum_{n\leqslant x/y, P(n)\leqslant z} \tau_k(n) S\left(\frac{x}{n}, y, k\right)$ et nous faisons tendre y vers l'infini.

Nous prouvons dans les paragraphes suivants le théoreme 2.2. Sa preuve est une conséquence du théoreme 2.1 et des lemmes suivants.

Lemme 2.5. *Si* $u \in]2,3]$, *nous avons*

$$m_2(u) = \frac{2}{u}\left(1 + 2\log(u-1)\right).$$

Démonstration. Elle découle des relations suivantes

$$m_2(u) = \begin{cases} \frac{2}{u}, & \text{si } (1 < u \leqslant 2) \\ \frac{2}{u} + \frac{2}{u}\int_2^u m_2(t-1)\mathrm{dt}, & \text{si } (u > 2) \end{cases}$$

Lemme 2.6. *La fonction* ρ_2 *vérifie*

$$\rho_2(v) = 3v - 2v\log v - 2, \quad \textit{si } 1 < v \leqslant 2,$$

$$\rho_2(v) = v\Big(7 - 2\log v - 4\log(v-1) + 4\int_2^v \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\Big) + 4\log(v-1) - 10,$$

si $(2 < v \leqslant 3)$.

Démonstration. La preuve de ce lemme est technique. Elle est basée essentiellement sur l'équation fonctionnelle que vérifie ρ_2 et le calcul d'intégral. Nous présentons seulement les calculs essentiels. Nous rappelons que

$$\rho_2(v) = v\left\{\frac{\rho_2(a)}{a} - 2\int_a^v \frac{\rho_2(t-1)}{t^2}\mathrm{dt}\right\}, \qquad v > 0 \quad a > 0.$$

Par conséquent, si $1 < v \leqslant 2$, nous avons

$$\rho_2(v) = v\left\{1 - 2\int_1^v \frac{t-1}{t^2}\mathrm{dt}\right\}.$$

L'expression précédente fournit la premiere relation de $\rho_2(v)$.

Si $2 < v \leqslant 3$, nous avons

$$\rho_2(v) = v\left\{\frac{\rho_2(2)}{2} - 2\int_2^v \frac{\rho_2(t-1)}{t^2}\mathrm{dt}\right\}.$$

Si nous remplaçons l'expression de $\rho_2(t-1)$ du lemme 2.6 dans l'intégrale précédente, nous obtenons

$$\rho_2(v) = v\left(2 - 2\log 2 - 2\int_2^v \frac{3(t-1) - 2(t-1)\log(t-1) - 2}{t^2}\mathrm{dt}\right).$$

En réarrangeant l'expression a intégrer, nous obtenons

$$\rho_2(v) = v\left(-6\log v + 4\log 2 - \frac{10}{v} + 7 + 4\int_2^v \frac{(t-1)\log(t-1)}{t^2}\mathrm{dt}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_2^v \frac{(t-1)\log(t-1)}{t^2}\mathrm{dt} &= int_2^v \frac{\log(t-1)}{t}(1-1/t)\mathrm{dt} = A - B, \quad \text{avec} \\
A &= \int_2^v \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{dt} \quad \text{et} \\
B &= \int_2^v \frac{\log(t-1)}{t^2}\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$B = \log(v-1) - \log v - \frac{\log(v-1)}{v} + \log 2.$$

L'expression de $\rho_2(v)$ devient

$$\rho_2(v) = v\left(7 - 2\log v - 4\log(v-1) + 4\int_2^v \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{dt}\right) + 4\log(v-1) - 10.$$

Cela équivaut a la relation du lemme 2.6 si $2 < v \leqslant 3$. ■

Corollaire 3. *Sous la condition $2 < v \leqslant 3$, nous avons*

$$\rho_2(v) = v\Big(7 - 2\log v + 2\log(2v)\log\left(\frac{v}{2}\right) + 4v\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-t)}{t}\mathrm{d}t\Big) +$$
$$+4(1-v)\log(v-1) - 10.$$

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
4v\int_2^v \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{dt} &= 4v\int_2^v \frac{\log(t) + \log(1-1/t)}{t}\mathrm{d}t = \\
&= 2v(\log v)^2 - 2v(\log 2)^2 + 4v\int_2^v \frac{\log(1-1/t)}{t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Un changement de variables $y = \frac{1}{t}$ donne

$$4v \int_{2}^{v} \frac{\log(1-1/t)}{t} \mathrm{d}t = 4v \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-y)}{y} \mathrm{d}y.$$

Insérons les expressions précédentes dans le lemme 2.6 et nous obtenons le corollaire 3. ■

Lemme 2.7. *Posons*

$$S_1 = -2 + \left(4 - 2v - 4\frac{v}{u} - 4v\log u\right)\log(v/u) - 3v + 10\frac{v}{u} \quad \textit{et}$$

$$S_2 = 4\left(v - \frac{v}{u} - v\log u\right)\log(u-1) + 2v\log(2v)\log(v/2) - 4v \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y.$$

Avec ces notations, nous avons

$$\beta_2(u,v) = \begin{cases} v - 2 + 2\dfrac{v}{u} - 2v\log(v/u), & (1 < u \leqslant v \leqslant 2) \\ S_1 + S_2, & (1 < u \leqslant 2 \leqslant v \leqslant 3) \end{cases}$$

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 2.5, 2.6 et de calcul d'intégrale. Nous savons que la fonction vérifie

$$\beta_2(u,v) = \rho_2(v) + \frac{u}{v} \int_{0}^{(u-1)\frac{v}{u}} \rho_2(t) m_2\left(u - \frac{ut}{v}\right) \mathrm{d}t, \quad \text{lorsque} \quad 0 < u \leqslant v.$$

Si $1 < u \leqslant v \leqslant 2$, on a

$$\frac{v}{u}(u-1) \leqslant \frac{v}{2} \leqslant 1$$

et par suite

$$\begin{aligned} \beta_2(u,v) &= 3v - 2v\log v - 2 + 2\int_{0}^{v-v/u} \frac{t}{v-t}\mathrm{d}t \\ &= 3v - 2v\log v - 2 - 2\int_{0}^{v-v/u} \left(1 - \frac{v}{v-t}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Cela équivaut a

$$\beta_2(u,v) = v - 2 + 2\frac{v}{u} - 2v\log(v/u).$$

Considérons maintenant le domaine $1 < u \leqslant 2 \leqslant v \leqslant 3.$ Soit la fonction

$$\beta_{21}(u,v) = \frac{u}{v}\int_0^{v-\frac{v}{u}} \rho_2(t) m_2\left(\frac{u}{v}(v-t)\right) \mathrm{dt}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\beta_{21}(u,v) = \frac{u}{v}\int_0^{1} \rho_2(t) m_2\left(\frac{u}{v}(v-t)\right) \mathrm{dt} + \frac{u}{v}\int_1^{v-\frac{v}{u}} \rho_2(t) m_2\left(\frac{u}{v}(v-t)\right) \mathrm{dt}.$$

Scindons l'expression précédente en deux parties

$$\begin{aligned}
\beta_2(u,v) &= I + J, \quad \text{avec} \\
I &= \frac{u}{v}\int_0^{1} \rho_2(t) m_2\left(\frac{u}{v}(v-t)\right) \mathrm{dt} \quad \text{et} \\
J &= \frac{u}{v}\int_1^{v-\frac{v}{u}} \rho_2(t) m_2\left(\frac{u}{v}(v-t)\right) \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Les lemme 2.5 et 2.6 impliquent

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^1 \frac{t}{v-t}\mathrm{dt} = -2\left(\int_0^1 \frac{v-t-v}{v-t}\mathrm{dt}\right) = -2 - 2v\log(v-1) + 2v\log v \\
J &= 2\int_1^{v-\frac{v}{u}} \frac{3t - 2t\log t - 2}{v-t}\mathrm{dt} = J_1 + J_2 + J_3 \quad \text{avec} \\
J_3 &= 4\log(v/u) - 4\log(v-1), \\
J_1 &= -6\left(\int_1^{v-\frac{v}{u}} \frac{v-t-v}{v-t}\mathrm{dt}\right) = -6v + 6\frac{v}{u} + 6 - 6v\log(v/u) + 6v\log(v-1) \\
J_2 &= -4\int_1^{v-\frac{v}{u}} \frac{t\log t}{v-t}\mathrm{dt} = 4\int_1^{v-\frac{v}{u}} \frac{(v-t)\log t - v\log t}{v-t}\mathrm{dt} = J_{21} + J_{22}, \quad \text{avec} \\
J_{21} &= -4v\int_1^{v-\frac{v}{u}} \frac{t\log t}{v-t}\mathrm{dt},
\end{aligned}$$

$$J_{22} = 4\int_1^{v-\frac{v}{u}} \log t\mathrm{d}t = 4\left(v-\frac{v}{u}\right)(\log(v/u)+\log(u-1)-1)+4.$$

Un changement de variables $y=\frac{t}{v}$ suivi d'une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} J_{21} &= -\left[-4v\log(1-y)\log vy\right]_{\frac{1}{v}}^{1-\frac{1}{u}} - 4v\int_{\frac{1}{v}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y = \\ &= -4v\log u\log\left(\frac{u}{v}(u-1)\right) - 4v\int_{\frac{1}{v}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y = \\ &= -4v\log(u)\log(v/u) - 4v\log(u-1) - 4v\int_{\frac{1}{v}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Nous avons alors montré que

$$\begin{aligned} I+J = 8 + \left(4-2v-4\frac{v}{u}-4v\log u\right)\log(v/u) - 10v + 10\frac{v}{u}+ \\ +4(4-v/u)\log(u-1) + (4v-v)\log(v-1) + 2v\log v- \\ -4v\log(u)\log(u-1) - 4v\int_{\frac{1}{v}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons les intégrales par leurs expressions respectives, nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta_2(u,v) = -2 + (4-2v-4\frac{v}{u}-4v\log u)\log\left(\frac{v}{u}\right) - 3v + 10\frac{v}{u}+ \\ +4(v-\frac{v}{u}-v\log u)\log(u-1) + 2v\log(2v)\log(v/2) - 4v\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{u}} \frac{\log(1-y)}{y}\mathrm{d}y = \\ = S_1+S_2. \end{aligned}$$

Corollaire 4. Nous avons

$$\beta_2(2,3) = 4 - 8\log(3/2) + 6\log^2(3/2).$$

Pour établir le corollaire, on remplace dans $\beta_2(u,v)$, u et v respectivement par 2 et 3. Nous établissons maintenant la derniere partie de ce travail, a savoir le théoreme 2.2.

Démonstration. D'apres le théoreme 2.1, nous remarquons que $c_0 = \frac{1}{3}\beta_2(2,3)$.

En effet, nous avons

$$\Gamma_2(x, x^{1/2}, x^{1/3}) = \frac{1}{3}\beta_2(2,3)x\log x\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}.$$

Par conséquent,

$$c_0 = \frac{1}{3}\beta_2(2,3) = \frac{2}{3}\left(2 - \log(3/2) + 3\log^2(3/2)\right).$$

Nous calculons maintenant c_1. Posons $Q_2(x) = \sum_{n\leqslant x, h_x(n)=1} \tau(n)$.

Pour chaque entier $n \geqslant 2$ tel que $h_x(n) = 1, n = pm$, et tout facteur premier q de m vérifie $q \notin \left]x^{1/3}, x^{1/2}\right]$. L'unique facteur premier de n appartenant a l'intervalle précédent est p. Par conséquent, on peut écrire

$$Q_2(x) = 2\sum_{p\in\left]x^{1/3},x^{1/2}\right]} \Gamma_2(x/p, x^{1/2}, x^{1/3}).$$

Notons par $v_p = 3\left(1 - \frac{\log p}{\log x}\right)$ et $u_p = \frac{2}{3}v_p$. Le théoreme 2.1 et la relation précédente impliquent

$$Q_2(x) = \frac{2}{3}x\log x\sum_{p\in\left]x^{1/3},x^{1/2}\right]} \frac{1}{p}\beta_2(u_p, v_p)\left(1 + O\left(E(\frac{x}{p}, x^{1/2}, x^{1/3})\right)\right)$$

ou le terme d'erreur $E(\frac{x}{p}, x^{1/2}, x^{1/3})$ vérifie

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant p\leqslant x^{1/2}} \frac{\beta_2(u_p, v_p)E_{21}(\frac{x}{p}, x^{1/2}, x^{1/3})}{p} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Comme $1 \leqslant v_p \leqslant 2$, le lemme 2.7 implique

$$\beta_2(u_p, v_p) = v_p - 2v_p\log\left(\frac{v_p}{u_p}\right) + 2\frac{v_p}{u_p} - 2$$

ou encore

$$\beta_2(u_p, v_p) = 4 - 3\frac{\log p}{\log x} - 6\left(1 - \frac{\log p}{\log x}\right)\log\left(\frac{3}{2}\right).$$

D'apres une forme forte du théoreme des nombres premiers, nous avons

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant p\leqslant x^{1/2}} \frac{\log p}{p} = \frac{\log x}{6} + O\left(e^{-\sqrt{\log x}}\right)$$

et

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant p\leqslant x^{1/2}} \frac{1}{p} = \log(3/2) + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Des trois relations précédentes, nous déduisons l'estimation suivante

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant p\leqslant x^{1/2}} \frac{\beta_2(u_p, v_p)}{p} = 5\log\left(\frac{3}{2}\right) - 6\left(\log\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Comme

$$\sum_{x^{1/3}\leqslant p\leqslant x^{1/2}} \frac{\beta_2(u_p, v_p)E_{21}(\frac{x}{p}, x^{1/2}, x^{1/3})}{p} \ll \frac{1}{\log x},$$

nous avons

$$Q_2(x) = \left(\frac{10}{3}\log(3/2) - 4(\log(3/2))^2 - \frac{1}{3}\right) x\log x\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Nous déduisons alors que

$$c_1 = \frac{10}{3}\log(3/2) - 4\left(\log(3/2)\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

Du théoreme de Selberg-Délange, des résultats précédents et de la relation

$$\sum_{n\leqslant x, h_x(n)=2} \tau(n) = \sum_{n\leqslant x} \tau(n) - \sum_{n\leqslant x, h_x(n)=0} \tau(n) - \sum_{n\leqslant x, h_x(n)=1} \tau(n).$$

Nous en déduisons la valeur de la constante c_2.

Le dernier paragraphe est réservé a quelques propriétés de la fonction $\beta_k(u, v)$.

Proposition 2.1. *La fonction $\beta_k(u, v)$ vérifie les relations suivantes. Pour tout réel u, v, nous avons:*

(i) $\beta_k(u, v) \leqslant \frac{ke^{k\gamma}}{v}u \quad (1 \leqslant u \leqslant v)$,

(ii) $\beta_k(u, v) \geqslant \frac{1}{v\Gamma(k)} \quad (u \geqslant \frac{v}{v-1})$,

(iii) $v\frac{\partial\beta_k}{\partial v}(u, v) = (k-1)\beta_k(u, v) - k\beta_k\left(\frac{u}{v}(v-1), v-1\right) \quad 1 < u < v$,

(iv) $u\frac{\partial\beta_k}{\partial u}(u, v) = k\beta_k\left(u-1, \frac{v}{u}(u-1)\right) \quad 1 < u < v$,

(v) $\beta_k(u, v) = \beta_k(w, v) + k\int\limits_w^u \beta_k\left(t-1, v(1-1/t)\right) \mathrm{d}t \quad u \geqslant w > 2$.

Démonstration. (i) La définition de $\beta_k(u,v)$ et la majoration de $m_k(t)$ impliquent

$$\beta_k(u,v) \leqslant \rho_k(v) + k\frac{u^k}{v} \int_0^{v(1-\frac{1}{u})} \rho_k(t) \left(1-\frac{t}{v}\right)^{k-1} \mathrm{dt}.$$

Comme la fonction $f(t) = \left(1-\frac{t}{v}\right)^{k-1}$ est croissante (resp.décroissante) si $k<1$ (resp. $k>1$) sur l'intervalle $\left[0, v\left(1-\frac{1}{u}\right)\right]$, on a $f(t) \leqslant u^{1-k}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\beta_k(u,v) &\leqslant \rho_k(v) + k\frac{u}{v}\left(\int_0^{+\infty} \rho_k(t)\mathrm{dt} - \int_{v(1-\frac{1}{u})}^{+\infty} \rho_k(t)\mathrm{dt}\right) \leqslant \\ &\leqslant \rho_k(v) + k\frac{u}{v}\left(\int_0^{+\infty} \rho_k(t)\mathrm{dt} - \int_{v-1}^{+\infty} \rho_k(t)\mathrm{dt}\right) \leqslant \\ &\leqslant \rho_k(v) + k\frac{u}{v}e^{k\gamma} - u^k\rho_k(v).\end{aligned}$$

Nous avons alors $\beta_k(u,v) \leqslant k\frac{u}{v}e^{k\gamma}$ car $(1-u)\rho_k(v) < 0$.

(ii) Pour la deuxieme inégalité, nous utilisons la minoration de $m_k(t)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta_k(u,v) &\geqslant \frac{k}{v}\int_0^{v(1-\frac{1}{u})} \rho_k(t)\left(1-\frac{t}{v}\right)^{-1} \mathrm{d}t \geqslant \\ &\geqslant \frac{k}{v}\int_0^1 \rho_k(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{v\Gamma(k)}.\end{aligned}$$

(iii) Puisque

$$\beta_k(u,v) = \rho_k(v) + \int_0^u \rho_k\left(\frac{tv}{u}\right) m_k(u-t)\mathrm{dt},$$

nous avons

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial v}(u,v) = \rho_k^{'}(v) + \int_0^u \frac{t}{u}\rho_k^{'}\left(\frac{tv}{u}\right) m_k(u-t)\mathrm{dt}.$$

ou

$$v\frac{\partial \beta_k}{\partial v}(u,v) = v\rho_k^{'}(v) + \int_0^u \frac{tv}{u}\rho_k^{'}\left(\frac{tv}{u}\right) m_k(u-t)\mathrm{dt}.$$

Utilisant la relation $u\rho_k^{'}(u) = (k-1)\rho_k(u) - k\rho_k(u-1)$, nous obtenons

$$v\frac{\partial \beta_k}{\partial v}(u,v) = (k-1)\beta_k(u,v) - k\beta_k\left(\frac{u}{v}(v-1), v-1\right)$$

.

(iv) Nous remarquons d'abord que

$$\beta_k(u,v) = \rho_k(v) + \int_0^1 \rho_k\left(v(1-t)\right) u m_k(ut)\mathrm{dt}.$$

De la relation précédente, nous déduisons que

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial u}(u,v) = \frac{k}{u}\rho_k\left(\frac{v}{u}(u-1)\right) + \frac{k}{u}\int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{v}{u}t\right) m_k(u-1-t)\mathrm{dt}.$$

soit

$$u\frac{\partial \beta_k}{\partial u}(u,v) = k\rho_k\left(\frac{v}{u}(u-1)\right) + k\int_0^{u-1} \rho_k\left(\frac{v}{u}t\right) m_k(u-1-t)\mathrm{dt}.$$

ou

$$u\frac{\partial \beta_k}{\partial u}(u,v) = k\beta_k\left(u-1, \frac{v}{u}(u-1)\right).$$

(v) Nous intégrons la quatrieme relation par rapport a u. ■

Remarque. Les résultats établis dans la proposition précédente peuvent etre utilisés pour établir une formule asymptotique pour l'expression $\beta_k(u,v)$.

References

[1] **Alladi, K.,** The distribution of $v(n)$ in the sieve of Eratosthenes, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **33(2)** (1982), 129–148.

[2] **Banks, W.D. and I.E. Shparlinski,** Integers with a large smooth divisor, *Integers*, **7** (2007), A17.

[3] **Daboussi, H.,** Sur le théoreme des nombres premier,. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **298** (1984), 161–164.

[4] **Drappeau, S.,** Remarques sur les moyennes des fonctions de Piltz sur les entiers friables, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **67(4)** (2016), 507–517.

[5] **Martin, B.,** Nouvelles identités de Davenport, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, **37(2)** (2007), 293–327.

[6] **Nyandwi, S.,** Répartition sur les entiers friables des valeurs de fonctions arithmétiques liées aux fonctions de Piltz, *Annales Univ.Sci.Budapest., Sect. Comp.* **34** (2011) 201–222.

[7] **Smida, H.,** Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arithmetica*, **59(2)** (1991), 123–143.

[8] **Smida, H.,** Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arithmetica*, **63(1)** (1993), 21–50.

[9] **Song, J.M.,** Sums of nonnegative multiplicative functions over integers without large prime factors II, *Acta Arithmetica*, **102** (2002), 105–129.

[10] **Tenenbaum, G.,** Note on a paper by Joung Min Song, *Acta arithmetica-warszawa-*, **97(4)** (2001), 353–360.

[11] **Tenenbaum, G. and J. Wu,** Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, (2003), 119–166.

[12] **Tenenbaum, G.,** Integers with a large friable component, *Acta arithmetica*, **124(3)** (2006), 287–291.

[13] **Tenenbaum, G.,** *Introduction a la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2015.

[14] **Weingartner, A.,** Integers free of prime divisors from an interval I., textitActa Arithmetica, **98** (2001), 117–131.

A. Congera and S. Nyandwi
Université du Burundi
Bujumbura
Burundi
anaclet.congera@ub.edu.bi
servat.nyandwi@ub.edu.bi