Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 44 (2015) 221–226

UNSOLVED PROBLEMS SECTION

VOLLPRIMZAHLENMENGE

József Bölcsföldi, György Birkás and Miklós Ferenczi

(Siófok, Hungary)

1. Primlange Primzahlen. $\mathcal{P}$ sei das Zeichen der Primzahlenmenge. Nehmen wir die Elemente der Primzahlenmenge , die nicht größer als x sind! Die Anzahl dieser Elemente ist $\pi(x) = \#\{p \le x \mid p \in \mathcal{P}\}$, wobei x eine positive ganze Zahl ist. Sei die positive ganze Zahl n in dem Dezimalsystem

$$n = \sum_{j=0}^{k(n)} e_j(n)10^j \quad \text{wobei} \quad e_j(n) \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} = A \quad \text{und} \quad e_{k(n)} \ne 0 \quad \text{ist.}$$

Man sagt, dass die Länge der Zahl n eine Primzahl ist, wenn $k(n)+1 \in \mathcal{P}$ ist.

Definition. Die Primzahl p ist *primlang*, wenn die Anzahl der Ziffern also $k(p) + 1$ eine Primzahl ist.

$\mathcal{R}$ sei das Zeichen der primlangen Primzahlenmenge. Prüfen wir die Elemente der primlangen Primzahlenmenge, die nicht größer als x sind, wobei x eine positive ganze Zahl ist! Die Anzahl dieser Elemente ist

$$S(x) = \#\{p \le x \mid p \in \mathcal{R}\}.$$

Es ist eindeutig, dass

$$\mathcal{R} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \{q \in \left(10^{p-1}, 10^p\right) \mid q \in \mathcal{P}\}.$$

Sei $p^*(x)$ die größte Primzahl, wobei $10^{p^*(x)-1} \le x$ ist! Deswegen ist

$$S(x) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ 10^p < x}} \left(\pi\left(10^p\right) - \pi\left(10^{p-1}\right)\right) + E(x),$$

Key words and phrases: Vollprimzahlen.
2010 Mathematics Subject Classification: 11A41.

wobei $E(x) = \pi(x) - \pi^*\left(10^{p^*(x)-1}\right)$, wenn $10^{p^*(x)} > x$ ist, und sonst 0. Mit Hilfe des Primzahlensatzes können wir die Eigenschaften der Funktion $S(x)$ bekommen. Es ist uns allen klar, dass die Anzahl der Elemente der primlangen Primzahlenmenge unendlich ist, also $\lim_{x\to\infty} S(x) = \infty$.

2. Vollprimzahlen.

Definition. Die Primzahl p_v ist *Vollprimzahl*, wenn p_v primlang ist und alle Ziffern Primzahlen sind.

Anders gesagt: der Wert der Zahl p_v, alle Ziffern der Zahl p_v und die Anzahl der Ziffern sind Primzahlen. Also:

$$p_v = \sum_{j=0}^{k(p_v)} e_j\,(p_v)\,10^j,$$

wobei $e_j\,(p_v) \in \{2,3,5,7\} = A_v$ und $k\,(p_v) + 1$ eine Primzahl ist.

$\mathcal{V}$ sei das Zeichen der Vollprimzahlenmenge. Nehmen wir die Elemente der Vollprimzahlenmenge, die nicht größer als x sind! Die Anzahl dieser Elemente ist $W(x) = \#\{p_v \le x \mid p_v \in \mathcal{V}\}$, wobei x eine positive ganze Zahl ist.

Vermutung 1. *Die Anzahl der Elemente der Vollprimzahlenmenge ist unendlich.*

Die Vollprimzahlen sind die folgenden (die letzte Ziffer kann nur 3 oder 7 sein):

23, 37, 53, 73,

223, 227, 233, 257, 277, 337, 353, 373, 523, 557, 577, 727, 733, 757, 773,

22273, 22277, 22573, 22727, 22777, 23227, 23327, 23333, 23357, 23537, 23557, 23753, 23773, 25237, 25253, 25357, 25373, 25523, 25537, 25577, 25733, 27253, 27277, 27337, 27527, 27733, 27737, 27773, 32233, 32237, 32257, 32323, 32327, 32353, 32377, 32533, 32537, 32573, 33223, 33353, 33377, 33533, 33577, 33757, 33773, 35227, 35257, 35323, 35327, 35353, 35527, 35533, 35537, 35573, 35753, 37223, 37253, 37273, 37277, 37337, 37357, 37537, 37573, 52223, 52237, 52253, 52553, 52727, 52733, 52757, 53233, 53323, 53327, 53353, 53377, 53527, 53773, 53777, 55333, 55337, 55373, 55733, 57223, 57373, 57527, 57557, 57727, 57737, 57773, 72223, 72227, 72253, 72277, 72337, 72353, 72533, 72577, 72727, 72733, 73237, 73277, 73327, 73523, 73553, 73727, 73757, 75223, 75227, 75253, 75277, 75323, 75337, 75353, 75377, 75527, 75533, 75553, 75557, 75577, 75773, 77237, 77323, 77377, 77527, 77557, 77573, 77723, 77773, 2222273, 2222327, 2222333, 2222377, 2222527, 2222533, 2222537, 2222573, 2222723, 2223233, 2223253, 2223757, 2223773, 2225233, 2225323, 2225533, 2225557, 2225753, 2225777, 2227223, 2227273, 2227327, 2227333, 2227723, 2227727, 2227777, 2232257, 2232323, 2232337, 2232353, 2232523, 2232773, 2233223, 2233337, 2233373, 2233523, 2233537, 2233573, 2233723, 2233753, 2233757, 2235227, 2235257, 2235323, 2235353, 2235377, 2235553, 2235557, 2235733, 2235773, 2237327, 2237527, 2237537, 2237773, 2252233, 2252273, 2252353, 2252557, 2252753, 2253253, 2253257, 2253323, 2253353, 2253557, 2253773, 2255233, 2255257, 2255333, 2255573, 2255723, 2255753, 2257237, 2257373, 2257553, 2257733, 2257757, 2272223, 2272253, 2272273, 2272337, 2272357, 2272537, 2272727, 2272733, 2272757, 2273273, 2273333, 2273357, 2273533, 2275327, 2275333, 2275723, 2275733, 2277377, 2277553, 2277727, 2277733, 2322227, 2322253, 2322337, 2322373, 2322377, 2322577, 2322757, 2323273, 2323337, 2323733, 2323777, 2325227, 2325377, 2325773, 2327233, 2327257, 2327323, 2327527, 2327723, 2327737, 2327753, 2327777, 2332237, usw.

Wir haben Berechnungen vollzogen: $H(p)$ sei die Häufigkeit der Vollprimzahlen in dem Größenordnungs-Intervall $\left(10^{p-1}, 10^{p}\right)$. So sind $H(2) = 4$, $H(3) = 15$, $H(5) = 128$, $H(7) = 1325$, $H(11) = 214432$, $H(13) = 2884201, \ldots$ Und $W(10^2) = 4$, $W(10^3) = 19$, $W(10^5) = 147$, $W(10^7) = 1472$, $W(10^{11}) = 215904$, $W(10^{13}) = 3100105, \ldots$.

Wenn p das größte Element eines Zwillingsprim-Paares $(p-2, p)$ ist, ist die Anzahl der p-stelligen Vollprimzahlen ungefehr 10-mal größer, als die Anzahl der $(p-2)$-stelligen Vollprimzahlen. ($H(5) \sim 10 \cdot H(3)$, $H(7) \sim 10 \cdot H(5)$, $H(13) \sim 10 \cdot H(11)$). Andererseits ist die Anzahl der 13-stelligen Vollprimzahlen, in der das Ende

23	ist,	360661	Stück,
27	"	360596	"
33	"	360671	"
37	"	360409	"
53	"	360891	"
57	"	361010	"
73	"	359844	"
77	"	360119	" .

Deswegen kann man sagen, dass *die Verteilung der Vollprimzahlen in dem Größenordnungs-Intervall* $\left(10^{p-1}, 10^{p}\right)$ *gleichmäßig ist.*

Wir haben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Kalkulationen erstellt. Sei $G(p)$ die Anzahl der Vollprimzahlen in dem Größenordnungs-Intervall

$\left(10^{p-1}, 10^p\right)$. Wir denken, dass

$$G(p) = c\,\frac{10^{k\cdot p}}{p}\,\bigl(1 + O_p(1)\bigr), \tag{1}$$

wobei $c > 0$ und $0 < k < 1$ passende Konstanten sind, p eine beliebige Primzahl ist und $O_p(1)$ die Kompensation-Funktion ist.

Zum Beispiel im Falle $c = 0.4$ und $k = 0.6$ ist die Funktion $O_p(1) = p^{1/7} - 1$. Die Schätzung (1) ist

$$G(p) = 0.4\frac{10^{0.6p}}{p}\,\bigl(1 + p^{1/7} - 1\bigr) \text{ und es ist noch besser: } G(p) = 0.4\,\frac{10^{0.6p}}{p^{6/7}}.$$

Es sind die *echten* $(H(p))$ und die *kalkulierten* $(G(p))$ Häufigkeit-Werte:

p	$H(p)$	$G(p)$	$H(p)/G(p)$
2	4	4	1
3	15	10	1.5
5	128	100	1.28
7	1325	1189	1.11
11	214904	202599	1.06
13	2884201	2810500	1.03

Man kann die analogen Fragen in dem q-Zahlensystem stellen, wenn wir eine beliebige Teilmenge der Ziffern $\{0, \ldots, q-1\} = A_q$ nehmen. Wir haben im Falle $q = 10$ die ausschließlich aus 3 und 7 Ziffern bestehenden Vollprimzahlen geprüft.

3. Zerlegbare Vollprimzahlen.

Definition. Die Vollprimzahl p_v ist *zerlegbar*, wenn $p_v = a + 10^r b$ ist, wobei a und b Vollprimzahlen sind und r eine positive ganze Zahl ist.

Anders gesagt: Wenn man eine Vollprimzahl so zerlegen kann, dass die beiden Teile Vollprimzahlen sind, heißt die originale Vollprimzahl zerlegbare Vollprimzahl. Von den beiden Zahlen a und b muss genau eine zweistellig sein. Die beiden Teile können Vollprimzahlen sein, wenn die originale Vollprimzahl mindestens 5 Ziffern hat.

Prüfen wir die Vollprimzahlen, in der nur die Ziffern 3 und 7 vorkommen! Also prüfen wir die Vollprimzahlen

$$p_w = \sum_{j=0}^{k(p_w)} e_j(p_w) 10^j$$

wobei $e_j(p_w) \in \{3,7\} = A_w$ und $k(p_w)+1$ eine Primzahl ist.

In dieser Menge sind die höchstens 7-stelligen zerlegbaren Vollprimzahlen die folgenden:

37337 Teile: (373 und 37) oder (37 und 337),

33773 Teile: 337 und 73,

7777337 Teile: 77773 und 37.

Weitere Beispiele:

3333377773373 Teile : 33333777733 und 73,

3373337737373 Teile : 33733377373 und 73,

3377373337337 Teile : 33773733373 und 37,

3377377777373 Teile : 33773777773 und 73,

3733773333737 Teile : (37337733337 und 37) oder (37 und 33773333737).

Die Anzahlen der ausschließlich aus 3 und 7 Ziffern bestehenden Vollprimzahlen sind:

5-stellig	5 Stück, hierin sind	2 Stück zerlegbar,
7-stellig	16 Stück, hierin sind	1 Stück zerlegbar,
13-stellig	591 Stück, hierin sind	20 Stück zerlegbar,
17-stellig	27243 Stück, hierin sind	454 Stück zerlegbar, usw.

Wir haben eine 109-stellige zerlegbare Vollprimzahl gefunden: ...77337373337733737. Der Punkt bedeutet die Ziffer 3. Wenn man am Ende dieser Vollprimzahl die Vollprimzahl 37 abschneidet, bleibt eine 107-stellige Vollprimzahl übrig.

Vermutung 2. *Die Anzahl der Elemente der ausschließlich aus* 3 *und* 7 *Ziffern bestehenden Vollprimzahlen ist unendlich.*

4. Über die Anzahl der Elemente der Vollprimzahlenmenge.

(a) Wenn die Anzahl der Ziffern in einer Vollprimzahl das größte Element eines Zwillingsprim-Paares ist, kann die Vollprimzahl zerlegbar sein. Sonst ist die Vollprimzahl nicht zerlegbar. Der Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ziffern ist: $5 = 3+2, 7 = 5+2, 13 = 11+2, 19 = 17+2, 31 = 29+2, 43 = 41+2$, usw. Allgemein: $p = (p-2)+2$*, wobei* $(p-2)$ *und* p *die Elemente eines Zwillingsprim-Paares sind.*

Wenn die Anzahl der Zwillingsprim-Paare unendlich ist, erfolgt die notwendige Bedingung der Zerlegbarkeit der aus 3 und 7 bestehenden Vollprimzahlen $\big(p = (p-2)+2\big)$ unendlichmal und kann die hinreichende Bedingung (die beiden Teile sind Vollprimzahlen) unendlichmal erfolgen.

Wenn die Anzahl der Zwillingsprim-Paare endlich ist, ist die Anzahl der Elemente der zerlegbaren Vollprimzahlenmenge endlich.

(b) Nehmen wir die Primzahlenmenge von Mills! Die Zahl in der Form $m = \left[M^{3^n}\right]$ ist eine Primzahl, wo $M = 1,3063778838630806904686144926\ldots$ die Mills-Konstante ist und $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine beliebige positive ganze Zahl ist. Wir wissen schon, dass die Anzahl der Elemente der Primzahlenmenge von Mills unendlich ist. Die Primzahlen von Mills sind die folgenden: $m = 2,\ 11,\ 1361,\ 2521008887,\ \ldots$.

Der $n \to m$ Zusammenhang ist: $1 \to 2$, $2 \to 11$, $3 \to 1361$, $4 \to 2521008887$, $\ldots$. Die Mills-Primzahl $m = \left[M^{3^n}\right]$ korrespondiert mit Größenordnungs-Intervall $\left(10^{m-1}, 10^m\right)$ und umgekehrt. Zum Beispiel

$$2 \to \left(10, 10^2\right), \quad 11 \to \left(10^{10}, 10^{11}\right), \quad 1361 \to \left(10^{1360}, 10^{1361}\right), \quad \text{usw.}$$

und umgekehrt. Die Anzahl der Elemente der Primzahlenmenge von Mills ist unendlich, daraus folgt, dass die Anzahl der Größenordnugs-Intervalle $\left(10^{m-1}, 10^m\right)$ – die mindestens eine Mills-Primzahl enthalten – unendlich ist. In dem Größenordnungs-Intervall $\left(10^{m-1}, 10^m\right)$ sind nach Schätzung (1) $G(m) = c\left(10^{k\cdot m}/m\right)\left(1 + O_m(1)\right)$ Stück Vollprimzahlen. Deswegen kann man sagen, dass die Anzahl der Elemente der Vollprimzahlenmenge wahrscheinlich unendlich ist.

J. Bölcsföldi, M. Ferenczi
Perczel Mór Gymnasium
Siófok
Hungary
bolcsteri@gmail.com
miklos.ferenczi@hotmail.com

Gy. Birkás
Baross Gábor Berufsschule
H-8600 Siófok
Kardvirág köz 7/a
Hungary
birkasgy@enternet.hu