Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 34 (2011) 201–222

RÉPARTITION SUR LES ENTIERS FRIABLES DES VALEURS DE FONCTIONS ARITHMÉTIQUES LIÉES AUX FONCTIONS DE PILTZ

S. Nyandwi (Québec, Canada)

Au Professeur János Galambos pour son 70e anniversaire

Résumé. Un entier naturel plus grand que 1 est dit y-friable, y réel, si tous ses facteurs premiers n'excèdent pas y. Dans cet article, nous établissons une formule asymptotique, valable dans un large domaine, pour la moyenne sur les entiers y-friables d'une fonction multiplicative générale dont la série de Dirichlet est, au voisinage de 1, proche d'une puissance de la fonction zêta de Riemann. Comme applications, nous obtenons des estimations de moyennes de fonctions arithmétiques, notamment sur les entiers friables en progressions arithmétiques. G. Hanrot, G. Tenenbaum et J. Wu ont étudié dans la même optique, une vaste classe de fonctions arithmétiques contenant la classe étudiée ici. Cependant, ils ont utilisé une méthode globale confinant leurs résultats dans des domaines relativement étroits. Nous utilisons une méthode locale qui améliore significativement les domaines de validité de résultats connus.

Abstract. An integer greater than one is said to be y-friable, where y is a given real number, if all its prime factors do not exceed y. In this paper, we establish an asymptotic formula for the mean value, on y-friable integers, of functions which belongs to a large class of multiplicative arithmetical functions, namely those functions whose Dirichlet series behaves, in the neighborhood of 1, essentially as a power of the Riemann Zeta Function. As applications, we obtain several estimates for the mean values of arithmetical functions, in particular over y-friable integers in arithmetical progressions. G. Hanrot, G. Tenenbaum and J. Wu studied the same problem for a wide class of arithmetical functions which contains a subclass we study here. However, they used a global method which confines their results in relatively short ranges. We use here a local method which improves significantly the ranges of validity of known results.

1. Introduction

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier $n > 1$ et convenons que $P(1) = 1$. L'étude de l'ensemble $S(x, y)$ des entiers y-friables n'excédant pas x, autrement dit des entiers n tels que $P(n) \leqslant y$ et $n \leqslant x$, s'avère capitale en théorie analytique des nombres. Par des méthodes différentes, la fonction $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$ a été étudiée de manière approfondie par de nombreux auteurs. Une synthèse sur ce sujet (dans laquelle notamment la méthode du col est appliquée à ce problème) est rédigée par A. Hildebrand et G. Tenenbaum dans [6]. Nous mentionnons ici deux résultats importants concernant $\Psi(x, y)$. Le premier est la formule asymptotique de A. Hildebrand [5]

$$\Psi(x, y) = x\rho(u)\left\{1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\right\}, \tag{1.1}$$

valable unifomément dans le domaine

$$y \geq 2, \quad 1 \leq u \leq \exp(\log y)^{3/5-\epsilon},\ \epsilon > 0$$

avec $u = \log x/\log y$ et ρ la fonction dite de “Dickman” qui désigne l'unique solution de l'équation différentielle aux différences à condition initiale

$$\left\{\begin{array}{lcll} u\rho'(u) & = & -\rho(u-1), & (u > 1) \\ \rho(u) & = & 1, & (0 \leq u \leq 1) \\ \rho(u) & = & 0, & (u \leqslant 0). \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Remarquons que le domaine de validité de cette formule s'écrit également

$$x \geqslant 3, \quad \exp\left(\log\log x\right)^{\frac{5}{3}+\epsilon} \leqslant y \leqslant x. \tag{H_ϵ}$$

Le deuxième est la formule asymptotique de A. Hildebrand et Tenenbaum [6] suivante, valable uniformément pour $u \geqslant 1$ et $y \geqslant 2$,

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha, y)}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right)\right\}, \tag{1.3}$$

où l'on a noté

$$\zeta(s, y) := \prod_{p \leq y}(1 - p^{-s})^{-1} \qquad (p \text{ premier}),$$

$$\phi(s, y) := \log\zeta(s, y), \qquad\qquad \phi_l(s, y) := \frac{d^l}{ds^l}\phi(s, y) \qquad (l \geq 1),$$

et $\alpha(x, y)$ désigne l'unique solution positive de l'équation

$$\phi_1(\alpha, y) = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Pour établir la formule (1.3), ces auteurs utilisent la méthode du col qui consiste à exprimer la fonction sommatoire d'une fonction arithmétique f sous la forme d'une intégrale dans le plan complexe, choisissent dans l'intégrale le point selle α et montrent que la contribution principale de l'intégrale provient d'un petit voisinage de α. Pour toute fonction arithmétique f, nous poserons

$$\Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n)$$

et nous noterons τ_k pour $k \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction arithmétique multiplicative de Piltz définie par la série de Dirichlet

$$\zeta^k(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \quad (\Re(s) > 1).$$

On montre que, pour tout nombre premier p et tout entier positif m, $\tau_k(p^m) = = \binom{m+k-1}{m}$. De nombreux chercheurs se sont intéressés au comportement asymptotique de la fonction $\Psi_f(x, y)$. En particulier H. Smida [10] et l'auteur [7] pour $f = \tau_k$, G. Tenenbaum et J. Wu [14] pour une fonction multiplicative telle que la suite $f(p)$ possède une valeur moyenne et vérifiant certaines conditions. Voir [9], [12] et [13] pour l'étude d'autres fonctions ainsi que pour de nombreuses autres références.

La méthode de H. Smida est basée sur la nature analytique de la série

$$F(s, y) := \sum_{P(n) \leqslant y} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \quad (y \geqslant 2, \sigma := \Re(s) > 0).$$

H. Smida montre que cette fonction est comparable à

$$\zeta^k(s)\widehat{\rho}((s-1)\log y)^k$$

où $\widehat{\rho}$ est la transformée de Laplace de ρ de Dickman. Le résultat principal de Smida dans [10] est le suivant valable dans le domaine (H_ϵ) :

$$\Psi_{\tau_k}(x, y) = x(\log y)^{k-1}\rho_k(u)\left\{1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k}\right)\right\}, \tag{1.4}$$

où $\rho_k(u)$ la fonction l'unique solution continue dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle aux différences à condition initiale

$$\begin{cases} u\rho_k'(u) = (k-1)\rho_k(u) - k\rho_k(u-1), & (u > 1) \\ \rho_k(u) = \dfrac{u^{k-1}}{\Gamma(k)}, & (0 < u \leqslant 1) \\ \rho_k(u) = 0, & (u \leqslant 0) \end{cases}$$

Γ étant la fonction eulerienne. Le comportement asymptotique de $\rho_k(u)$ est bien connu. Par exemple, H. Smida montre dans [11] que, pour $u > 0$,

$$\rho_k(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi(\frac{u}{k})}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left(1 + O\Big(\frac{1}{u+k}\Big)\right) \tag{1.5}$$

où γ est la constante d'Euler, σ_0, σ_2 et ξ sont définies un peu plus bas. Comme application de la formule (1.4) H. Smida obtient une formule asymptotique pour une classe de fonctions arithmétiques f vérifiant : $f = \tau_k * h$ et

$$\sum_{\substack{n>t \\ P(n)\leqslant y}} \frac{|h(n)|}{n} \ll e^{-(\log t)^{\frac{3}{5}-\frac{\epsilon}{2}}} + e^{-(\log t)/(\log y)^{\frac{2}{5}+\frac{\epsilon}{2}}}, \quad (t \geqslant 2, y \geqslant 2).$$

En utilsant la méthode du col, l'auteur donne les estimations suivantes de $\Psi_{\tau_k}(x,y)$ qui nous seront utiles dans la suite de cet article et que nous rappelons ici : la première, valable pour $x \geqslant y \geqslant 2$ et dont une restriction au domaine $1 \leqslant u \leqslant y/(\log y)$ est formulée par

$$\Psi_{\tau_k}(x,y) = \frac{x^{\alpha_k}\zeta(\alpha_k,y)^k}{\alpha_k\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha_k,y)}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\} \tag{1.6}$$

où on a noté $\phi_l(s,y) := \dfrac{\partial^l}{\partial s^l} k\log\zeta(s,y)$ et $\alpha_k := \alpha_k(x,y)$ l'unique solution de l'équation $\log x + \phi_1(\alpha_k, y) = 0$. La deuxième estimation est donnée par

$$\Psi_{\tau_k}(x,y) = \frac{x(\log y)^{k-1}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi(\frac{u}{k})+O(\frac{u}{L_\epsilon(y)}+\frac{\log 2u}{\log y})} \tag{1.7}$$

valable uniformément pour $y \geqslant 2, \ \ 1 \leqslant u \leqslant y^{1-\epsilon}$, avec les notations suivantes : $\xi(v)$ est pour $v \neq 1$ l'unique solution non nulle de l'équation $e^{\xi(v)} = 1 + v\xi(v)$, avec la convention $\xi(1) = 1$,

$$\sigma_j := kI^{(j)}(\xi(\frac{u}{k})), \quad j \in \mathbb{N}, \quad I(s) := \int_0^s \frac{e^v - 1}{v}\,dv, \ s \in \mathbb{C},$$

et

$$L_\epsilon(y) := \exp\Big((\log y)^{\frac{3}{5}-\epsilon}\Big) \quad (0 < \epsilon \leqslant \frac{1}{2}).$$

La troisième estimation est une formule qui décrit le comportement local de la fonction $\Psi_{\tau_k}(x, y)$:

$$\Psi_{\tau_k}(rx, y) = \Psi_{\tau_k}(x, y) r^{\alpha_k} \left(1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}} + \frac{t}{u}\Big)\right) \tag{1.8}$$

valable uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, et où $1 \leqslant r \leqslant y$, $t = \log r / \log y$ et $\overline{u} = \min(u, y/\log y)$. Rappelons ici la formule de A. Selberg [8] que nous utiliserons dans la suite : pour $x \geqslant 2$,

$$S_k(x) := \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = \frac{x}{\Gamma(k)} (\log x)^{k-1} \left(1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\right). \tag{1.9}$$

Dans le présent travail, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la fonction $\Psi_f(x, y)$ pour une classe de fonctions f. Si notre première motivation est d'estimer $\Psi_f(x, y)$ pour les fonctions $f = \tau_k * h$ dans un domaine plus large que (H_ϵ), où h est une fonction multiplicative possédant certaines propriétés sur la suites des entiers friables et qui sera l'objet du paragraphe 2, nous verrons au pargraphe 3 que nos résultats ont de nombreuses applications et notamment des résultats sur la moyenne de la fonction nombre des diviseurs des entiers friables en progressions arithmétiques. Les cas étudiés interviennent de façon naturelle dans la démonstration du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et expliquent en partie pourquoi l'étude de la fonction $\Psi_f(x, y)$ a suscité un grand intérêt.

Récemment, G. Hanrot, G. Tenenbaum et J. Wu [4] ont étudié $\Psi_f(x, y)$ pour une vaste classe de fonctions arithmétiques caractérisées par la propriété que le comportement asymptotique au voisinage de 1 de leurs séries de Dirichlet est semblable à un produit fini de puissances de fonctions zêta de Dedekind. Cette classe englobe celle qui est étudiée ici, cependant leur méthode donne des résultats généraux dont la validité est confinée dans, au plus, le domaine (H_ϵ). Dans le présent article, nous donnons des résultats dont le domaine de validité est plus large ce qui permet d'améliorer, notamment les résultats de H. Smida [10] et nous obtenons comme applications, des résultats nouvaux. Notre méthode repose sur l'exploitation systématique des théorèmes locaux, partie intégrante de notre précédent travail [7].

Je tiens exprimer ici mes plus vifs remerciements à A. Granville pour son encouragement et à H. Smati pour son aide à l'élaboration de ce travail.

2. Le théorème principal

Désignons par $T(k)$ la classe des fonctions arithmétiques multiplicatives f de la forme $f = \tau_k * h$, où h est une fonction multiplicative dont les séries pour chaque nombre premiers p

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(p^r)}{p^{\sigma r}}, \qquad \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(p^r)\log p^r}{p^{\sigma r}} \tag{2.1}$$

convergent absolument pour $\sigma > \frac{1}{2}$. Pour $\sigma > \frac{1}{2}$, on pose

$$R_1(\sigma, y) := \sum_{p\leqslant y}\sum_{r\geqslant 1} \frac{|h(p^r)|}{p^{\sigma r}}, \qquad R_2(\sigma, y) := \sum_{p\leqslant y}\sum_{r\geqslant 1} \frac{|h(p^r)|\log p^r}{p^{\sigma r}}.$$

On remarque que par passage au produit eulérien, on obtient

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P(n)\leqslant y}} \frac{|h(n)|}{n^\sigma} \leqslant e^{R_1(\sigma,y)} \tag{2.2}$$

et l'inégalité

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P(n)\leqslant y}} \frac{|h(n)|\log n}{n^\sigma} \leqslant \sum_{p\leqslant y}\sum_{r\geqslant 1} \frac{|h(p^r)|\log p^r}{p^{\sigma r}} \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P(n)\leqslant y}} \frac{|h(n)|}{n^\sigma}$$

montre que

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P(n)\leqslant y}} \frac{|h(n)|\log n}{n^\sigma} \leqslant R_2(\sigma, y)e^{R_1(\sigma,y)}. \tag{2.3}$$

Soient $\epsilon > 0$ fixé et $x_0(\epsilon, k)$ une constante positive suffisamment grande, dépendant de ϵ et k. Désignons par (R_ϵ) la condition

$$x \geqslant x_0(\epsilon, k), \quad (\log x)^{2+\epsilon} \leqslant y \leqslant x. \tag{R_ϵ}$$

Théorème 2.1. *Pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, f une fonction de la classe $T(k)$ et sous la condition (R_ϵ), on a uniformément*

$$\Psi_f(x, y) = \Psi_{\tau_k}(x, y) \left(\sum_{n\leqslant y} \frac{h(n)}{n^{\beta_k}} + O\left(\frac{\log\log y}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k} \right) R(\beta_k - \frac{\epsilon}{2}, y) \right) \tag{2.4}$$

avec

$$R(\beta_k - \frac{\epsilon}{2}, y) := R_2(\beta_k - \frac{\epsilon}{2}, y)e^{R_1(\beta_k - \frac{\epsilon}{2}, y)}$$

et

$$\beta_k = \beta_k(x, y) := 1 - \frac{\max\{1, \xi(u/k)\}}{\log y}.$$

La preuve de ce théorème repose sur l'étude locale de la fonction $\Psi_{\tau_k}(x, y)$, que nous présentons dans le paragraphe 2.1 ci-dessous. La preuve du théorème 2.1 sera donnée au paragraphe 2.2.

2.1. Etude locale de $\Psi_{\tau_k}(x,y)$

La proposition suivante résume le comportement local de $\Psi_{\tau_k}(x,y)$ dont on a besoin dans la suite.

Proposition 2.1. *Soit* $0<\epsilon<1$ *un nombre réel fixé arbitrairement. Notons* $(\overline{R}_\epsilon)$ *la condition*

$$x \geqslant 2 \quad (\log x)^{1+\epsilon} \leqslant y \leqslant x.$$

1. *On a uniformément sous les conditions* $(\overline{R}_\epsilon)$ *et* $1 \leqslant d \leqslant \min\Big(y, \dfrac{x}{2}\Big)$,

$$\Psi_{\tau_k}\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{d^{\beta_k}}\left\{1 + O\left(\frac{\log d}{\log x} + \frac{\log\log y}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k}\right)\right\}. \tag{2.5}$$

2. *Il existe une constante* $c>0$ *telle que l'on ait*

$$\Psi_{\tau_k}(\frac{x}{d}, y) \ll \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{d^{\beta_k - \frac{c}{\log y}}} \tag{2.6}$$

uniformément sous les conditions $(\overline{R}_\epsilon)$ *et* $1 \leqslant d \leqslant x$.

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant qui regroupe les propriétés des fonctions ξ, ρ_k, β_k et σ_2.

Lemme 2.1.

1. *La fonction* ξ *vérifie les inégalités suivantes :*
   (a) $\xi(\frac{u}{k}) = \log u + \log\log u + O(1), \quad (u \geqslant 2k).$
   (b) $\frac{5}{4}(\frac{u}{k} - 1) \leqslant \xi(\frac{u}{k}) \leqslant 2(\frac{u}{k} - 1), \quad (k \leqslant u \leqslant 2k).$
   (c) $-\frac{u}{k} \leqslant \xi(\frac{u}{k}) \leqslant -\frac{u}{k} + 1, \quad (0 < u \leqslant k).$
2. *On a*
   (a) $\sigma_2(\frac{u}{k}) = \frac{u^2}{k}\Big(1 + O(\frac{u}{k})\Big), \quad (0 < u \leqslant k).$
   (b) $\sigma_2(\frac{u}{k}) = u\left(1 + O\Big(\frac{1}{\log(1+\frac{u}{k})}\Big)\right), \quad (u > k).$
   (c) $\sigma_3(\frac{u}{k}) := \sigma_2'(\frac{u}{k}) = 2\frac{u^3}{k^2}\Big(1 + O(\frac{u}{k})\Big), \quad (0 < u \leqslant k).$
   (d) $\sigma_3(\frac{u}{k}) = u\left(1 + O\Big(\frac{1}{\log(1+\frac{u}{k})}\Big)\right), \quad (u > k).$

3. *Pour* $k>0$, $0\leqslant t\leqslant 1$ *et* $t<u$, *on a l'estimation*

$$\rho_k(u-t)=\rho_k(u)e^{t\xi(\frac{u}{k})}\left(1+O\Big(\frac{t}{u}\Big)\right).$$

4. *Sous la condition* $1\leqslant d\leqslant \dfrac{x}{2}$, *on a*

$$\beta_k\Big(\frac{x}{d},y\Big)=\beta_k(x,y)+O\left(\frac{\log d}{\log x\log y}\right).$$

5. *Soit* $0<\eta<\frac{1}{2}$ *un nombre fixé. Sous la condition*

$$(\log x)^{2+\eta}\leqslant y\leqslant x,\quad \textit{et}\quad x\geqslant x_0(\eta,k),$$

on a

$$\beta_k(x,y)\geqslant \frac{1}{2}+\frac{\eta}{6}.$$

Démonstration. Les points (1) et (2) est le lemme 4.3 de [11]. Montrons (3). On rappelle que

$$\sigma_0(u)=k\int_0^1(e^{t\xi(\frac{u}{k})}-1)\frac{dt}{t},\quad \sigma_2(u)=k\int_0^1 te^{t\xi(\frac{u}{k})}dt.$$

Comme $u>0$ et $k>0$, et compte tenu de l'expression (1.5) de ρ_k, on a

$$\frac{\rho_k(u-t)}{\rho_k(u)}=\sqrt{\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_2(u-t)}}\exp\left(F(u,t)\right),$$

avec

$$F(u,t):=u\xi\Big(\frac{u}{k}\Big)-(u-t)\xi\Big(\frac{u-t}{k}\Big)+\int_{\xi(\frac{u}{k})}^{\xi(\frac{u-t}{k})}\frac{e^v-1}{v}\,dv.$$

En dérivant deux fois $F(u,t)$ par rapport à t et en utilisant la relation

$$e^{\xi(\frac{u}{k})}=1+\frac{u}{k}\,\xi\Big(\frac{u}{k}\Big),\tag{2.7}$$

on obtient

$$\frac{\partial F(u,t)}{\partial t}=\xi\Big(\frac{u-t}{k}\Big),\quad \frac{\partial^2F(u,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{k}\xi'\Big(\frac{u-t}{k}\Big).$$

La relation(2.7) implique

$$\xi'\Big(\frac{u}{k}\Big)=\frac{\xi(\frac{u}{k})}{e^{\xi(\frac{u}{k})}-\frac{u}{k}}=\frac{k}{u}\left\{1+O\left(\frac{1}{\xi(\frac{u}{k})}\right)\right\}.$$

La formule de Taylor en $t = 0$ à l'ordre 2 donne

$$F(u,t) = t\xi\Big(\frac{u}{k}\Big) + O\Big(\frac{t^2}{u}\Big),$$

où nous avons ulitisé l'estimation de ξ'. On termine la preuve de ce point en faisant appel au point 1. de ce lemme.

Le point 4. découle du théorème des accroissements finis et de l'estimation de ξ' et le point 5. est une conséquence de 1.

Démonstration de la proposition 2.1. Montrons la formule (2.5). Sous l'hypothèse $\frac{x}{y} \leqslant d \leqslant \frac{x}{2}$ et en notant $u_d = \frac{\log d}{\log x}$, la formule (1.9) donne

$$\begin{aligned} \Psi_{\tau_k}\Big(\frac{x}{d}, y\Big) &= \sum_{n\leqslant \frac{x}{d}} \tau_k(n) = \frac{x}{d\,\Gamma(x)}\Big(\log\frac{x}{d}\Big)^{k-1}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log\frac{x}{d}}\right)\right\} \\ &= \frac{x^{k-1}}{d}(\log y)^{k-1}\frac{(u-u_d)^{k-1}}{\Gamma(k)}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log\frac{x}{d}}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

et sous l'hypothèse $\frac{x}{y} \leqslant d \leqslant y$, u est borné et $\frac{1}{\log y} \leqslant \frac{1}{\log(x/d)}$ et on a, en appliquant la formule (1.4),

$$\Psi_{\tau_k}(x,y) = x(\log y)^{k-1}\rho_k(u)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log\frac{x}{d}} + \frac{1}{(\log y)^k}\right)\right\}. \tag{2.9}$$

Mais d'après le lemme 2.1, (3), on a, d'une part

$$\rho_k(u-u_d) = \rho_k(u)d^{\frac{\xi(u/k)}{\log y}}\left(1 + O\Big(\frac{\log d}{\log x}\Big)\right)$$

puisque $0 \leqslant u_d \leqslant 1$, $1 \leqslant u < 2$ et $u_d \neq u$, et d'autre part, par définition

$$\rho_k(u-u_d) = \frac{(u-u_d)^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

car $0 < u - u_d \leqslant 1$. Finalement, on a obtenu

$$\rho_k(u)d^{\frac{\xi(u/k)}{\log y}}\left(1 + O\Big(\frac{\log d}{\log x}\Big)\right) = \frac{(u-u_d)^{k-1}}{\Gamma(k)}.$$

En substituant dans (2.9) et en tenant compte de (2.8), on obtient la formule (2.5) pour $\frac{x}{y} < d \leqslant y$.

Considérons le cas $1 \leqslant d \leqslant \frac{x}{y}$ et $d < \frac{x}{2}$. Sous la condition $2 \leqslant u \leqslant \log y$, l'apllication de la formule (1.4) deux fois donne

$$\Psi_{\tau_k}\big(\frac{x}{d}, y\big) = \frac{\rho_k(u-u_d)}{d\rho_k(u)}\Psi_{\tau_k}(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{\log\log y}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k}\right)\right\}. \tag{2.10}$$

On obtient la formule (2.5) de (2.10) en utilisant l'estimation (3) du lemme 2.1. Maintenant, supposons que $u > \log y$. Sous la condition $(\overline{R}_\epsilon)$, d'une part que l'application de (1.8) fournit

$$\Psi_{\tau_k}\big(\frac{x}{d}, y\big) = d^{-\alpha_k(x/d,y)}\Psi_{\tau_k}(x,y)\left(1 + O\Big(\frac{u_d+1}{u}\Big)\right) \tag{2.11}$$

et d'autre part, le lemme 2.5 de [7], le lemme 2.1 (4), impliquent

$$\alpha_k\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \beta_k + O\left(\frac{1}{\log x \log y}\right). \tag{2.12}$$

En combinant les relations (2.11) et (2.12), on obtient le résultat souhaité.

Montrons à présent le point 2 de la proposition. Il est clair à partir de la démonstration de la formule (2.5) qu'il reste à prouver le point (2) que dans chacun des cas des domaines $\big(\frac{x}{2} < d \leqslant x\big)$; $\big(\frac{x}{y} \leqslant y < d \leqslant \frac{x}{2}\big)$; $\big(y < d \leqslant \frac{x}{y}$ et $u > \log y\big)$. Dans le domaine $\frac{x}{2} < d \leqslant x$, on a trivialement

$$\Psi_{\tau_k}\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = 1 \ll \frac{x^{\beta_k - \frac{c}{\log y}}}{d^{\beta_k - \frac{c}{\log y}}} \ll \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{d^{\beta_k - \frac{c}{\log y}}}. \tag{2.13}$$

Maintenant, supposons que $\frac{x}{y} \leqslant y < d \leqslant \frac{x}{2}$. La formule (1.4) combinée au lemme 2.1 (3) donne de nouveau le point (2). Enfin supposons que $y < d \leqslant \frac{x}{y}$ et $u > \log y$. La formule (1.8) donne

$$\Psi_{\tau_k}\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \frac{1}{d^{\alpha_k(\frac{x}{d}, y)}}\Psi_{\tau_k}(x,y)\left(1 + O\Big(\frac{u_d+1}{u}\Big)\right). \tag{2.14}$$

La fonction $x \mapsto \alpha_k(x,y)$ étant décroissante, on a

$$\alpha_k(\frac{x}{d}, y) \geqslant \alpha_k(x,y) \geqslant \beta_k - \frac{c}{\log y}$$

par utilisation du lemme 2.4 de [7]. Enfin, on obtient le point (2) en remarquant que

$$\frac{u_d+1}{u} = \frac{\log d + \log y}{\log x} \ll \frac{\log d}{\log x}.$$

2.2. Démonstration du théorème 2.1

Soit $1 \leqslant z \leqslant \dfrac{x}{2}$ un paramètre. Ecrivons

$$\Psi_f(x,y) = S_1 + S_2 + S_3$$

avec

$$S_1 := \sum_{\substack{n \leqslant z \\ P(n) \leqslant y}} h(n)\Psi_{\tau_k}(\frac{x}{n}, y),\ S_2 := \sum_{\substack{z < n \leqslant \frac{x}{2} \\ P(n) \leqslant y}} h(n)\Psi_{\tau_k}(\frac{x}{n}, y),\ S_3 := \sum_{\substack{\frac{x}{2} < n \leqslant x \\ P(n) \leqslant y}} h(n).$$

Evaluons d'abord S_3. On a

$$|S_3| \ll \frac{x^{\beta_k}}{\log x} \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ P(n) \leqslant y}} \frac{|h(n)| \log n}{n^{\beta_k}}.$$

D'après la formule (1.7), on a

$$x^{\beta_k} \ll \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{(\log y)^k}.$$

Il s'ensuit

$$|S_3| \ll \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log y)^k} \right) \Psi_{\tau_k}(x,y) R_2(\beta_k, y) e^{R_1(\beta_k, y)}.$$

Considérons S_2. En appliquant la proposition 2.1 (2), on obtient, sous la condition (R_ϵ),

$$\begin{aligned} |S_2| &\leqslant \frac{1}{\log z} \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{2} \\ P(n) \leqslant y}} |h(n)| \log n \Psi_{\tau_k}\left(\frac{x}{n}, y\right) \ll \\ &\ll \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{\log z} \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{2} \\ P(n) \leqslant y}} \frac{|h(n)| \log n}{n^{\beta_k - c/\log y}} \ll \\ &\ll \frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{\log z} R_2(\beta_k - \epsilon/2, y) e^{R_1(\beta_k - \epsilon/2, y)}. \end{aligned}$$

En choisissant $z = \exp\left(\dfrac{\log y}{\log\log y}\right)$, on obtient

$$|S_2| \ll \frac{\log\log y}{\log y} \Psi_{\tau_k}(x,y) R_2(\beta_k - \epsilon/2, y) e^{R_1(\beta_k - \epsilon/2, y)}.$$

A présent, on va estimer S_1. On applique la proposition 2.1 (1). On obtient, uniformément sous la condition (R_ϵ) et pour le choix précédent du paramètre z, $S_1 = \widetilde{S_1} + O(\overline{S_1})$ avec

$$\widetilde{S_1} := \Psi_{\tau_k}(x,y) \sum_{n \leqslant z} \frac{h(n)}{n^{\beta_k}},$$
$$\overline{S_1} := \left(\frac{\log\log y}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k)} \right) \Psi_{\tau_k}(x,y) \sum_{n \leqslant z} \frac{|h(n)| \log n}{n^{\beta_k}}.$$

On a clairement,

$$\overline{S_1} \ll \left(\frac{\log\log y}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^k)} \right) \Psi_{\tau_k}(x,y) R_2(\beta_k, y) e^{R_1(\beta_k, y)}.$$

On écrit

$$\widetilde{S_1} = \Psi_{\tau_k}(x,y) \sum_{n \leqslant y} \frac{h(n)}{n^{\beta_k}} - \Psi_{\tau_k}(x,y) \sum_{z < n \leqslant y} \frac{h(n)}{n^{\beta_k}}.$$

On a

$$\Psi_{\tau_k}(x,y) \sum_{z < n \leqslant y} \frac{|h(n)|}{n^{\beta_k}} \leqslant \frac{1}{\log z} \sum_{n \leqslant y} \frac{|h(n)| \log n}{n^{\beta_k}} \Psi_{\tau_k}(x,y) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\log\log y}{\log y} \right) \Psi_{\tau_k}(x,y) R_2(\beta_k, y) e^{R_1(\beta_k, y)}.$$

Le théorème s'en déduit en rassemblant les estimations de S_1, S_2 et S_3.

3. Applications

Comme première application du théorème 2.1 est le résultat suivant :

Corollaire 3.1. *Soit un entier $l \geqslant 2$. Pour $x \geqslant y \geqslant (\log x)^{2+\epsilon}$, on a*

$$\sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n = n_1 n_2 n_3^l}} 1 = \zeta(l\beta_2) \Psi_\tau(x,y) \left(1 + O\Big(\frac{\log\log y}{\log y} \Big) \right).$$

Démonstration. Notons $D(1,1,l,x,)$ la fonction à estimer. On a

$$\begin{aligned} D(1,1,l,x,) &= \sum_{\substack{m=n_1n_2 \\ m\in S(\frac{x}{n^l},y) \\ n\in S(x^{1/l},y)}} 1 = \sum_{n\in S(x^{1/l},y)} \Psi_\tau\Big(\frac{x}{n^l},y\Big) = \\ &= \sum_{n\leqslant y^{1/l}} \Psi_\tau\Big(\frac{x}{n^l},y\Big) + \sum_{y^{1/l}<n\leqslant x^{1/l}} O\left(\Psi_\tau\Big(\frac{x}{n^l},y\Big)\right) = \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1

$$S_1 = \sum_{n\leqslant y} \frac{1}{n^{l\beta_2}} \left\{1 + O\left(\frac{\log n}{\log x} + \frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\} \Psi_\tau(x,y).$$

Le résultat découle en observant que $l \geqslant 2$, et $\beta_2 > \dfrac{1}{2}$ et en remarquant que

$$S_2 \ll \frac{1}{\log y} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\log n}{n^{l(\beta_2 - c/\log y)}} \Psi_\tau(x,y).$$

Pour un intérêt d'ordre pratique, nos autres applications portent en grande partie sur la répartition des valeurs des fonctions de piltz d'indice k entier $\geqslant 2$.

Soient a et q deux entiers premiers entre eux, et f une fonction arithmétique. Nous noterons dans toute la suite

$$\Psi(x,y,f,q) := \sum_{\substack{n\in S(x,y) \\ (n,q)=1}} f(n), \qquad \Psi(x,y,f,a,q) := \sum_{\substack{n\in S(x,y) \\ n\equiv a[q]}} f(n).$$

Naturellement, on a

$$\Psi(x,y,f,a,q) := \frac{1}{\varphi(q)} \Psi(x,y,f,q) + \text{erreur}, \tag{3.1}$$

où φ désigne la fonction d'Euler. L'étude de $\Psi(x,y,1,q)$ avec $1(n) = 1$ a retenu l'attention de nombreux chercheurs depuis une quinzaine d'années. Parmi eux citons E. Fouvry et G. Tenenbaum [2], A. Granville [3], et T.Z. Xuan [15].

La relation (3.1) montre qu'il est capital d'estimer les fonctions du second membre. Ici, nous estimerons les deux quantités

$$\Psi(x,y,\tau_k,q), \quad \Psi(x,y,\tau,a,q) - \frac{1}{\varphi(q)} \Psi(x,y,\tau,q).$$

(cf théorèmes 3.1 et 3.2.) et nous améliorons un théorème de G. Bachman [1]. L'idée de base de Bachman est d'écrire τ_k la puissance k-ième de convolution de la fonction 1 et utilise une récurrence sur k. Une autre voie est d'exploiter le théorème 2.1 ci-dessus qui peut être généralisé à d'autres fonctions en particulier à la fonction $\Psi(x, y, \tau_k, a, q)$. Nous reviendrons sur le terme d'erreur de (3.1) dans un travail ultérieur. Ayant précisé les fonctions à étudier dans cette partie, introduisons maintenant quelques notations.

Définissons pour $y \geqslant 2$,

$$q_y := \prod_{\substack{p \leqslant y \\ p|q}} p, \quad \omega(q) := \sum_{p|q} 1, \quad \varphi(q_y, s) = \prod_{\substack{p \leqslant y \\ p|q}} (1 - p^{-s})$$

et rappelons que $\varphi(q) = q \prod_{p|q} \Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big)$. Le théorème ci-après donne une estimation de $\Psi(x, y, \tau_k, q)$.

Théorème 3.1. *Soient* $\epsilon \in]0, 1[$ *et* q *un entier strictement positif. Sous les conditions*

$$(H_{\epsilon,q}) \qquad \begin{gathered} x \geqslant x_0(\epsilon), \quad \exp\,(\log\log x)^{1+\epsilon} \leqslant y \leqslant x, \\ \omega(q_y) \leqslant \exp\left(\Big(\frac{\log y}{\log\log x}\Big)^{\frac{1-\epsilon}{k+1}}\right) \end{gathered}$$

on a uniformément

$$\Psi(x, y, \tau_k, q) = \Psi_{\tau_k}(x, y) \left\{ \varphi^k(q_y, \beta_k) + O\left(\log^{k+1}(\omega(q_y) + 3) \frac{\log\log y}{\log y} \right) \right\}.$$

Démonstration. Soit χ_q la fonction caractéristique des entiers premiers à q. On a $\tau_k \chi_q = \tau_k * h_q$ avec $h_q(p^m) = (-1)^m \dbinom{k}{m}$ si $1 \leqslant m \leqslant k$ et $p|q$; et $h_q(p^m) = 0$ sinon, avec $\dbinom{k}{m} = \dfrac{k(k-1)...(k-m+1)}{m!}$. Il est clair que $|h_q(p^m)| \leqslant \frac{k^m}{m!}$. Par conséquent,

$$\sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 1}} \frac{|h_q(p^r)|}{p^{r(\beta_k - \frac{\epsilon}{2})}} \ll \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p|q}} \frac{k}{p^{\beta_k - \frac{\epsilon}{2}}} \ll k \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p|q}} \frac{1}{p^{\beta_k}} \ll k \sum_{p \leqslant k_q} \frac{1}{p^{\beta_k}} \ll k \sum_{p \leqslant k_q} \frac{1}{p} \ll k \log\log k_q$$

où k_q est tel que $\sum_{p \leqslant k_q} 1 = \omega(q_y)$ si $\omega(q_y) \geqslant 2$ et $k_q = e$ si $\omega(q_y) \leqslant 1$. Il s'ensuit que

$$\exp(R_1(\beta_k - \frac{\epsilon}{2}, y)) \ll (\log k_q)^k.$$

On a également

$$\sum_{\substack{p\leqslant y\\ r\geqslant 1}} \frac{|h_q(p^r)|\log p^r}{p^{r(\beta_k-\frac{\epsilon}{2})}} \ll k\sum_{p\leqslant k_q}\frac{\log p}{p} \ll k\log k_q,$$

et donc

$$R_2(\beta_k-\frac{\epsilon}{2},y)\exp(R_1(\beta_k-\frac{\epsilon}{2},y)) \ll (\log k_q)^{k+1}.$$

Ainsi la conclusion du théorème 2.1 s'obtient en remarquant que $\log k_q \ll$ $\ll \log(\omega(q_y)+2)$ et de la relation

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P(n)\leqslant y}} \frac{h_q(n)}{n^s} = \prod_{\substack{p|q\\ p\leqslant y}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^k$$

valable pour $\Re(s)>0$.

Du théorème 3.1, nous déduisons la comparaison de $\Psi(x,y,\tau_k,q)$ et de $\Psi(x,y)$ dans le corollaire suivant

Corollaire 3.2. *Sous les conditions*

$$x\geqslant x_0(\epsilon),\quad \exp\left(\log\log x\right)^{1+\epsilon}\leqslant y\leqslant x,\quad \log(q+1)\leqslant \exp\left(\left(\frac{\log y}{\log\log x}\right)^{\frac{1-\epsilon}{2k+1}}\right),$$

on a uniformément

1.
$$\Psi(x,y,\tau_k,q)=$$
$$=\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^k \Psi_{\tau_k}(x,y)\left\{1+O\left(\frac{\log\log^{2k+1}(q+2)\log\log x}{\log y}\right)\right\}.$$

2.
$$\Psi(x,y,\tau_k,q)\sim\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^k \Psi(x^{1/k},y)^k(\sqrt{2\pi u}\log y)^{k-1}k^{-\frac{k}{2}},\quad x\to+\infty.$$

La preuve de ce corollaire découle des lemmes suivants et du théorèmes 2.1.

Lemme 3.1. *Si $u,y\to+\infty$, on a les estimations suivantes*

1.
$$\Psi_{\tau_k}(x,y)\sim\Psi(x^{1/k},y)^k(\sqrt{2\pi u}\log y)^{k-1}k^{-\frac{k}{2}}$$

lorsque $\dfrac{y}{\log x}\to+\infty$.

2.
$$\Psi_{\tau_k}(x,y) \sim \Psi(x^{1/k},y)^k \left(\sqrt{\frac{2\pi y}{\log y}}\right)^{k-1}$$

lorsque $\dfrac{y}{\log x} \to 0$.

Démonstration. D'après le corollaire 1 de [7] et les estimations $\Psi(x,y)$ de [6], on a

$$\frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{\Psi(x^{1/k},y)^k} \sim \frac{(\sqrt{2\pi u}\log y)^{k-1}}{k^{\frac{k}{2}}}; \quad u \to +\infty,\ \frac{y}{\log x} \to +\infty, \tag{3.2}$$

et
$$\frac{\Psi_{\tau_k}(x,y)}{\Psi(x^{1/k},y)^k} \sim \left(\sqrt{2\pi\frac{y}{\log y}}\right)^{k-1}; \quad y \to +\infty,\ \frac{y}{\log x} \to +\infty.$$

La conclusion découle de ces estimations et du fait que $\beta_k \to 1$ lorsque x, $\dfrac{\log y}{\log\log x} \to +\infty$.

Lemme 3.2. *Sous les conditions*

$$x \geqslant x_0(\epsilon), \quad \exp\,(\log\log x)^{1+\epsilon} \leqslant y \leqslant x, \quad \log(q+2) \leqslant \exp\left(\left(\frac{\log y}{\log\log x}\right)^{1-\epsilon}\right),$$

on a

1.
$$\varphi^k(q_y,\beta_k) = \varphi^k(q_y,1)\left(1 + O\left(\frac{\log\log x\log(\omega(q_y)+2)}{\log y}\right)\right).$$

2.
$$\varphi^k(q_y,1) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^k\left(1 + O\Big(\frac{\omega(q)}{y}\Big)\right).$$

Démonstration. Pour le point (1), on utilise la relation suivante

$$\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p|q}}\left(\frac{1-p^{-\beta_k}}{1-p^{-1}}\right)^k = \exp\left\{k\int_{\beta_k}^1\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p|q}}\frac{\log p}{p^\sigma - 1}\,d\sigma\right\}$$

et l'estimation (cf 3.7 de [7])

$$\int_{\beta_k}^1\sum_{p\leqslant k_q}\frac{\log p}{p^\sigma-1}\,d\sigma = \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_\epsilon(k_q)}\right)\right\}\int_{\beta_k}^1\int_1^{k_q} t^{-\sigma}\,dt\,d\sigma + O(|1-\beta_k|).$$

La valeur absolue de l'intégrale étant

$$\leqslant \left| \int_{\beta_k}^{1} (k_q)^{1-\sigma} \log k_q d\sigma \right| \ll (k_q)^{\frac{\xi}{\log y}} \log k_q \frac{\log(u+1)}{\log y} \ll \frac{\log \log x}{\log y} \log k_q.$$

On obtient le résultat souhaité. Le point (2) découle des inégalités suivantes

$$\frac{\varphi(q_y, 1)}{q_y} . \frac{\varphi(q)}{q} \leqslant \prod_{\substack{p>y \\ p|q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-\omega(q)},$$

et

$$\frac{\varphi(q_y, 1)}{q_y} - \frac{\varphi(q)}{q} \leqslant \frac{\varphi(q)}{q} \left(\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-\omega(q)} - 1 \right) =$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q} \left(\exp\left(O\left(\frac{\omega(q)}{y}\right) - 1 \right) \right) = \frac{\varphi(q)}{q} O\Big(\frac{\omega(q)}{y}\Big).$$

Démonstration du corollaire 3.2. Le point (1) découle du lemme 3.2, du théorème 2.1 et des relations

$$\frac{\varphi(q)}{q} \ll \log \log(q+2), \quad \text{et} \quad \omega(q_y+2) \leqslant \omega(q+2) \ll \log(q+2).$$

Maintenant, montrons le point (2). D'après la formule (1.7) et les estimations de $\Psi(x, y)$, on a

$$\Psi_{\tau_k}(x, y) = (\log y)^{k-1} \left(\frac{x^{1/k} e^{\gamma + \frac{\sigma_0 - u\xi(u)}{k}}}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma_2}{k}}} \right)^k k^{-\frac{k}{2}} (2\pi\sigma_2)^{\frac{k-1}{2}} e^{O\left(\frac{u}{L_\epsilon(y)} + \frac{\log 2u}{\log y}\right)}$$

$$= (\log y)^{k-1} \Psi(x^{1/k}, y)^k k^{-\frac{k}{2}} (2\pi\sigma_2)^{\frac{k-1}{2}} e^{O\left(\frac{u}{L_\epsilon(y)} + \frac{\log 2u}{\log y}\right)},$$

et en utilisant l'estimation

$$\sigma_2(u) = \frac{k}{\xi'(u/k)} = u \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log(u+1)}\right) \right\},$$

On obtient

$$\Psi_{\tau_k}(x, y) = (\log y)^{k-1} \Psi(x^{1/k}, y)^k k^{-\frac{k}{2}} (2\pi u)^{\frac{k-1}{2}} e^{O\left(\frac{u}{L_\epsilon(y)} + \frac{\log 2u}{\log y} + \frac{1}{\log(u+1)}\right)}.$$

La conclusion découle de cette estimation, du théorème 2.1 et des lemmes 3.1 et 3.2. Ceci termine la démonstration .

En utilisant l'orthogonalité des caractères et des résultats sur les fonctions $\Psi(x, y)$ et $\Psi_\chi(x, y)$ où χ est un caractère de Dirichlet, nous établissons le théorème suivant lié aux progressions arithmétiques.

Théorème 3.2. *Soient A un nombre réel positif, a et q des entiers tels que* $(a,q) = = 1$. *Sous la condition*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\left\{(\log x \log\log x)^{2/3}\right\} \leqslant y \leqslant x,$$

et pour tout caractère de Dirichlet χ *non principal de module q, il existe des constantes positives* c_1 *et* c_2 *telles qu' on ait, uniformément pour* $1 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$,

$$\Psi(x,y,\tau,a,q) = \frac{1}{\varphi(q)}\Psi(x,y,\tau,q) + O\left(e^{c_1 u - c_2\sqrt{\log y}}\Psi(x,y)\right).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant prouvé dans [3] :

Lemme 3.3. *Soit A un nombre réel positif. Sous la condition*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\left\{(\log\log x)^2\right\} \leqslant y \leqslant x, \tag{3.3}$$

et pour tout caractère de Dirichlet χ *non principal de module q, il existe une constante* $c > 0$ *telle qu' on ait, uniformément pour* $1 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$,

$$\sum_{n \in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x,y)\exp\left(-c\sqrt{\log y}\right).$$

Démonstration du théorème 3.2. D'après la relation d'orthogonalité, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n\in S(x,y)} \sum_{\chi} \chi(n)\overline{\chi}(m)\tau(n) &= \varphi(q)\Psi(x,y,\tau,m,q) \\ &= \Psi(x,y,\tau,q) + \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi}(m) \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n)\tau(n) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\Psi(x,y,\tau,m,q) = \frac{1}{\varphi(q)}\Psi(x,y,\tau,q) + \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(m)\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)\tau(n).$$

Notons par S la somme intérieure du second membre, on a

$$S = \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n)\Psi_\chi\Big(\frac{x}{n}, y\Big).$$

En effet, χ étant complétement multiplicative, on peut écrire $\chi\tau = \chi(1*1) = \chi * \chi$. On a alors

$$\begin{aligned} S = &\sum_{n\in S(\frac{x}{y},y)} \chi(n)\Psi_\chi\Big(\frac{x}{n},y\Big) + \sum_{\substack{\frac{x}{y}<n\leqslant x \\ P(n)\leqslant y}} \chi(n)\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}\chi(m) \ll \\ &\ll \sum_{n\in S(\frac{x}{y},y)} \exp\left(-c_1\sqrt{\log y}\right)\Psi\Big(\frac{x}{n},y\Big) + \left|\sum_{n\leqslant y}\chi(n)\sum_{\substack{\frac{x}{y}<m\leqslant\frac{x}{n} \\ P(m)\leqslant y}}\chi(m)\right| \ll \end{aligned}$$

$$\ll \exp\left(-c_1\sqrt{\log y}\right)\Psi(x,y)\sum_{P(n)\leqslant y}\frac{1}{n^{1-\frac{\xi(u)+c_3}{\log y}}}+$$

$$+\exp\left(-c\sqrt{\log y}\right)\Psi(x,y)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-\frac{\xi(u)}{\log y}}}\ll$$

$$\ll \exp\left(-c_1\sqrt{\log y}\right)\Psi(x,y)\prod_{p\leqslant y}\left(1-p^{-1+\frac{\xi(u)+c_3}{\log y}}\right)^{-1}.$$

D'après les résultats établis dans [7], on a

$$\zeta\left(1-\frac{\xi(u)+c_3}{\log y},y\right)\ll\zeta(1,y)\exp\left(c_2\int_0^{\xi(u)}\frac{e^t-1}{t}\,dt\right)\ll\log y\exp(c_2u).$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

Enfin terminons par une autre application du théorème 2.1.

Théorème 3.3.

1. *Soit g la fonction arithmétique multiplicative définie sur les puissances des nombres premiers par*

$$\forall r\geqslant 1,\quad g(2^r)=0,\quad \textit{et}\quad \forall p\neq 2,\ \forall r\geqslant 0,\quad g(p^r)=2^r.$$

Sous les conditions

$$x\geqslant 3,\quad y\geqslant(\log x)^{\frac{\log 3}{\log(3/2)}+\epsilon},$$

on a uniformément

$$\sum_{n\in S(x,y)}g(n)=\left(1-\frac{1}{2^{\beta_2}}\right)^2\prod_{3\leqslant p\leqslant y}\left(1+\frac{1}{p^{\beta_2}(p^{\beta_2}-2)}\right)\times$$

$$\times\Psi_\tau(x,y)\left\{1+O\left(\frac{\log\log y}{\log y}+\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

2. *Sous les conditions du théorème 2.1, on a uniformément*

$$\sum_{n\in S(x,y)}\mu^2(n)\tau(n)=$$

$$=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{3}{p^{2\beta_2}}+\frac{2}{p^{3\beta_2}}\right)\Psi_\tau(x,y)\left\{1+O\left(\frac{\log\log y}{\log y}+\frac{1}{u}\right)\right\},$$

et

$$\sum_{n\in S(x,y)}\tau(n^2)=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p^{2\beta_2}}\right)\Psi_{\tau_3}(x,y)\left\{1+O\left(\frac{\log\log y}{\log y}+\frac{1}{u}\right)\right\}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que $g = \tau * h$, avec

$$h(2) = -2,\ h(2^2) = 1,\ h(2^r) = 0,\ \text{pour } r \geqslant 3\ \text{ et}$$
$$\forall p \neq 2,\ h(p) = 0,\ h(p^r) = 2^{r-2}\ \text{pour } r \geqslant 2.$$

Il est clair que pour $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{h(n)}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^2 \prod_{p \geqslant 3} \left(1 + \frac{1}{p^s(p^s - 2)}\right)$$

et que cette série est absolument convergente pour $\Re(s) > (\log 2)/(\log 3) \approx 0,631$. Dans le domaine du point 1, on a $\beta_2 - \dfrac{c}{\log y} > \dfrac{\log 2}{\log 3}$ et par conséquent, on a

$$\sum_{p \leqslant y, r \geqslant 1} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\beta_2 - \frac{c}{\log y})}} \ll 1, \quad \text{et} \quad \sum_{p \leqslant y, r \geqslant 1} \frac{|h(p^r)| \log p^r}{p^{r(\beta_2 - \frac{c}{\log y})}} \ll 1.$$

La conclsion découle donc de l'application du théorème 2.1. Pour établir le point 2, On remarque que $\mu^2(n)\tau(n) = \tau * h$ avec

$$h(1) = 1,\ h(p) = 0,\ h(p^2) = -3,\ h(p^3) = 2,\ h(p^r) = 0 \text{ pour } r \geqslant 4.$$

Ainsi, la série de Dirichlet associée à h est absolument convergente pour $\Re(s) > 1/2$ et dans le domaine du théorème 2.1, on a $\beta_2 > \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$ et donc

$$\sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 1}} \frac{|h(p^r)|}{p^{r(\beta_2 - \frac{c}{\log y})}} \ll 1, \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 1}} \frac{|h(p^r)| \log p^r}{p^{r(\beta_2 - \frac{c}{\log y})}} \ll 1.$$

Et de nouveau le théorème 2.1 donne le résultat. Enfin, la dernière estimation se déduit du théorème 2.1 de la même façon, en remarquant que $\tau(n^2) = (\tau_3 * h)(n)$ où h est définie par $h(1) = 1$, $h(p^2) = -1$ et $h(p^r) = 0,\ r \neq 2$.

Remarque 3.1. Le théorème 2.1 s'applique également pour estimer les fonctions

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_k^2(n), \qquad \sum_{n \in S(x,y)} f(n)\tau_k(n),$$

où f est une fonction arithmétique fortement multiplicative satisfaisant $|f(p) - 1| \leqslant$ $\leqslant cp^{-\delta}$, avec c et δ deux constantes strictement positives.

Références

[1] **Bachman, G.,** Some remarks on nonnegative multiplicative functions on arithmetic progressions, *J. of Number Theory*, **73** (1998), 72–91.

[2] **Fouvry, E. et G. Tenenbaum,** Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.*, (6) **63** (1991), 449–494.

[3] **Granville, A.,** Integers without large prime factors, in arithmetic progressions, I, *Acta Math.*, Vol. **170** (1993), 255–273.

[4] **Hanrot, G., G. Tenenbaum et J. Wu,** Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables 2, *Proc. London Math. Soc.* à paraitre.

[5] **Hildebrand, A.,** On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory*, **22** (1986), 289–307.

[6] **Hildebrand, A. and G. Tenenbaum,** On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **296** (1986), 265–290.

[7] **Nyandwi, S.,** Mean value of Piltz' function over integers free of large prime factors, *Publ. Inst. Mathématique de Beograd, Nouvelle série*, tome **74(88)** (2003), 37–56.

[8] **Selberg, A.,** Note on the paper by L.G. Sathe, *J. Indian. Math. Soc.*, **18** (1954), 84–87.

[9] **Smati, A.,** Sur l'itération du nombre des diviseurs des entiers sans grand facteur premier, *J. of Number Theory*, **57** (1996), 66–89.

[10] **Smida, H.,** Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.*, **63** (1993), 21–50.

[11] **Smida, H.,** Sur les puissances de convolutions de la fonction de Dickman, *Acta Arith.*, **59** (1991), 123–143.

[12] **Tenenbaum, G.,** *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, Numéro 1 (1995) Collection SMF.

[13] **Tenenbaum, G. en collaboration avec J. Wu,** *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, Numéro 2, (1996) Collection SMF.

[14] **Tenenbaum, G. et J. Wu,** Moyennes de certaines fonctions arithmétiques sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.*, **564** (2003), 119–166.

[15] **Xuan, T.Z.,** Integers with no large prime factors, *Acta Arith.*, **69(4)** (1995), 303–327.

S. Nyandwi
Département de Mathématiques et de statistique
Université Laval
1045 Avenue de la Médecine Québec
Canada
nservat@yahoo.fr