Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 29 (2008) 213-238

SUR UN PROBLÈME D'ERDŐS ET KÁTAI

A. Smati (Limoges, France)

Au Professeur Imre Kátai pour son 70e anniversaire,
ce travail est dédié avec respect et admiration

Abstract. Let $d_1(n) = d(n)$ be the function number of divisors of the integer $n \geq 1$. For all integer $k \geq 2$, we denote by $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$ the iterated k-fold of $d(n)$. In this paper, we give the maximal order of the function $\omega(d_{k-1}(n))$, number of prime divisors of $d_{k-1}(n)$ and we improve a result of Erdős and Kátai on the maximal order of $d_k(n)$.

Résumé. Désignons par $d_1(n) = d(n)$ la fonction nombre de diviseurs de l'entier naturel $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 2$, on note $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$ la k-ième itérée de $d(n)$. Dans cet article, nous déterminons l'ordre maximum de la fonction $\omega(d_{k-1}(n))$, nombre de diviseurs premiers de $d_{k-1}(n)$ et nous améliorons un résultat d'Erdős et Kátai sur l'ordre maximum de $d_k(n)$.

1. Introduction

En 1907, S. Wigert, (cf. [7]), étudie l'ordre maximum du nombre de diviseurs $d(n)$ de l'entier naturel $n \geq 1$. Il a montré que, pour tout $\epsilon > 0$ et n suffisamment grand,

$$d(n) \leq e^{(1+\epsilon)\log 2 \frac{\log n}{\log\log n}}$$

et, pour une infinité d'entiers n,

$$d(n) \geq e^{(1-\epsilon)\log 2 \frac{\log n}{\log\log n}}.$$

Ainsi, l'ordre maximum de $\log d(n)$ est la fonction

$$\log 2 \frac{\log n}{\log\log n}.$$

En 1915, S. Ramanujan, (cf. [4] et [5] No.15), reprit cette étude dans un long mémoire intitulé "Highly Composite Numbers". Il a considérablement amélioré en précision le résultat de Wigert. L'idée, majeure, de Ramanujan est l'introduction d'une suite d'entiers attachée à $d(n)$ dits nombres hautement composés - c'est les entiers qui possèdent plus de diviseurs que tout entier les précédant - et d'une suite d'entiers, contenus dans la précédente, qualifiés d'entiers hautement composés supérieurs qui lui ont permit d'obtenir des améliorations de la formule de Wigert énoncée plus haut.

Notons $d_1(n) = d(n)$ et pour tout entiers $k \geq 2$,

$$d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$$

la k-ième itérée de $d(n)$. Dans le même article, cité plus haut, Ramanujan s'intéresse aux itérées de $d(n)$. Il détermine l'ordre de grandeur de $d_2(N)$ sur la suite des nombres hautement composés en montrant que, pour N hautement composé,

$$d_2(N) = (\log N)^{\frac{1}{\log 2}\left(\log\log\log\log N + \gamma + O\left(\frac{1}{\log\log\log N}\right)\right)}$$

où γ étant la constante d'Euler. Enfin, dans les dernières lignes de cette article, Ramanujan donne des bornes inférieures à l'ordre maximun de $d_2(n)$ et $d_3(n)$ posant, ainsi, implicitement le problème de l'étude de l'ordre maximum des itérées de $d(n)$. Il note, notamment, en considérant les entiers de la forme $N = 2^{2-1}3^{3-1} \dots p^{p-1}$ que

$$d_2(n) > 4^{\frac{\sqrt{2\log n}}{\log\log n}}$$

pour une infinité d'entiers n. Cependant, ce n'est qu'en 1969 que P. Erdős et I. Kátai, (cf. [1], [3]) posent le problème général, c'est-à-dire celui de la détermination de l'ordre maximum de la k-ième itérée de la fonction nombre des diviseurs et donnent une solution partielle, citée ci-dessous.

On pose

$$F_{-1} = 0, \ F_0 = 1$$

et, pour tout entier $k \geq 1$, on note F_k le k-ième terme de la suite de Fibonacci, c'est-à- dire

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}.$$

Ainsi, les sept premiers termes sont

$$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ F_7 = 21.$$

Erdős et Kátai ont montré que, pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout $\epsilon > 0$, on a, pour n suffisamment grand,

$$d_k(n) < e^{(\log n)^{\frac{1}{F_k}+\epsilon}}$$

et pour une infinité d'entiers n,

$$d_k(n) > e^{(\log n)^{\frac{1}{F_k}-\epsilon}}.$$

Enfin, P. Erdős et A. Ivić, (cf.[2]), reprennent, en 1989, l'étude de ce problème pour $k = 2$ et montrent que, pour une constante $c > 0$ convenable et n assez grand,

$$d_2(n) < e^{c\sqrt{\log n}\sqrt{\frac{\log\log n}{\log\log\log n}}}.$$

Notons par $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier n. Dans cet article, nous déterminons l'ordre maximum de $\omega(d_{k-1})$ et nous en déduisons une amélioration du résultat d'Erdős et Kátai sur l'ordre maximum de $d_k(n)$ pour tout $k \geq 2$. Dans la note [6], nous avons étudié le cas particulier $k = 2$ et nous avons mis en évidence une amélioration du résultat d'Erdős et Ivić. Nous obtenons, les résultats suivants.

Théorème 1.1. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement. On pose, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{16}\, \frac{3^{F_k}\ 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1}\ F_{k+1}}\, \frac{F_4^{F_{k-3}}\ F_5^{k-4} \ldots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}}\ F_2^{F_{k-4}} \ldots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}$$

et

$$\begin{cases} b_2 = 1, \\ b_3 = 1/\sqrt[3]{3^2} \\ b_k = \left(\dfrac{2^{F_{k-3}}}{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}\ \dfrac{1}{F_4^{F_{k-6}} \ldots F_{k-3}^{F_1}} \right)^{1/F_k} \qquad (k \geq 4). \end{cases}$$

1. *On a, pour n suffisamment grand,*

$$\omega(d_{k-1}(n)) \leq (1+\epsilon)\ a_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}.$$

2. Il existe une infinité d'entiers n tels que

$$\omega(d_{k-1}(n)) \geq (1-\epsilon)\, b_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}.$$

Remarque 1.1. *1. La table suivante montre, à titre d'exemple, les premières valeurs des constantes a_k et b_k.*

k	2	3	4	5	6	7	8
F_k	2	3	5	8	13	21	34
a_k	55,42	228, 58	610, 68	1637, 27	3579, 02	7354, 68	13895, 66
b_k	1	0, 4807	0, 5479	0, 5267	0, 5132	0, 5071	0, 5021

k	9	10
F_k	55	89
a_k	25115, 95	43737, 87
b_k	0, 4996	0, 4979

Tab. 1. Les neuf premières valeurs des constantes a_k et b_k

2. *Asymptotiquement, on a (cf. Lemme 2.4 pour la démonstration), en posant*

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$H_1(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j+2})}{\Phi^j},$$

$$H_2(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$H_3(\Phi) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$a_k \sim \frac{6}{\sqrt{5}}\, (\Phi)^{3/\Phi}\, 4^{\Phi^2}\, e^{H_1(\Phi)-H_2(\Phi)}\, \Phi^{k+1} \quad (k \to \infty),$$

et

$$b_k \sim \left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2\ \Phi^4} \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)} \quad (k \to \infty).$$

3. *On a les valeurs numériques suivantes:*

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033...; \\ H_1(\Phi) &= 0,001544...; \\ H_2(\Phi) &= -0,030892...; \\ H_3(\Phi) &= 0,000364... \end{aligned}$$

et

$$\frac{6}{\sqrt{5}} (\Phi)^{3/\Phi} 4^{\Phi^2} e^{H_1(\Phi)-H_2(\Phi)} = 254,947785...;$$

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2\ \Phi^4} \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)} = 0,495266... .$$

Corollaire 1.1. *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel, fixé arbitrairement et k un entier, $k \geq 2$.*

1. On a, pour n suffisamment grand,

$$d_k(n) \leq 3\, e^{(1+\epsilon)\ a_k (\log n)^{1/F_k}}.$$

2. Il existe une infinité d'entiers n tels que

$$d_k(n) \geq e^{(1-\epsilon)\ b_k \log 2 \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}}.$$

Introduisons, quelques notations supplémentaires. Soit n un entier arbitraire et k un entier fixé, $k \geq 2$. On définit la suite

$$N_1, N_2, ..., N_j, ..., N_k$$

de la manière suivante: on pose $N_k = n$ et pour tout $1 \leq j \leq k-1$

$$N_j = d(N_{j+1}).$$

Ainsi, pour $k \geq 2$,

$$N_1 = d(N_2) = d_2(N_3) = d_3(N_4) = ... = d_{k-1}(N_k) = d_{k-1}(n).$$

Donc

$$d(N_1) = d_k(N_k) = d_k(n).$$

On note

$$S_1 = \omega(N_1)$$

le nombre de diviseurs premiers de N_1. On a donc

$$S_1 = \omega(d_{k-1}(N_k)) = \omega(d_{k-1}(n)).$$

Maintenant, nous allons montrer comment s'obtient le Corollaire 1.1.

Démonstration du Corollaire 1.1.

1. Pour $k \geq 2$, on applique le Lemme 2.5, (cf. §2 ci-dessous), avec N_1. On obtient

$$d_k(n) = d_k(N_k) = d(N_1) \leq 3\, e^{\omega(N_1) \log\log N_1}. \tag{1}$$

Ensuite, on reporte dans (1) l'inégalité 1 du Théorème 1.1,

$$\omega(N_1) = \omega(d_{k-1}(n)) \leq (1+\epsilon)\, a_k \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}$$

et enfin, on remarque que

$$\log\log N_1 = \log\log d_{k-1}(N_k) \leq \log\log N_k = \log\log n.$$

2. Découle immédiatement de la remarque

$$d_k(n) \geq e^{\log 2\; \omega(d_{k-1}(n))}$$

et de l'inégalité 2 du Théorème 1.1.

La proposition suivante est le fondement de la méthode. C'est un raffinement d'un lemme d'Erdős et Kátai (cf. [2], Lemma, p.271).

Proposition 1.1. *Soient $k \geq 2$ un entier et $\epsilon > 0$ un nombre réel fixé arbitrairement. Supposons que pour tout entier j, $1 \leq j \leq k-1$, il existe un entier naturel M_j:*

$$M_j | N_j$$

dont la décomposition en facteurs premiers, $M_j = Q_1^{\gamma_1 - 1} Q_2^{\gamma_2 - 1} \dots\ Q_A^{\gamma_A - 1}$, possède, pour S_1 assez grand, les proprietés suivantes

$$\begin{cases} A \geq c_j\ (1-\epsilon)^{F_{j-1}-1}\ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}-1}, & \\ Q_i \geq \widetilde{c}_j\ (1-\epsilon)^{F_{j-1}}\ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}} & (i = 1, 2, ..., A), \\ \gamma_i \geq \overline{c}_j\ (1-\epsilon)^{F_{j-2}}\ S_1^{F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-2}} & (i = 1, 2, ..., A), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $c_j, \widetilde{c}_j, \overline{c}_j$ sont des constantes dépendant de j. Alors, on a l'une ou l'autre des deux assertions suivantes:

1.
$$\log N_{j+1} \geq \left(S_1(\log S_1)^2\right)^{F_k}.$$

2. *Il existe un entier naturel M_{j+1}:*
$$M_{j+1}|N_{j+1}$$
dont la décomposition en facteurs premiers, $M_{j+1} = R_1^{\beta_1-1}R_2^{\beta_2-1}\ldots\ R_B^{\beta_B-1}$, possède les proprietés suivantes

$$(1.2)\qquad \begin{cases} B \geq\ c_{j+1}\ (1-\epsilon)^{F_j-1}\ S_1^{F_j}(\log S_1)^{F_j-1}, \\ R_i \geq\ \widetilde{c}_{j+1}\ (1-\epsilon)^{F_j}\ S_1^{F_j}(\log S_1)^{F_j} \qquad (i=1,2,...,B), \\ \beta_i \geq \overline{c}_{j+1}\ (1-\epsilon)^{F_{j-1}}\ S_1^{F_{j-1}}(\log S_1)^{F_{j-1}} \qquad (i=1,2,...,B), \end{cases}$$

avec, pour $2 \leq j \leq k-1$,

$$(1.3)\qquad \begin{cases} c_{j+1} = \dfrac{1}{8F_k}\ c_j\ \overline{c}_j, \\ \widetilde{c}_{j+1} = \dfrac{F_j}{8F_k}\ c_j\overline{c}_j = F_j\ c_{j+1}, \\ \overline{c}_{j+1} = \widetilde{c}_j = F_{j-1}\ c_j, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{1}{8F_k}\ c_1\ \overline{c}_1, \\ \widetilde{c}_2 = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{8F_k}\ c_1\overline{c}_1 = \dfrac{1}{2}\ c_2, \\ \overline{c}_2 = \widetilde{c}_1. \end{cases}$$

Les constantes $c_1, \widetilde{c}_1, \overline{c}_1$ sont données dans le Lemme 2.2.

2. Lemmes

Lemme 2.1. *Soit $\epsilon > 0$. Pour S_1 assez grand, l'entier N_1 possède au moins $[S_1/2]$ diviseurs premiers supérieurs à*

$$\frac{1}{2}(1-\ \epsilon)S_1\log S_1.$$

Démonstration. Ecrivons

$$N_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_{[S_1/2]}^{\alpha_{[S_1/2]}} .... p_{S_1}^{\alpha_{S_1}} \quad (S_1 = \omega(N_1),\ \alpha_i \geq 1),$$

la décomposition de N_1 en produits de facteurs premiers. Alors, les facteurs premiers de N_1 suivants

$$p_{[S_1/2]} < p_{[S_1/2]+1} < ... < p_{S_1}$$

sont en nombre supérieur ou égal à

$$S_1 - [S_1/2] \geq S_1/2 \geq [S_1/2]$$

et $p_{[S_1/2]}$ est supérieur ou égal au $[S_1/2]$-ième nombre premier. Donc, pour S_1 assez grand, on a

$$p_{[S_1/2]} \geq (1 + 0(1))[S_1/2] \log[S_1/2] = (1 + 0(1)) \frac{1}{2} S_1 \log S_1 \geq \frac{1}{2}(1 - \epsilon) S_1 \log S_1.$$

Lemme 2.2. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier naturel M_1 : $M_1 | N_1$ et dont la décomposition en facteurs premiers, $M_1 = Q_1^{\gamma_1 - 1} Q_2^{\gamma_2 - 1} ...\ Q_A^{\gamma_A - 1}$, possède, pour S_1 assez grand, les proprietés suivantes*

$$\begin{cases} A \geq \dfrac{1}{3}\ S_1, & \\ Q_i \geq \dfrac{1}{2}\ (1 - \epsilon)\ S_1 \log S_1 & (i = 1, 2, ..., A), \\ \gamma_i \geq 2 & (i = 1, 2, ..., A). \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec les notations de la proposition, on a donc $c_1 = \dfrac{1}{3}$, $\widetilde{c_1} = \dfrac{1}{2}$ et $\overline{c_1} = 2$.

Démonstration. D'après la démonstration du Lemme 2.1, on prend

$$\begin{cases} A = [S_1/2], \\ Q_1 = p_{[S_1/2]+j}, ..., Q_A = p_{S_1} \quad (j = 1 \text{ ou } 2), \\ \gamma_1 = \alpha_{[S_1/2]+j} + 1, ..., \gamma_A = \alpha_{S_1} + 1. \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{cases} A = [S_1/2] \geq S_1/3 & (S_1 \geq 6), \\ Q_i \geq \dfrac{1}{2}\,(1-\epsilon)\;S_1 \log S_1 & (i = 1, 2, ..., A), \\ \gamma_i \geq 2 & (i = 1, 2, ..., A), \end{cases}$$

et le lemme est prouvé.

Lemme 2.3. *1. Soit la suite récurrente*

$$\begin{cases} c_{k+1} = \dfrac{F_{k-2}}{8F_{k+1}}\; c_k\; c_{k-1} & (k \geq 2), \\ c_1 = \dfrac{1}{3},\; c_2 = \dfrac{2}{3}\;\dfrac{1}{8F_2}. \end{cases}$$

On a

$$c_{k+1} = \frac{8}{3^{F_k}\;4^{F_{k+2}}}\;\frac{F_1^{F_{k-3}} ...\; F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}} ...\; F_{k+1}^{F_0}}.$$

2. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout entier $k \geq 3$, fixé, considérons le système

$$\begin{cases} S_{j+2} \;\leq (1+\epsilon)\; S_{j+1}\; S_j\; \log S_j & 1 \leq j \leq k-2, \\ S_2 = S_1,\;\; S_1 \;\; \textit{donné}. \end{cases}$$

On a, pour $1 \leq j \leq k-2$ et S_1 assez grand,

$$S_{j+2} \;\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{j-1}-1} F_0^{F_{j-1}} F_1^{F_{j-2}} ...\; F_{j-1}^{F_0}\;(1+\epsilon)^{F_{j+1}-1}\; S_1^{F_{j+1}}\;(\log S_1)^{F_{j+1}-1}.$$

Démonstration. 1. On montre, par récurrence, que

$$c_{k+1} =$$

$$2^{F_{k-3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{F_{k-1}} F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} ...\; F_{k-2}^{F_0} \left(\frac{1}{8F_2}\right)^{F_{k-1}} \left(\frac{1}{8F_3}\right)^{F_{k-2}} ... \left(\frac{1}{8F_{k+1}}\right)^{F_0}.$$

Puis, on utilise l'identité: $F_0 + F_1 + ... + F_N = F_{N+2} - 1$. On obtient

$$c_{k+1} = \frac{2^{F_{k-3}}}{3^{F_{k-1}}}\; 8^{F_{k+1}-1}\; F_2^{F_{k-1}}\; \frac{F_0^{F_{k-2}} F_1^{F_{k-3}} ...\; F_{k-2}^{F_0}}{F_3^{F_{k-2}} F_4^{F_{k-3}} ...\; F_{k+1}^{F_0}} =$$

$$= \frac{8}{3^{F_k}\;4^{F_{k+2}}}\;\frac{F_1^{F_{k-3}} ...\; F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}} ...\; F_{k+1}^{F_0}}.$$

2. L'inégalité s'obtient par une simple récurrence sur k. Les facteurs $3/2$ proviennent des majorations

$$\log S_j \leq \frac{3}{2}\, F_{j-1} \log S_1$$

valables pour $\epsilon > 0$ fixé, et pour chaque $j \geq 3$ fixé et S_1 assez grand. On omet les détails.

Lemme 2.4. *Posons, pour tout entier $k \geq 2$,*

$$a_k = 2F_k \left(\frac{1}{16}\, \frac{3^{F_k}\, 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1}\, F_{k+1}}\, \frac{F_4^{F_{k-3}}\, F_5^{k-4} \ldots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}}\, F_2^{F_{k-4}} \ldots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}$$

et

$$b_k = \left(\frac{2^{F_{k-3}}}{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}\, \frac{1}{F_4^{F_{k-6}} \ldots F_{k-3}^{F_1}} \right)^{1/F_k}.$$

Notons

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$H_1(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j+2})}{\Phi^j},$$

$$H_2(\Phi) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j},$$

$$H_3(\Phi) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1-(-\Phi^{-2})^{j-1})}{\Phi^j}.$$

On a, lorsque $k \to \infty$,

1.

$$a_k \sim \frac{6}{\sqrt{5}}\, (\Phi)^{3/\Phi}\, 4^{\Phi^2}\, e^{H_1(\Phi)-H_2(\Phi)}\, \Phi^{k+1},$$

2.

$$b_k \sim \left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3} (5)^{1/2\,\Phi^4} \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}} e^{-H_3(\Phi)}.$$

Démonstration. Posons

$$\alpha = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad u = \frac{\beta}{\alpha} \quad (|u| < 1).$$

La formule de Binet pour la suite de Fibonacci décalée (F_k) s'écrit

$$F_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

et donne

(2) $$F_k = \frac{\alpha^{k+1}}{\sqrt{5}}(1 - u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \frac{F_{k+r}}{F_k} = \alpha^r \frac{1-u^{k+r+1}}{1-u^{k+1}}.$$

1. Etudions la suite a_k. Posons

$$A = \frac{F_4^{F_{k-3}}\, F_5^{F_{k-4}} \ldots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}}\, F_2^{F_{k-4}} \ldots F_{k-2}^{F_0}} = \left(\frac{F_4}{F_1}\right)^{F_{k-3}} \left(\frac{F_5}{F_2}\right)^{F_{k-4}} \ldots \left(\frac{F_{k+1}}{F_{k-2}}\right)^{F_1}.$$

On a donc

$$\log A^{1/F_k} = \frac{1}{F_k} \log A = \sum_{j=3}^{k} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{F_{j+1}}{F_{j-2}},$$

la formule de droite de (2), permet d'écrire

(3) $$\log A^{1/F_k} = A_1 + A_2.$$

Avec

$$A_1 := \log \alpha^3 \sum_{j=3}^{k} \frac{F_{k-j}}{F_k} \quad \text{et} \quad A_2 := \sum_{j=3}^{k} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{1-u^{j+2}}{1-u^{j-1}}.$$

Maintenant, en appliquant l'identité: $F_0 + F_1 + \ldots + F_N = F_{N+2} - 1$, à A_1, on obtient

$$A_1 = 3 \log \alpha \, \frac{F_{k-1} - 1}{F_k} = 3 \log \alpha \, \frac{F_{k-1}}{F_k} \left(1 - \frac{1}{F_{k-1}}\right)$$

et en utilisant les formules (2), on obtient

(4) $$A_1 = \frac{3}{\alpha} \, \log \alpha \, \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k}{2}}\right)\right)$$

car $\sqrt{|u|} = 1/\alpha$. Quant à A_2, on la décompose en deux quantités: $A_2 = A_{2,1} - A_{2,2}$, avec

$$A_{2,1} := \sum_{j=3}^{k} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1-u^{j+2}) \quad \text{et} \quad A_{2,2} := \sum_{j=3}^{k} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1-u^{j-1}).$$

Considérons $A_{2,1}$. On applique la formule de droite de (2). On obtient

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= \sum_{j=3}^{k} \frac{\log(1-u^{j+2})}{\alpha^j} + O\left(\sum_{j=3}^{k} \frac{|\log(1-u^{j+2})|}{\alpha^j}|u|^{k-j+1}\right) =: \\ &=: S_k(\alpha) + O(R). \end{aligned}$$

On a

$$R \ll |u|^{k+3} \sum_{j=3}^{k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^j \ll |u|^{k+3}.$$

Maintenant, on remarque que $S_k(\alpha)$ est la somme partielle d'une série convergente, puisque

$$\frac{|\log(1-u^{j+2})|}{\alpha^j} \sim |u|^2 \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^j.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_k(\alpha) &= \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-u^{j+2})}{\alpha^j} + O\left(\sum_{j\geq k+1} \frac{|\log(1-u^{j+2})|}{\alpha^j}\right) = \\ &= H_1(\alpha) + O(|u|^{k+3}), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$H_1(\alpha) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-u^{j+2})}{\alpha^j}.$$

On a, donc, obtenu

$$A_{2,1} = H_1(\alpha) + O(|u|^{k+3}).$$

De la même façon, on montre que

$$A_{2,1} = H_2(\alpha) + O(|u|^{k+3})$$

où

$$H_2(\alpha) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log(1-u^{j-1})}{\alpha^j}.$$

Finalement, en regroupant les deux quantités, on obtient

$$A_2 = (H_1(\alpha) - H_2(\alpha))(1 + O(|u|^{k+3})). \tag{5}$$

Enfin, en reportant (5) et (4) dans (3), on obtient

$$A^{1/F_k} = (\alpha)^{3/\alpha} e^{H_1(\alpha)-H_2(\alpha)}(1 + O(|u|^{\frac{k}{2}}). \tag{6}$$

Maintenant, considérons la quantité

$$B := \left(\frac{1}{16} \frac{3^{F_k}\ 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1}\ F_{k+1}} \right)^{1/F_k}.$$

En appliquant les formules de (2), on obtient, immédiatement,

$$\begin{aligned}
4^{\frac{F_{k+2}}{F_k}} &= 4^{\alpha^2}(1 + O(|u|^{k+1})),\\
\left(\frac{1}{F_{k-1}}\right)^{1/F_k} &= e^{-\frac{1}{F_k}\log F_{k-1}} = (1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}})),\\
\left(\frac{1}{F_{k+1}}\right)^{1/F_k} &= \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k+1}{4}}\right)\right),\\
\left(\frac{1}{16}\right)^{1/F_k} &= \left(1 + O\left(|u|^{k+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

et par suite,

$$B = 3\ (4)^{\alpha^2}\ \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k+1}{4}}\right)\right). \tag{7}$$

Enfin, la formule de gauche de (2), donne

$$C := 2F_k = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \alpha^{k+1}(1 + O(|u|^k)). \tag{8}$$

En remarquant que $a_k = C\ B\ A^{1/F_k}$, en regroupant (6), (7) et (8), et en posant $\Phi = \alpha$, on obtient

$$a_k = \frac{6}{\sqrt{5}}\ (\Phi)^{3/\Phi}\ 4^{\Phi^2}\ e^{H_1(\Phi)-H_2(\Phi)}\ \Phi^{k+1}\ (1 + O(|u|^{\frac{k+1}{4}})).$$

2. Etudions la suite b_k. On pose $b_k = E + G + D$, avec

$$E := \left(\frac{2}{3^2}\right)^{\frac{F_{k-3}}{F_k}},$$
$$G := \frac{1}{F_{k-1}^{2/F_k}},$$
$$D := \left(\frac{1}{F_4^{F_{k-6}} \dots F_{k-3}^{F_1}}\right)^{1/F_k}.$$

Comme dans la partie 1 de la démonstration, on a

$$E = \left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\alpha^3} \left(1 + O\left(|u|^{k-2}\right)\right) \quad \text{et} \quad G = 1 + O\left(|u|^{\frac{k+1}{4}}\right).$$

Il reste à étudier la quantité D. En utilisant la formule de gauche de (2), on peut écrire
$$\log D = -D_1 - D_2$$

avec

$$D_1 = \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log \frac{\alpha^{j-1}}{\sqrt{5}},$$
$$D_2 = \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k} \log(1 - u^{j-1}).$$

La même étude que celle faite dans la partie 1, ci-dessus, donne

$$D_2 = H_3(\alpha) + O\left(|u|^{k+3}\right)$$

avec

$$H_3(\alpha) = \sum_{j=6}^{\infty} \frac{\log(1 - u^{j-1})}{\alpha^j}.$$

Considérons, maintenant, D_1. On écrit $D_1 = D_{1,1} - D_{1,2}$ avec

$$D_{1,1} := \log \alpha \sum_{j=6}^{k-1} (j-1) \frac{F_{k-j}}{F_k},$$
$$D_{1,2} := \log \sqrt{5} \sum_{j=6}^{k-1} \frac{F_{k-j}}{F_k}.$$

La formule de droite de (2) et l'identité sommatoire, citée plus haut, donnent

$$D_{1,2} = \frac{\log\sqrt{5}}{\alpha^4}\ \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k-4}{2}}\right)\right).$$

Maintenant, considérons $D_{1,1}$. L'application de la formule de droite de (2) permet d'écrire

$$D_{1,1} = \overline{D} + O(\overline{R})$$

avec

$$\overline{D} = \log\alpha\ \sum_{j=6}^{k-1}(j-1)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j,$$

$$\overline{R} = \sum_{j=6}^{k-1}(j-1)\frac{|u|^{k-j+1}}{\alpha^j}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{R} &\leq (k-2)\sum_{j=6}^{k-1}\frac{1}{\alpha^j}\frac{|\beta|^{k-j+1}}{\alpha^{k-j+1}} \leq \\
&\leq (k-2)\frac{1}{\alpha^{k+1}}\sum_{j=6}^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-j+1} \ll \\
&\ll (k-2)\frac{1}{\alpha^{k+1}} \ll \\
&\ll (k-2)|u|^{\frac{k+1}{2}} \ll \\
&\ll |u|^{\frac{k+1}{4}}.
\end{aligned}$$

Enfin, l'estimation de $\overline{D}$ s'obtient avec un petit calcul :

$$\overline{D} = \frac{5\alpha-4}{\alpha^5(\alpha-1)^2}\ \log\alpha + O\left(|u|^{\frac{k-2}{4}}\right).$$

Finalement, en regroupant nos estimations et en posant $\Phi = \alpha$, on obtient

$$b_k = \left(\frac{2}{3^2}\right)^{1/\Phi^3}\ (5)^{1/2\ \Phi^4}\ \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{\frac{5\Phi-4}{\Phi^5(\Phi-1)^2}}\ e^{-H_3(\Phi)}\ \left(1 + O\left(|u|^{\frac{k-4}{2}}\right)\right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme.

Lemme 2.5. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a*

$$d(n) \leq 3\ e^{\omega(n)\log\log n}.$$

Démonstration. Soit

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_s^{n_s} \qquad \text{avec} \qquad (\ s := \omega(n) \geq 1\ )$$

la décomposition de l'entier $n \geq 3$ en facteurs premiers, et posons

$$N = p_1 p_2 ... p_s$$

le noyau de n. On a,

$$n.N = p_1^{n_1+1} p_2^{n_2+1} ... p_s^{n_s+1}.$$

En utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log n.N}{s} &= \frac{1}{s}(\ (n_1+1)\log p_1 + (n_2+1)\log p_2 + ... + (n_s+1)\log p_s\ ) \geq \\ &\geq (\ (n_1+1)\ (n_2+1)\ ...\ (n_s+1)\ )^{\frac{1}{s}} \log 2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$d(n) = (n_1+1)\ (n_2+1)\ ...\ (n_s+1) \leq \frac{(\log n.N)^s}{(s\log 2)^s}.$$

Comme $N \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned} d(n) &\leq \frac{(\log n^2)^s}{(s\log 2)^s} \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{s\log 2}\right)^s e^{s\log\log n} \leq \\ &\leq 3\ e^{s\log\log n}. \end{aligned}$$

Car, un petit calcul montre que

$$\max_{s\geq 1}\left(\frac{2}{s\log 2}\right)^s = \left(\frac{2}{s\log 2}\right)^s \Bigg|_{s=\frac{2}{e\log 2}} = e^{\frac{2}{e\log 2}} = 2,8906... < 3.$$

Enfin, on vérifie que le résultat est vraie pour $n = 2$. Ce qui termine la démonstration du lemme.

3. Démonstration de la Proposition 1.1

Posons $S_{j+1} = \omega(N_{j+1})$ et écrivons la décomposition de N_{j+1} en facteurs premiers:

$$N_{j+1} = t_1^{\delta_1 - 1} t_2^{\delta_2 - 1} \dots t_{S_{j+1}}^{\delta_{S_{j+1}} - 1}.$$

On a, par définition, pour $j \geq 1$, $N_j = d(N_{j+1})$. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de la proposition,

$$M_j = Q_1^{\gamma_1 - 1} Q_2^{\gamma_2 - 1} \dots Q_A^{\gamma_A - 1} | N_j = d(N_{j+1}) = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{S_{j+1}}.$$

Maintenant, nous envisageons deux situations.

Première situation. Supposons qu'il existe un δ_m qui possède au moins $2F_k$ diviseurs premiers, non nécessairement distincts, parmi $Q_1, Q_2, ..., Q_A$. On a, alors,

$$\log N_{j+1} = \sum_{i=1}^{S_{j+1}} (\delta_i - 1) \log t_i \geq (\delta_m - 1) \log t_m \geq \frac{\log 2}{2} \delta_m.$$

En utilisant la condition (1.1), on obtient

$$\log N_{j+1} \geq \frac{\log 2}{2} \left(\widetilde{c}_j \ (1 - \epsilon)^{F_{j-1}} \ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}} \right)^{2F_k} \geq$$
$$\geq \left(\frac{(\log 2)^2}{4} \ (\widetilde{c}_j)^2 \ (1 - \epsilon)^{2F_{j-1}} \ S_1^{2F_{j-1}} (\log S_1)^{2F_{j-1}} \right)^{F_k}.$$

Il s'ensuit que, pour S_1 assez grand,

$$\log N_{j+1} \geq \left(\ S_1 (\log S_1)^2 \right)^{F_k}.$$

Ceci prouve l'assertion 1 de la proposition.

Deuxième situation. Supposons que les δ_i possèdent moins de $2F_k$ diviseurs premiers parmi $Q_1, Q_2, ..., Q_A$. Notons C le nombre des δ_i dont chacun possède au moins un diviseur parmi $Q_1, Q_2, ..., Q_A$. On a

$$C \geq \frac{1}{2F_k} \sum_{i=1}^{A} (\gamma_i - 1) \geq \frac{1}{4F_k} \sum_{i=1}^{A} \gamma_i \geq \frac{1}{4F_k} \min_{1 \leq i \leq A} (\gamma_i) \ A.$$

On utilise, maintenant, la condition (1.1). On obtient

$$C \geq \frac{1}{4F_k} \left((1 - \epsilon)^{F_{j-2}} \ \overline{c}_j \ S_1^{F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-2}} \right) \times$$
$$\times \left((1 - \epsilon)^{F_{j-1} - 1} \ c_j \ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1} - 1} \right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{4F_k} \ c_j \ \overline{c}_j \ (1 - \epsilon)^{F_{j-1} + F_{j-2} - 1} \ S_1^{F_{j-1} + F_{j-2}} (\log S_1)^{F_{j-1} + F_{j-2} - 1} \geq$$
$$\geq \frac{1}{4F_k} \ c_j \ \overline{c}_j \ (1 - \epsilon)^{F_j - 1} \ S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j - 1}.$$

Sans perte de généralité, notons ces δ_i: $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_C$ et les facteurs premiers correspondants $t_1 > t_2 > ... > t_C$. Comme, par hypothèse, chacun de ces δ_i possède au moins un facteur premier parmi $Q_1, Q_2, ..., Q_A$, alors en utilisant la condition (1.1), on obtient, pour chaque i : $i = 1, 2, ..., C$,

$$\delta_i \geq \widetilde{c}_j \ (1-\epsilon)^{F_{j-1}} \ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}}.$$

Maintenant, pour S_1 assez grand, on a

$$\begin{aligned} t_{[C/2]} &= (1+o(1))[C/2] \log[C/2] = \\ &= \frac{1}{2}(1+o(1)) \ C \log C \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(1-\epsilon) \ C \log C \geq \\ &\geq \frac{\widetilde{F_j}}{8F_k} \ c_j \ \bar{c}_j \ (1-\epsilon)^{F_j} S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j}, \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{F_j} = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad j = 1, \\ F_j & \text{si} \quad j \geq 2. \end{cases}$$

La dernière inégalité est obtenue en utilisant les minorations

$$\log C \geq F_j \log S_1$$

valable pour $j \geq 2$, k, ϵ fixés et S_1 assez grand et

$$\log C \geq \frac{1}{2} \ \log S_1$$

valable pour $j = 1$, k, fixé et S_1 assez grand. On pose $B = C - [C/2]$. On obtient

$$B \geq \frac{C}{2} \geq \frac{1}{8F_k} \ c_j \ \bar{c}_j \ (1-\epsilon)^{F_j - 1} \ S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j - 1}.$$

On pose $\beta_i = \delta_i$ pour chaque i: $i = 1, 2, ..., B$. On a, pour chaque i,

$$\beta_i \geq \widetilde{c}_j \ (1-\epsilon)^{F_{j-1}} \ S_1^{F_{j-1}} (\log S_1)^{F_{j-1}}.$$

Enfin, on pose pour chaque i: $[C/2] + 1 \leq i \leq C$, $R_i = t_i$. Ainsi

$$R_i = t_i \geq t_{[C/2]+1} \geq \frac{\widetilde{F_j}}{8F_k} \ c_j \ \bar{c}_j \ (1-\epsilon)^{F_j} \ S_1^{F_j} (\log S_1)^{F_j}.$$

Finalement, en récapitulant ces résultats, on obtient

$$\begin{cases} B \geq c_{j+1}\,(1-\epsilon)^{F_j-1}\; S_1^{F_j}(\log S_1)^{F_j-1}, \\ R_i \geq \widetilde{c}_{j+1}\,(1-\epsilon)^{F_j}\; S_1^{F_j}(\log S_1)^{F_j}, \\ \beta_i \geq \overline{c}_{j+1}\,(1-\epsilon)^{F_{j-1}}\; S_1^{F_{j-1}}(\log S_1)^{F_{j-1}}, \end{cases}$$

et où l'on a posé pour $1 \leq j \leq k-1$,

$$\begin{cases} c_{j+1} = \frac{1}{8F_k}\; c_j\; \overline{c}_j, \\ \widetilde{c}_{j+1} = \frac{\widetilde{F_j}}{8F_k}\; c_j \overline{c}_j = \widetilde{F_j}\; c_{j+1}, \\ \overline{c}_{j+1} = \widetilde{c}_j = F_{j-1}\; c_j. \end{cases}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition.

4. Démonstration du Théorème 1.1

Démonstration du point 1. Soit $k \geq 2$. S'il existe un entier $j : 1 \leq j \leq k-1$, tel que N_j vérifie le résultat 1 de la Proposition 1.1, alors on obtient l'inégalité 1 du Théorème 1.1. En effet, on a

$$\log N_{j+1} \geq \big((1-\epsilon)\; S_1(\log S_1)^2\big)^{F_k}$$

et donc

$$S_1 \leq (1+\epsilon)\frac{(\log N_{j+1})^{1/F_k}}{(\log S_1)^2}.$$

Maintenant, on peut supposer que

$$S_1 := \omega(d_{k-1}(N_k)) \geq (\log N_k)^{\frac{1}{2F_k}} \tag{9}$$

car sinon le résultat 1 du théorème est trivialement vérifié. Il s'ensuit que

$$\omega(d_{k-1}(N_k)) = S_1 \leq (2F_k)^2(1+\epsilon)\frac{(\log N_{j+1})^{1/F_k}}{(\log\log N_k)^2}$$

et cette dernière inégalité implique le résultat 1, puisque

$$N_{j+1} = d_{k-j}(N_k) \leq N_k = n.$$

Maintenant, supposons que pour tout j: $1 \leq j \leq k-1$, N_j ne vérifie pas le résultat 1 de la Proposition 1.1. Montrons, d'abord, par récurrence, que pour tout entier $k \geq 2$, N_k vérifie le résultat 2 de la Proposition 1.1. Pour $k = 2$, le Lemme 2.2, montre que $N_j = N_1$ vérifie les hypothèses de la Proposition 1.1. Donc $N_{j+1} = N_2 = N_k$ vérifie les conclusions 2 de cette la proposition. Supposons que N_{k-1} vérifie les hypothèses de la Proposition 1.1. Comme N_1 vérifie les hypothèses de cette proposition, alors, pour tout $1 \leq j \leq k-2$, N_j les vérifie aussi et finalement, $N_{(k-1)+1} = N_k$ vérifie les conclusions 2 de la Proposition 1.1. Maintenant, on va minorer $\log N_k$. Ecrivons

$$N_k = p_1^{\rho_1 - 1} p_2^{\rho_2 - 1} \dots p_{S_k}^{\rho_{S_k} - 1}$$

la décomposition de N_k en facteurs premiers et où l'on a noté $S_k = \omega(N_k)$. Comme N_k vérifie le résultat 2 de la Proposition 1.1, alors il possède au moins

$$B \geq \ c_k \ (1-\epsilon)^{F_{k-1}-1} \ S_1^{F_{k-1}} (\log S_1)^{F_{k-1}-1}$$

facteurs premiers dont les exposants vérifient

$$\rho_i = \beta_i \geq \ \bar{c}_k \ (1-\epsilon)^{F_{k-2}} \ S_1^{F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-2}}.$$

Notons ces B facteurs premiers (q_ℓ n'étant pas nécessairemnt le ℓ-ième nombre premier, mais q_ℓ est supérieur ou égale au ℓ-ième nombre premier)

$$q_1 < q_2 < \dots < q_B.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\log N_k &\geq \sum_{i=1}^{S_k} (\rho_i - 1) \log p_i \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{B} \rho_i \log q_i \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \ \bar{c}_k \ (1-\epsilon)^{F_{k-2}} \ S_1^{F_{k-2}} (\log S_1)^{F_{k-2}} \sum_{i=1}^{B} \log q_i.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a, en remarquant que $q_{[B/2]}$ est supérieur ou égal au $[B/2]$-ième nombre premier,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{B} \log q_i \geq \sum_{i=[B/2]}^{B} \log q_i &\geq \\ &\geq \log q_{[B/2]}(B-[B/2]) \geq \\ &\geq (1-\epsilon)\frac{B}{2}\log B \geq \\ &\geq (1-\epsilon)\left(\frac{1}{2}\; c_k\; (1-\epsilon)^{F_{k-1}-1}\; S_1^{F_{k-1}}(\log S_1)^{F_{k-1}-1}\right)(F_{k-1}\;\log S_1) \geq \\ &\geq \frac{F_{k-1}}{2}\; c_k\; (1-\epsilon)^{F_{k-1}}\; S_1^{F_{k-1}}(\log S_1)^{F_{k-1}}.\end{aligned}$$

Finalement, en reportant dans la minoration de $\log N_k$, on obtient

$$\begin{aligned}\log N_k &\geq \frac{F_{k-1}}{4} c_k\; \overline{c}_k\; (1-\epsilon)^{F_{k-1}+F_{k-2}}\; S_1^{F_{k-1}+F_{k-2}}(\log S_1)^{F_{k-1}+F_{k-2}} \geq \\ &\geq \widehat{c}_k\; (1-\epsilon)^{F_k}\; S_1^{F_k}(\log S_1)^{F_k}\end{aligned}$$

où, on a noté $\widehat{c}_k = \dfrac{F_{k-1}}{4}\; c_k\; \overline{c}_k$. Maintenant, on peut montrer l'inégalité 1 du Théorème 1.1. De l'inégalité précédente, on obtient

$$S_1 \leq (1+\epsilon)\left(\frac{1}{\widehat{c}_k}\right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log S_1}.$$

Enfin, en utilisant la minoration (2) de S_1, on obtient

$$\begin{aligned}\omega(d_{k-1}(n)) = \omega(d_{k-1}(N_k)) &\leq \\ &\leq (1+\epsilon)\; 2F_k\; \left(\frac{1}{\widehat{c}_k}\right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log\log N_k} \leq \\ &\leq (1+\epsilon)\; 2F_k\; \left(\frac{1}{\widehat{c}_k}\right)^{1/F_k} \frac{(\log n)^{1/F_k}}{\log\log n}.\end{aligned}$$

Maintenant, on pose

$$a_k = 2F_k\; \left(\frac{1}{\widehat{c}_k}\right)^{1/F_k}.$$

On a, en utilisant (1.3) de la Proposition 1.1, avec $k+1$ à la place de k et avec $j=k$,

$$\widehat{c}_k = 2\ F_{k-1}\ F_{k+1}\ c_{k+1}$$

et on remarque que (1.3) de la Proposition 1.1 et le Lemme 2.2 donnent

$$\begin{cases} c_{k+1} = \dfrac{F_{k-2}}{8F_{k+1}}\ c_k\ c_{k-1} & (k \geq 2), \\ c_1 = \dfrac{1}{3}, \quad c_2 = \dfrac{2}{3}\ \dfrac{1}{8F_2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit, en appliquant le Lemme 2.3, que

$$\widehat{c}_k = \frac{16\ F_{k-1}\ F_{k+1}}{3^{F_k}\ 4^{F_{k+2}}}\ \frac{F_1^{F_{k-3}}\ F_2^{F_{k-4}} \ldots F_{k-2}^{F_0}}{F_4^{F_{k-3}}\ F_5^{F_{k-4}} \ldots F_{k+1}^{F_0}}.$$

Finalement, on obtient

$$a_k = 2F_k\ \left(\frac{1}{16}\ \frac{3^{F_k}\ 4^{F_{k+2}}}{F_{k-1}\ F_{k+1}}\ \frac{F_4^{F_{k-3}}\ F_5^{k-4} \ldots F_{k+1}^{F_0}}{F_1^{F_{k-3}}\ F_2^{F_{k-4}} \ldots F_{k-2}^{F_0}} \right)^{1/F_k}.$$

Ceci termine la démonstration du point 1.

Démonstration du point 2. On utilise la même construction qu'Erdős et Kátai et on raffine leurs arguments. Posons

$$N_1 = 2.3.5 \ldots p_{S_1} \qquad (S_1 = \omega(N_1)),$$

le produit des S_1 premiers nombres premiers. On définit la suite des nombres $N_2, N_3, \ldots, N_k$ de la façon suivante: pour $j \geq 1$, si

$$N_j = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_{S_j}^{r_{s_j}} \qquad (S_j = \omega(N_j)),$$

alors

$$N_{j+1} = \left(\prod_{i=1}^{r_1} p_i \right)^{p_1 - 1} \left(\prod_{i=1}^{r_2} p_{r_1+i} \right)^{p_2 - 1} \ldots \left(\prod_{i=1}^{r_{S_j}} p_{r_1+r_2+\ldots+r_{S_j-1}+i} \right)^{p_{S_j}-1}.$$

Notons que

$$N_2 = p_1^{p_1-1} p_2^{p_2-1} \ldots p_{S_2}^{p_{S_2}-1} \qquad (S_2 \geq 1)$$

est la suite d'entiers considérées par Ramanujan pour donner une borne inférieure de l'ordre maximum de $d_2(n)$. On a clairement

$$d(N_{j+1}) = N_j$$

et donc

$$N_1 = d(N_2) = d_2(N_3) = d_3(N_4) = ... = d_{k-1}(N_k)$$

et

$$S_1 = \omega(d_{k-1}(N_k)).$$

Erdős et Kátai ont montré les deux inégalités suivantes. Pour $j \geq 1$ et S_1 assez grand,

$$S_{j+2} \leq (1+\epsilon)\ S_{j+1}\ S_j\ \log S_j \tag{10}$$

et

$$\log N_{j+1} \leq (1+\epsilon)\ S_j\ S_{j+1}\ (\log S_{j+1})^2. \tag{11}$$

Donnons-en la démonstration pour la commodité du lecteur. On remarque que

$$S_1 = \omega(N_1) = \Omega(N_1) \quad \text{et} \quad S_{j+1} = \omega(N_{j+1}) = \Omega(N_j)$$

où $\Omega(N_j)$ désigne le nombre total de facteurs premiers de N_j. On a

$$S_{j+2} = \Omega(N_{j+1}) = \sum_{i=1}^{S_j} r_i(p_i - 1)\ \leq p_{S_j} \sum_{i=1}^{S_j} r_i = p_{S_j}\ \Omega(N_j) = p_{S_j}\ S_{j+1}.$$

Et (10) s'obtient en utilisant, pour S_1 assez grand, l'inégalité

$$p_{S_j} \leq (1+\epsilon)\ S_j\ \log S_j.$$

Maintenant, montrons (11). On a, pour $j \geq 1$,

$$\log N_{j+1} \leq p_{S_j} \sum_{i=1}^{\Omega(N_j)} \log p_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{\Omega(N_j)} \log p_i = (1+o(1))\ p_{\Omega(N_j)} = (1+o(1))\ \Omega(N_j)\ \log \Omega(N_j),$$

on obtient, pour $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\log N_{j+1} &\leq (1+o(1))\ S_j\ \ \Omega(N_j)\ \log S_j\ \log \Omega(N_j) \leq \\ &\leq (1+\epsilon)\ S_j\ \ \Omega(N_j)\ \log \omega(N_j)\ \log \Omega(N_j) \leq \\ &\leq (1+\epsilon)\ S_j\ \ \Omega(N_j)\ (\log \Omega(N_j))^2 \leq \\ &\leq (1+\epsilon)\ S_j\ S_{j+1}\ (\log S_{j+1})^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'inégalité (11). Maintenant, nous allons majorer $\log N_k$ pour tout entier $k \geq 2$. Pour $k = 2$, on obtient immédiatement de (11)

$$\log N_2 \leq (1+\epsilon)(S_1 \log S_1)^2 \tag{12}$$

et pour $k = 3$, on utilise (11) avec $j = 2$ et (10) avec $j = 1$, on obtient

$$\log N_3 \leq (1+\epsilon)^2\ 3^2 (S_1 \log S_1)^3. \tag{13}$$

Maintenant, supposons que $k \geq 4$. L'inégalité (11), appliquée avec $j = k-1$, donne

$$\log N_k \leq (1+\epsilon) S_{k-1} S_k (\log S_k)^2. \tag{14}$$

On applique le Lemme 2.3, 2. une fois avec $j = k-3$ et une fois avec $j = k-2$, on obtient, pour s_1 assez grand,

$$S_{k-1} = S_{(k-3)+2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-4}-1}\ F_0^{F_{k-4}} F_1^{F_{k-5}} \ldots F_{k-4}^{F_0}\ (1+\epsilon)^{F_{k-2}-1}\ S_1^{F_{k-2}}\ (\log S_1)^{F_{k-2}-1}$$

et

$$S_k = S_{(k-2)+2} \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-3}-1}\ F_0^{F_{k-3}} F_1^{F_{k-4}} \ldots F_{k-4}^{F_1}\ F_{k-3}^{F_0}\ (1+\epsilon)^{F_{k-1}-1}\ S_1^{F_{k-1}}\ (\log S_1)^{F_{k-1}-1}.$$

On note que, pour S_1 assez grand,

$$\log S_k \leq \frac{3}{2}\ F_{k-1}\ \log S_1.$$

En reportant ces trois dernières inégalités dans (14), on obtient,

$$\log N_k \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-4}+F_{k-3}} F_0^{F_{k-4}+F_{k-3}} F_1^{F_{k-5}+F_{k-4}} F_2^{F_{k-6}+F_{k-5}} \dots \times$$

$$\times F_{k-4}^{F_0+F_1} F_{k-3}^{F_0} (F_{k-1})^2 (1+\epsilon)^{F_{k-2}+F_{k-1}-1} (S_1 \log S_1)^{F_{k-2}+F_{k-1}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{F_{k-2}} F_0^{F_{k-2}} F_1^{F_{k-3}} F_2^{F_{k-4}} \dots \times$$

$$\times F_{k-4}^{F_2} F_{k-3}^{F_1} (F_{k-1})^2 (1+\epsilon)^{F_k-1} (S_1 \log S_1)^{F_k} =$$

$$= \frac{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}{2^{F_{k-3}}} F_4^{F_{k-6}} F_5^{F_{k-7}} \dots F_{k-3}^{F_1} (1+\epsilon)^{F_k-1} (S_1 \log S_1)^{F_k}.$$

En posant, pour $k \geq 4$,

$$e_k = \frac{(3^{F_{k-3}} F_{k-1})^2}{2^{F_{k-3}}} F_4^{F_{k-6}} F_5^{F_{k-7}} \dots F_{k-3}^{F_1},$$

on obtient, pour tout entier $k \geq 4$ et S_1 assez grand,

$$\log N_k \leq e_k (1+\epsilon)^{F_k-1} (S_1 \log S_1)^{F_k}. \tag{15}$$

Maintenant, on a, pour S_1 assez grand,

$$\log N_1 = \sum_{p \leq p_{S_1}} \log p = (1+o(1)) p_{S_1} = (1+o(1)) S_1 \log S_1$$

et par suite

$$\log S_1 = (1+o(1)) \log\log N_1,$$

et enfin, pour tout $k \geq 2$, fixé,

$$(\log S_1)^{F_k} =$$

$$= (1+o(1)) (\log\log N_1)^{F_k} \leq (1+\epsilon) (\log\log N_1)^{F_k} \leq (1+\epsilon) (\log\log N_k)^{F_k}.$$

Finalement, en reportant cette dernière inégalité dans (12) pour $k = 2$, dans (13) pour $k = 3$ et dans (15) pour $k \geq 4$, on obtient, avec la convention : $e_2 = 1$ et $e_3 = 3^2$, que pour tout $k \geq 2$

$$\log N_k \leq e_k \ \left((1+\epsilon) \ S_1 \log\log N_k \ \right)^{F_k}.$$

Et par conséquent,

$$\omega(d_{k-1}(n)) = S_1 \geq (1-\epsilon) \left(\frac{1}{e_k}\right)^{1/F_k} \frac{(\log N_k)^{1/F_k}}{\log\log N_k}.$$

Ce qui termine la démonstration.

Références

[1] **Erdős P.,** Ramanujan and I, *Number Theory, Madras 1987, Proc. of the International Ramanujan Centenary Conference, Anna University, Madras, India,* ed. K. Alladi, Lecture Notes in Mathematics **1395**, Springer Verlag, 1-20.

[2] **Erdős P. and Ivić A.,** On the iterates of the enumerating function of finite abelian groups, *Bulletin Acad. Serbe, Sciences Mathématiques,* **17** (1989), 13-22.

[3] **Erdős P. and Kátai I.,** On the growth of $d_k(n)$, *Fibonacci Quart.,* **7** (1969), 267-274.

[4] **Ramanujan S.,** Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc.,* Serie 2, **14** (1915), 347-409, and *Collected papers,* Chelsea, 2nd edition, 1962.

[5] **Ramanujan S.,** *Collected papers*, Chelsea, 2nd edition, 1962.

[6] **Smati A.,** Sur un problème de S. Ramanujan, *C. R. Acad. Sci. Paris,* Ser. I, **340** (2005), 1-4.

[7] **Wigert S.,** Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier, *Arkiv för Matematik,* **3** (18) (1907), 1-9.

A. Smati
XLIM-DMI, UMR-CNRS 6090
Université de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
87060 Limoges cedex, France
`smati@unilim.fr`