Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 29 (2008) 101-113

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ADDITIVES À VALEURS DANS UN GROUPE DISCRET

J.-L. Mauclaire (Paris, France)

Dédié à Monsieur le Professeur Imre Kátai
à l'occasion de son 70-ième anniversaire

1. Introduction et notations

$\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, P$) dénote l'ensemble des nombres entiers strictement positifs (resp. entiers relatifs, rationnels, réels, complexes, premiers).

Soit G un groupe abélien dont la loi de composition sera notée additivement. Nous rappelons qu'une application $f : \mathbb{N} \to G$ est une fonction arithmétique additive à valeurs dans G si elle vérifie la condition $f(mn) = f(m) + f(n)$ quand $(m, n) = 1$.

L'origine de cet article est un résultat dû à Ruzsa, qui a prouvé le théorème suivant [2]:

Théorème 1. *Soit G un groupe abélien dont la loi de composition sera notée additivement et $f : \mathbb{N} \to G$ une fonction arithmétique additive à valeurs dans G. Pour tout point a de G, la densité arithmétique d_a de l'ensemble des n tels que $f(n) = a$ existe.*

Cette question a été reconsidérée par Elliot dans le Chapitre 22 de son ouvrage "Arithmetic functions and integer products" [2], et il est facile de voir que le théorème essentiellement nouveau du chapitre (22.1, p.372) est une conséquence immédiate du résultat suivant:

Théorème 2. *Soit A une suite d'entiers positifs, de densité supérieure strictement positive, i.e.*

$$\limsup_{x \to +\infty} x^{-1}.\#\{n \leq x;\ n \in A\} = \delta$$

avec δ non nul, et $G(A)$ le sous-groupe du groupe $\mathbb{Q}_+$ des rationnels positifs engendré par A. Alors, il existe un entier Ω tel que $\Omega \leq \delta^{-1}$ et $\sum_{p^\Omega \notin G(A)} \frac{1}{p}$ converge.

La méthode employée par cet auteur, de même que celle suivie par Ruzsa, requiert de façon essentielle le théorème de Halász-Delange ([3], p.304, Th.3.1), cependant accompagné d'un impressionant arsenal d'outils annexes. Dans notre article, on se propose, en n'utilisant que le théorème de Halász-Delange et quelques rudiments d'analyse harmonique, de fournir une démonstration particulièrement naturelle des théorèmes cités ci-dessus, simples retombées de la preuve du résultat suivant, dont on ne cherchera pas à extirper toutes les déductions possibles:

Théorème 3. *Soit G un groupe abélien discret dont la loi de composition sera notée additivement, H son dual, et $f : \mathbb{N} \to G$ une fonction arithmétique additive à valeurs dans G. Pour tout élément h de H, la moyenne arithmétique de la suite $h(f(n))$ existe.*

2. Démonstration des résultats

Soit H le dual de G, c'est-à-dire l'ensemble des caractères continus sur G. H est un groupe compact, puisque G est discret, de mesure de Haar normalisée m.

Comme $h(f(n))$ est une fonction multiplicative de module égal à 1, le théorème de Halász-Delange nous dit que ou bien

$$\lim_{x\to+\infty} \left| x^{-1}. \sum_{1\leq n\leq x, 2\nmid n} h(f(n)) \right| = 0,$$

ou bien

$$\lim_{x\to+\infty} \left| x^{-1}. \sum_{1\leq n\leq x, 2\nmid n} h(f(n)) \right| \neq 0,$$

et dans ce cas, il existe un nombre réel t_h tel que

$$\sum_{1\leq n\leq x, 2\nmid n} h(f(n)) =$$

$$= \frac{x^{1+it_h}}{1+it_h}\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{3\le p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right).\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))p^{-irt_h}}{p^r}\right)+o(x),$$

$$x\to+\infty,$$

et de plus, la série de terme général $(1-\mathrm{Re}\ h(f(p))p^{-it_h}).p^{-1}$ est convergente.

Comme les fonctions $H\to\mathbb{R}$ définies par

$$h\mapsto\left|x^{-1}.\sum_{1\le n\le x,2\nmid n}h(f(n))\right|$$

sont continues, l'ensemble L des h tels que

$$\lim_{x\to+\infty}\left|x^{-1}.\sum_{1\le n\le x,2\nmid n}h(f(n))\right|\neq 0,$$

est m-mesurable.

Deux cas vont donc se présenter.

Premier cas: L est de mesure nulle.

Dans ce cas, la condition

$$\lim_{x\to+\infty}\left|x^{-1}.\sum_{1\le n\le x,2\nmid n}h(f(n))\right|=0$$

implique que l'on ait

$$\lim_{x\to+\infty}\left|x^{-1}.\sum_{1\le n\le x}h(f(n))\right|=0.$$

Les relations d'orthogonalité des caractères nous donnent alors que pour tout a de G,

$$\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x,f(n)=a}1\right|=\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x}\left(\int_H h(f(n)).\overline{h}(a)dm(h)\right)\right|$$

et par conséquent, pour tout a de G,

$$\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x}\left(\int\limits_H h(f(n)).\overline{h}(a)dm(h)\right)\right| \le \int\limits_H \left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x} h(f(n))\right| dm(h).$$

En outre, dm-presque sûrement,

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x} h(f(n))\right| = 0$$

et comme pour tout h de H, on a l'inégalité

$$\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x} h(f(n))\right| \le 1,$$

par le théorème de convergence majorée de Lebesgue, on en déduit que

$$\left|\frac{1}{x}.\sum_{1\le n\le x, f(n)=a} 1\right| = o(1), \qquad x\to+\infty,$$

ce qui nous donne que $d_a = 0$ pour tout a de G.

Deuxième cas: $m(L)\neq 0$.

Si $h\in L$, il existe un réel t_h tel que la série de terme général

$$(1-\mathrm{Re}\ h(f(p))p^{-it_h}).p^{-1}$$

est convergente. On remarquera que, puisque

$$|h(f(p))p^{-it_h}| = 1,$$

on a

$$2.(1-\mathrm{Re}\ h(f(p))p^{-it_h}) = |1-h(f(p))p^{-it_h}|^2.$$

Par conséquent, si h et h' sont dans L, on écrit que

$$\left(1-\mathrm{Re}\left(((hh')(f(p)))p^{-i(t_h+t_{h'})}\right)\right) =$$

$$= \left(1-\mathrm{Re}\left(\left((h(f(p)))p^{-it_h}\right).\left((h'(f(p)))p^{-it_{h'}}\right)\right)\right)$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy, on obtient que

$$\left(1 - \text{Re } \left(\left(h(f(p))p^{-it_h}\right) . \left(h'(f(p))p^{-it_{h'}}\right)\right)\right) \leq$$

$$\leq 2\left(1 - \text{Re } (h(f(p))p^{-it_h})\right) + 2\left(1 - \text{Re}(h'(f(p))p^{-it_{h'}})\right).$$

Donc, puisque

$$\left(1 - \text{Re}((h(f(p))p^{-it_h}).(h'(f(p))p^{-it_{h'}}))\right).p^{-1} \leq$$

$$\leq 2\left(1 - \text{Re}(h(f(p))p^{-it_h})\right) + 2\left(1 - \text{Re}(h'(f(p))p^{-it_{h'}})\right).p^{-1},$$

le fait que les séries de terme général

$$\left(1 - \text{Re}(h(f(p))p^{-it_h})\right).p^{-1} \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \text{Re}\left(h'(f(p))p^{-it_{h'}}\right)\right).p^{-1}$$

convergent nous donne que la série de terme général

$$\left(1 - \text{Re}\left(((hh')(f(p)))p^{-i(t_h + t_{h'})}\right)\right).p^{-1}$$

est aussi convergente, et par conséquent, on en déduit que si h et h' sont dans L, alors $h.h'$ est dans L, et ainsi, L est un groupe. De plus, l'application $L \to \mathbb{R}$ définie par $h \mapsto t_h$ est un homomorphisme de L dans $\mathbb{R}$. Enfin, L étant mesurable et de mesure non-nulle, il est ouvert et fermé. Comme on a

$$H = \bigcup_{s \in H/L} s.L$$

et que chacun des $s.L$ est ouvert, la compacité de H nous donne que H/L est fini. Soit Ω son ordre.

Maintenant, pour h dans L, on définit, pour tout q premier ≥ 3, des fonctions I_q et J_q de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ par $I_q = 0$ si $q^2|n$, 1 sinon, et $J_q(n) = 1$ si $q \not| n$, 0 sinon. Pour éviter des problèmes d'annulation de dénominateurs, on définit une fonction $z_1 : \mathbb{C} \to \{0,1\}$ par $z_1(t) = 1$ si $t = 0$, 0 sinon, et l'on voit que l'on a

$$z_1\left(\sum_{1 \leq n \leq x, 2 \not| n} h(f(n)).J_q(n)\right) + \left(\sum_{1 \leq n \leq x, 2 \not| n} h(f(n)).J_q(n)\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{x^{1+it_h}}{1 + it_h} \times$$

$$\times \prod_{3\le p\le x, p\ne q}\left(1-\frac{1}{p}\right).\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))p^{-irt_h}}{p^r}\right)+o(x), \qquad x\to+\infty,$$

et de même

$$z_1\left(\sum_{1\le n\le x, 2\nmid n} h(f(n)).I_q(n)\right)+\left(\sum_{1\le n\le x, 2\nmid n} h(f(n)).I_q(n)\right)=$$

$$=\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{h(f(q))q^{-it_h}}{q}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x^{1+it_h}}{1+it_h}\prod_{3\le p\le x, p\ne q}\left(1-\frac{1}{p}\right).\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))p^{-irt_h}}{p^r}\right)\right)+o(x),\ \ x\to+\infty.$$

Comme, dans ces égalités, les deux premiers membres ne sont jamais nuls et ne tendent pas vers 0, on en déduit par passage au quotient sur les deux seconds membres que la fonction

$$h\mapsto\left(1+\frac{h(f(q))q^{-it_h}}{q}\right)$$

est m-mesurable comme limite simple de fonctions mesurables, et par conséquent, que $h\mapsto q^{-it_h}$ est m-mesurable.

Ceci nous donne immédiatement que la suite de fonctions

$$q^{1+it_h}\prod_{3\le p\le q}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))p^{-irt_h}}{p^r}\right),$$

où q décrit la suite des nombres premiers, est une suite de fonctions mesurables, et donc, en écrivant que

$$1+it_h=$$

$$=\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\ \text{premier}}}\left(q^{1+it_h}\left(1-\frac{1}{2}\right)\prod_{3\le p\le q}\left(1-\frac{1}{p}\right).\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))p^{-irt_h}}{p^r}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{1\le n\le q, 2\nmid n} h(f(n))\right)^{-1},$$

on voit que l'homomorphisme $L \to \mathbb{R}$ défini par $h \mapsto t_h$ est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables, et par conséquent, il est continu. Mais comme L est compact, il ne peut être que nul. On en déduit donc que pour tout h dans L, on a

$$x^{-1} \sum_{1 \leq n \leq x, 2 \nmid n} h(f(n)) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) + o(1),$$

$$x \to +\infty,$$

et par conséquent, comme clairement

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|$$

existe puisque c'est la limite d'une suite décroissants positive, on voit que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} \left| x^{-1} \sum_{1 \leq n \leq x, 2 \nmid n} h(f(n)) \right|^2 =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{2}\right) \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 .$$

On utilise maintenant les notations suivantes

$$E_p = (1, p, p^2, \ldots), \quad E = \prod_{p \in P} E_p, \quad E_{y-} = \prod_{\substack{p \in P \\ p \leq y}} E_p,$$

$$E' = \prod_{p \in P - \{2\}} E_p, \quad E'_{y-} = \prod_{\substack{p \in P \\ 3 \leq p \leq y}} E_p.$$

Si t est dans E, t est une suite $\left(p^{v_p(t)}\right)_{p \in P}$, où $v_p(t)$ est un entier ≥ 0, et on dénote par t_{y-} (resp. t'_{y-}) la suite finie $t_{y-} = \{p^{v_p(t)}\}_{p \leq y}$ (resp. $t'_{y-} = \{p^{v_p(t)}\}_{3 \leq p \leq y}$).

Sur E_p, on définit une mesure de probabilité μ_p par $\mu_p(p^k) = (1 - p^{-1})p^{-k}$, et on note μ (resp. μ') la mesure produit $\mu = \underset{p}{\otimes} \mu_p$ (resp. $\mu' = \underset{p \geq 3}{\otimes} \mu_p$).

Comme pour tout réel positif y et tout h de L on a

$$0 < \lim_{x\to+\infty}\left|\prod_{3\leq p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq \left|\prod_{3\leq p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)\right|^2 \leq 1,$$

pour h dans L, on voit que la suite de fonctions $F_y^h : E'\times E' \to \mathbb{C}$ définie par

$$F_y^h(t,u) = h(f(t'_{y-}))\overline{h}(f(u'_{y-}))\left(\left|\prod_{3\leq p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)\right|^2\right)^{-1}$$

est une martingale bornée sur l'espace probabilisé $(E'\times E', \mu'\otimes\mu')$, où $E'\times E'$ est σ-fini, pour la suite filtrante $E'_{y-}\times E'_{y-}$, et par conséquent, elle converge $d(\mu'\otimes\mu')$-presque-sûrement.

Comme
$$h(f(t'_{y-}))\overline{h}(f(u'_{y-})) = h(f(t'_{y-}) - f(u'_{y-}))$$
et comme
$$\left(\left|\prod_{3\leq p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)\right|^2\right)^{-1}$$
a une limite finie, on voit que $h((f(t'_{y-}) - f(u'_{y-}))$ converge $d(\mu'\otimes\mu')$-presque-sûrement.

Donc, pour tout h de L, $h((f(t'_{y-}) - f(u'_{y-}))$ converge $d(\mu'\otimes\mu')$-presque-sûrement. L étant compact et muni de sa mesure de Haar normalisée m_L, on utilise le théorème de Fubini sur l'espace-produit mesuré $((E'\times E')\times L, (\mu'\otimes \otimes\mu')\times m_L)$, et l'on a $d(\mu'\otimes\mu')$-presque-sûrement en (t',u'), $h((f(t'_{y-}) - f(u'_{y-}))$ converge dm_L-presque-partout en h.

Mais pour un couple (t',u'), l'ensemble des caractères h pour lesquels l'énoncé ci-dessus est vérifié est un groupe. Comme il est mesurable et de dm_L-mesure égale à 1, c'est L tout entier, ce qui implique que la suite $T(f(t'_{y-}) - -f(u'_{y-}))$ converge presque sûrement en (t',u') vers une fonction $F(t',u')$, T dénotant la projection canonique sur le groupe dual de L.

Ceci nous donne que

$$\left|\prod_{3\leq p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)\right|^2$$

est la transformée de Fourier de $F(t', u')$, et donc que cette fonction est continue, donc uniformément continue, sur le groupe compact L.

Comme elle n'est jamais nulle, il existe une constante strictement positive C telle que

$$C \leq \lim_{x \to +\infty} \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 ,$$

et comme

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 \leq$$

$$\leq \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 ,$$

on déduit que

$$C \leq \lim_{x \to +\infty} \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 \leq$$

$$\leq \left| \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right|^2 \leq 1,$$

la dernière inégalité étant triviale.

On remarque alors que

$$\mathrm{Log} C \leq -2 \sum_{3 \leq p} (1 - \mathrm{Re}\ h(f(p))) p^{-1} + O\left(\sum_{3 \leq p} p^{-2}\right) \leq 0,$$

le $O\left(\sum_{3 \leq p} p^{-2}\right)$ étant uniforme en x et h, et par conséquent, on a

$$\int_L 2 \sum_{3 \leq p} (1 - \mathrm{Re}\ h(f(p))) p^{-1} dm_L(h) \leq$$

$$\leq \int_L |\mathrm{Log} C| dm_L(h) + \int_L O\left(\sum_{3\leq p} p^{-2}\right) dm_L(h).$$

Les relations d'orthogonalité des caractères pour la mesure $dm_L(h)$ induite sur L par $dm(h)$ nous donnent que

$$\int_L (1 - h(f(p))) dm_L(h) = 0 \quad \text{si} \quad f(p) \in L^{\perp}, \quad \Omega^{-1} \quad \text{si} \quad f(p) \notin L^{\perp},$$

où $L^{\perp}$ dénote l'orthogonal de L, et on en déduit que

$$\sum_{3\leq p, f(p)\notin L^{\perp}} p^{-1}$$

converge.

Ce qui implique que pour tout h de L, la série

$$\sum_{3\leq p} (1 - h(f(p))) p^{-1}$$

est convergente, et le théorème de Delange nous fournit la conséquence immédiate que la moyenne de la suite $h(f(n))$ existe et que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} h(f(n)) = \lim_{x\to+\infty} \prod_{p\leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right)$$

le produit étant convergent. On en déduit que pour tout ψ de H, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} \psi(f(n))$$

existe, puisque si ψ n'est pas dans L, la limite est égale à zéro.

Le résultat de Ruzsa est désormais immédiat, car les relations d'orthogonalité des caractères nous donnent que, si $a \in G$, alors

$$\frac{1}{x} \cdot \sum_{1\leq n\leq x, f(n)=a} 1 = \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} \left(\int_H \psi(f(n)) \overline{\psi}(a) dm(\psi)\right) =$$

$$= \int_H \left(\left(\frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} \psi(f(n))\right) \overline{\psi}(a)\right) dm(\psi)$$

et par conséquent, comme pour tout ψ de H, on a l'inégalité

$$\left| \frac{1}{x} \sum_{1 \le n \le x} \psi(f(n)) \right| \le 1,$$

et que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{1 \le n \le x} \psi(f(n))$$

existe pour tout ψ de H, le théorème de convergence majorée de Lebesgue nous donne que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}. \sum_{1 \le n \le x, f(n) = a} 1 = \lim_{x \to \infty} \int_H \left(\left(\frac{1}{x} \sum_{1 \le n \le x} \psi(f(n)) \right) \overline{\psi}(a) \right) dm(\psi).$$

Ceci correspond au résultat de Ruzsa. En outre, comme $|H/L| = \Omega$, si ψ est un élément de H, alors ψ^Ω est dans L. Par conséquent, comme $\psi^\Omega(f(n)) = = \psi(\Omega f(n))$, on voit que l'on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{1 \le n \le x, 2 \nmid n} \psi^\Omega(f(n)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{1 \le n \le x, 2 \nmid n} \psi(\Omega f(n)) \neq 0$$

par définition même de L, et par le même raisonnement que ci-dessus, on en déduit que la série

$$\sum_{3 \le p, \Omega f(p) \notin H^\perp} p^{-1}$$

converge.

Comme $H^\perp$ se réduit à l'ensemble $\{0\}$, ceci nous donne que la série

$$\sum_{3 \le p, \Omega f(p) \neq 0} p^{-1}$$

converge.

Venons-en donc maintenant au complément apporté par Elliot au résultat de Ruzsa. Soit A une suite d'entiers positifs, $G(A)$ le sous-groupe du groupe $\mathbb{Q}_+$ des rationnels positifs engendré par A. On prend $G = \mathbb{Q}_+/G(A)$, et on définit la fonction additive $f(n)$ comme l'image par la projection canonique $\mathbb{Q}_+ \to G$ du logarithme. Si A est une suite d'entiers positifs de densité supérieure stictement positive, i.e. si

$$\lim \sup_{x \to +\infty} x^{-1}.\#\{n \le x; n \in A\} = \delta$$

avec δ non nul, le sous-groupe L de H est de mesure strictement positive puisque l'on a

$$\begin{aligned}\delta = &\lim_{x\to+\infty} \sup x^{-1}.\#\{n \le x; n \in A\} \le \\ &\le \lim_{x\to+\infty} \sup x^{-1}.\#\{n \le x; f(n) = 0\} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x, f(n)=0} 1 = \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^{-1} \sum_{1\le n\le x} \left(\int_H \psi(f(n)) dm(\psi) \right) \le \\ &\le \lim_{x\to+\infty} \left(\int_H \left(x^{-1} \sum_{1\le n\le x} \psi(f(n)) \right) dm(\psi) \right) \le \\ &\le \int_H \left| \lim_{x\to+\infty} x^{-1} \sum_{1\le n\le x} \psi(f(n)) \right| dm(\psi).\end{aligned}$$

On remarque alors que l'on a trivialement

$$\left| \lim_{x\to+\infty} \prod_{3\le p\le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) . \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right| \le I_L(h),$$

$I_L(h)$ dénotant la fonction caractéristique de L, et par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x, f(n)=0} 1 \le$$

$$\le \int_H \left| \lim_{x\to+\infty} \prod_{3\le p\le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) . \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h(f(p^r))}{p^r}\right) \right| dm(h) \le$$

$$\le \int_H I_L(h) dm(h) = \Omega^{-1}.$$

D'où l'inégalité

$$\Omega \le \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x, f(n)=0} 1 \right)^{-1},$$

et bien évidemment, on en déduit que $\Omega \leq \delta^{-1}$, puisque

$$\delta \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x, f(n)=0} 1.$$

Références

[1] **Elliot P.D.T.A.,** *Arithmetic functions and integer products,* Springer Verlag, 1985.

[2] **Ruzsa I.Z.,** General multiplicative functions, *Acta Arith.,* **32** (1977), 313-347.

[3] **Schwarz W. and Spilker W.,** *Arithmetical functions,* L.M.S. Lecture notes **184**, Cambridge University Press, 1994.

J.-L. Mauclaire
Théorie des nombres
Institut de Mathématiques (UMR 7586 du CNRS)
Université Pierre et Marie Curie
175, rue du Chevaleret, Plateau 7D
75013 Paris, France