

LAKUNÄRE INTERPOLATION MIT
SPLINE-FUNKTIONEN II.
DIE FÄLLE (0;2;3) MIT FUNKTIONSWERTE
IN GRUNDPUNKTE

J. Györfvári (Veszprém, Ungarn)

Herrn Professor János Balázs zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Der Verfasser definierte in [1] die modifizierten lakunären Spline-Funktionen $S_{\Delta}(x)$, welche in [1] in jedem Intervall aus Polinomen fünften oder sechsten Grades bestehen und die folgenden Bedingungen erfüllen ($S_{\Delta}(x) = S_k(x)$, wenn $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, wo $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $f \in C^5([0; 1])$).

$$(1.1) \quad S_k^{(q)}(x_k) = f^{(q)}(x_k) = y_k^{(q)} \quad (q = 0, 2, 3; k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(1.2) \quad S_{n-1}^{(q)}(x_n) = f^{(q)}(x_n) = y_n^{(q)} \quad (q = 0, 2, 3),$$

$$(1.3) \quad S_0'(x_0) = f'(x_0) = y_0^{(1)},$$

$$(1.4) \quad S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n) = y_n^{(1)},$$

$$(1.5) \quad S_k^{(q)}(x_{k+1}) = S_{k+1}^{(q)}(x_{k+1}) \quad (q = 0, 2, 3; k = 0, 1, \dots, n-2).$$

Wir bewiesen Existenz-, Unizität- und Konvergenz-Sätze (Satz 2.1 und 3.1 in [1]).

Satz A. (2.1. in [1]) *Es sei*

$$S_{\Delta}(x) := \begin{cases} S_0(x), & \text{wenn } x_0 \leq x \leq x_1, \\ S_k(x), & \text{wenn } x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-2), \\ S_{n-1}(x), & \text{wenn } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \end{cases}$$

wo

$$(1.6) \quad S_0(x) = y_0^{(0)} + y_0^{(1)}(x - x_0) + \frac{y_0^{(2)}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}(x - x_0)^3 + \\ + a_{0,4}(x - x_0)^4 + a_{0,5}(x - x_0)^5 + a_{0,6}(x - x_0)^6,$$

$$(1.7) \quad S_k(x) = y_k^{(0)} + a_{k,1}(x - x_k) + \frac{y_k^{(2)}}{2}(x - x_k)^2 + \frac{y_k^{(3)}}{6}(x - x_k)^3 + \\ + a_{k,4}(x - x_k)^4 + a_{k,5}(x - x_k)^5,$$

$$(1.8) \quad S_{n-1}(x) = \\ = y_{n-1}^{(0)} + a_{n-1,1}(x - x_{n-1}) + \frac{y_{n-1}^{(2)}}{2}(x - x_{n-1})^2 + \frac{y_{n-1}^{(3)}}{6}(x - x_{n-1})^3 + \\ + a_{n-1,4}(x - x_{n-1})^4 + a_{n-1,5}(x - x_{n-1})^5 + a_{n-1,6}(x - x_{n-1})^6.$$

Dann sind die Koeffizienten des Polynoms durch die Bedingungen (1.1-1.5) eindeutig bestimmt.

Für die Koeffizienten bekamen wir

$$(1.9) \quad a_{0,4} = \frac{5}{h^4} \{F_0^{(0)} - y_1^{(1)}h\} - \frac{1}{2h^2} F_0^{(2)} + \frac{1}{12h} F_0^{(3)},$$

$$(1.10) \quad a_{0,5} = -\frac{6}{h^5} \{F_0^{(0)} - y_0^{(1)}h\} + \frac{4}{5h^3} F_0^{(2)} - \frac{3}{20h^2} F_0^{(3)},$$

$$(1.11) \quad a_{0,6} = \frac{2}{h^6} \{F_0^{(0)} - y_0^{(1)}h\} - \frac{3}{10h^4} F_0^{(2)} + \frac{1}{15h^3} F_0^{(3)},$$

$$(1.12) \quad a_{k,1} = \frac{1}{h} F_k^{(0)} - \frac{3}{20} h F_k^{(2)} + \frac{1}{30} h^2 F_k^{(3)},$$

$$(1.13) \quad a_{k,4} = \frac{1}{4h^2} F_k^{(2)} - \frac{1}{12h} F_k^{(3)},$$

$$(1.14) \quad a_{k,5} = -\frac{1}{10h^3} F_k^{(2)} + \frac{1}{20h^2} F_k^{(3)},$$

$$(1.15) \quad a_{n-1,1} = \frac{2}{h} F_{n-1}^{(0)} - F_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{5} h F_{n-1}^{(2)} - \frac{1}{60} h^2 F_{n-1}^{(3)},$$

$$(1.16) \quad a_{n-1,4} = -\frac{5}{h^4} F_{n-1}^{(0)} + \frac{5}{h^3} F_{n-1}^{(1)} - \frac{3}{2h^2} F_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6h} F_{n-1}^{(3)},$$

$$(1.17) \quad a_{n-1,5} = \frac{6}{h^5} F_{n-1}^{(0)} - \frac{6}{h^4} F_{n-1}^{(1)} + \frac{2}{h^3} F_{n-1}^{(2)} - \frac{1}{4h^2} F_{n-1}^{(3)},$$

$$(1.18) \quad a_{n-1,6} = -\frac{2}{h^6} F_{n-1}^{(0)} + \frac{2}{h^5} F_{n-1}^{(1)} - \frac{7}{10h^4} F_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{10h^3} F_{n-1}^{(3)},$$

wo

$$(1.19) \quad F_k^{(0)} = y_{k+1}^{(0)} - y_k^{(0)} - \frac{y_k^{(2)}}{2}h^2 - \frac{y_k^{(3)}}{6}h^3 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(1.20) \quad F_k^{(2)} = y_{k+1}^{(2)} - y_k^{(2)} - y_k^{(3)}h \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(1.21) \quad F_k^{(3)} = y_{k+1}^{(3)} - y_k^{(3)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(1.22) \quad F_{n-1}^{(1)} = y_n^{(1)} - y_{n-1}^{(2)}h - \frac{y_{n-1}^{(3)}}{2}h^2 \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{n}.$$

Satz B (3.1 in [1]). *Es sei $f \in C^5([0, 1])$ und $S_\Delta(x)$ die vorher konstruierte Spline Funktion. Dann gelten*

$$|f^{(q)}(x) - S_\Delta^{(q)}(x)| \leq K\omega(f^{(5)}, h) \quad (q = 0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

wo

$$K = 52 \quad \text{wenn} \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$K = 3 \quad \text{wenn} \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$K = 142 \quad \text{wenn} \quad x \in [x_{n-1}, x_n]$$

$$\text{und} \quad \omega(f^{(5)}, h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |f^{(5)}(x) - f^{(5)}(x_1)|.$$

Zur Konstruktion der "echten" modifizierten lakunären Spline Funktionen benutzen wir die Werte $y_k^{(q)} = f^{(q)}(x_k)$ ($q = 0, 2, 3$), $y_0^{(1)} = f'(x_0)$ und $y_n^{(1)} = f'(x_n)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). In der naturwissenschaftlichen Praxis sind oft nur $y_k^{(0)} = f(x_k)$ bekannt. In dieser Arbeit konstruieren wir die Näherungswerte $\bar{y}_k^{(q)}$ ($q = 0, 2, 3$; $k = 0, \dots, n$), $\bar{y}_0^{(1)}$ und $\bar{y}_n^{(1)}$ mit Hilfe der Werte $y_k^{(0)}$ und dann - ähnlich wie in [1] - konstruieren wir die modifizierten lakunären "Näherung"-Spline-Funktionen. Zuletzt geben wir Konvergenzsätze.

2. Erstes Konvergenz-Verfahren

In diesem Teil definieren wir die Näherungswerte $\bar{y}_k^{(q)}$ ($q = 0, 1, \dots, 5$; $k = 0, 1, \dots, n$) und wir untersuchen auch die Distanz der Werten $y_k^{(q)}$ und $\bar{y}_k^{(q)}$ ($q = 0, 1, \dots, 5$; $k = 0, 1, \dots, n$).

Definition $\bar{y}_k^{(q)}$. Es sei $\Delta_{k,j} = f(x_{k+j}) - f(x_k) = y_{k+j}^{(0)} - y_k^{(0)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $j = -5, -4, \dots, 4, 5$). Zur Definition von $\bar{y}_k^{(q)}$ benutzen wir die Werte $\Delta_{k,j}$.

Für $k = 0, 1, \dots, n$ seien

$$\bar{y}_k^{(0)} := f(x_k) = y_k^{(0)}.$$

Für $k = 0$ seien

$$\bar{y}_0^{(1)} := \frac{1}{60h} \{300\Delta_{0,1} - 300\Delta_{0,2} + 200\Delta_{0,3} - 75\Delta_{0,4} + 12\Delta_{0,5}\},$$

$$\bar{y}_0^{(2)} := \frac{1}{12h^2} \{154\Delta_{0,1} - 214\Delta_{0,2} + 156\Delta_{0,3} - 61\Delta_{0,4} + 10\Delta_{0,5}\},$$

$$\bar{y}_0^{(3)} := \frac{1}{12h^3} \{213\Delta_{0,1} - 354\Delta_{0,2} + 294\Delta_{0,3} - 123\Delta_{0,4} + 21\Delta_{0,5}\},$$

$$\bar{y}_0^{(4)} := \frac{1}{h^4} \{-14\Delta_{0,1} + 26\Delta_{0,2} - 24\Delta_{0,3} + 11\Delta_{0,4} - 2\Delta_{0,5}\},$$

$$\bar{y}_0^{(5)} := \frac{1}{h^5} \{5\Delta_{0,1} - 10\Delta_{0,2} + 10\Delta_{0,3} - 5\Delta_{0,4} + \Delta_{0,5}\}.$$

Für $k = n$ seien

$$\bar{y}_n^{(1)} := \frac{1}{60h} \{12\Delta_{n,-5} - 75\Delta_{n,-4} + 200\Delta_{n,-3} - 300\Delta_{n,-2} + 300\Delta_{n,-1}\},$$

$$\bar{y}_n^{(2)} := -\frac{1}{12h^2} \{10\Delta_{n,-5} - 61\Delta_{n,-4} + 156\Delta_{n,-3} - 214\Delta_{n,-2} + 154\Delta_{n,-1}\},$$

$$\bar{y}_n^{(3)} := \frac{1}{12h^3} \{21\Delta_{n,-5} - 123\Delta_{n,-4} + 294\Delta_{n,-3} - 354\Delta_{n,-2} + 213\Delta_{n,-1}\},$$

$$\bar{y}_n^{(4)} := -\frac{1}{h^4} \{-2\Delta_{n,-5} + 11\Delta_{n,-4} - 24\Delta_{n,-3} + 26\Delta_{n,-2} - 14\Delta_{n,-1}\},$$

$$\bar{y}_n^{(5)} := \frac{1}{h^5} \{\Delta_{n,-5} - 5\Delta_{n,-4} + 10\Delta_{n,-3} - 10\Delta_{n,-2} + \Delta_{n,-1}\}.$$

Für $k = 1$ seien

$$\bar{y}_1^{(1)} := -\frac{1}{60h} \{12\Delta_{1,-1} - 120\Delta_{1,1} + 60\Delta_{1,2} - 20\Delta_{1,3} + 3\Delta_{1,4}\},$$

$$\bar{y}_1^{(2)} := \frac{1}{12h^2} \{10\Delta_{1,-1} - 4\Delta_{1,1} + 14\Delta_{1,2} - 6\Delta_{1,3} + \Delta_{1,4}\},$$

$$\bar{y}_1^{(3)} := -\frac{1}{4h^3} \{7\Delta_{1,-1} + 31\Delta_{1,1} - 22\Delta_{1,2} + 7\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\},$$

$$\bar{y}_1^{(4)} := \frac{1}{h^4} \{2\Delta_{1,-1} + 16\Delta_{1,1} - 14\Delta_{1,2} + 6\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\},$$

$$\bar{y}_1^{(5)} := -\frac{1}{h^5} \{\Delta_{1,-1} + 10\Delta_{1,1} - 10\Delta_{1,2} + 5\Delta_{1,3} - \Delta_{1,4}\}.$$

Für $k = n - 1$ seien

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n-1}^{(1)} &:= \frac{1}{60h} \{3\Delta_{n-1,-4} - 20\Delta_{n-1,-3} + 60\Delta_{n-1,-2} - 120\Delta_{n-1,-1} + \\ &\quad + 12\Delta_{n-1,1}\} \\ \bar{y}_{n-1}^{(2)} &:= \frac{1}{12h^2} \{\Delta_{n-1,-4} - 6\Delta_{n-1,-3} + 14\Delta_{n-1,-2} - 4\Delta_{n-1,-1} + 10\Delta_{n-1,1}\}, \\ \bar{y}_{n-1}^{(3)} &:= \frac{1}{4h^3} \{-\Delta_{n-1,-4} + 7\Delta_{n-1,-3} - 22\Delta_{n-1,-2} + 32\Delta_{n-1,-1} + 7\Delta_{n-1,1}\}, \\ \bar{y}_{n-1}^{(4)} &:= \frac{1}{h^4} \{-\Delta_{n-1,-4} + 6\Delta_{n-1,-3} - 14\Delta_{n-1,-2} + 16\Delta_{n-1,-1} + 2\Delta_{n-1,1}\}, \\ \bar{y}_{n-1}^{(5)} &:= \frac{1}{h^5} \{-\Delta_{n-1,-4} + 5\Delta_{n-1,-3} - 10\Delta_{n-1,-2} + 10\Delta_{n-1,-1} + \Delta_{n-1,1}\}.\end{aligned}$$

Für $k = n - 2$ seien

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n-2}^{(1)} &:= \frac{1}{60h} \{2\Delta_{n-2,-3} - 15\Delta_{n-2,-2} + 60\Delta_{n-2,-1} - 30\Delta_{n-2,1} + 3\Delta_{n-2,2}\}, \\ \bar{y}_{n-2}^{(2)} &:= -\frac{1}{12h^2} \{-\Delta_{n-2,-2} + 16\Delta_{n-2,-1} + 16\Delta_{n-2,1} - \Delta_{n-2,2}\}, \\ \bar{y}_{n-2}^{(3)} &:= \frac{1}{4h^3} \{-\Delta_{n-2,-3} + 7\Delta_{n-2,-2} - 14\Delta_{n-2,-1} - \Delta_{n-2,1} - \Delta_{n-2,2}\}, \\ \bar{y}_{n-2}^{(4)} &:= -\frac{1}{h^4} \{\Delta_{n-2,-2} - 4\Delta_{n-2,-1} - 4\Delta_{n-2,1} + \Delta_{n-2,2}\}, \\ \bar{y}_{n-2}^{(5)} &:= \frac{1}{h^5} \{\Delta_{n-2,-3} - 5\Delta_{n-2,-2} + 10\Delta_{n-2,-1} + 5\Delta_{n-2,1} + \Delta_{n-2,2}\}.\end{aligned}$$

Für $k = 2, 3, \dots, n - 3$ seien

$$\begin{aligned}\bar{y}_k^{(1)} &:= \frac{1}{60h} \{3\Delta_{k,-2} - 30\Delta_{k,-1} + 60\Delta_{k,1} - 15\Delta_{k,2} + 2\Delta_{k,3}\}, \\ \bar{y}_k^{(2)} &:= \frac{1}{12h^2} \{-\Delta_{k,-2} + 16\Delta_{k,-1} + 16\Delta_{k,1} - \Delta_{k,2}\}, \\ \bar{y}_k^{(3)} &:= \frac{1}{4h^3} \{-\Delta_{k,-2} - \Delta_{k,-1} - 14\Delta_{k,1} + 7\Delta_{k,2} - \Delta_{k,3}\}, \\ \bar{y}_k^{(4)} &:= \frac{1}{h^4} \{\Delta_{k,-2} - 4\Delta_{k,-1} - 4\Delta_{k,1} + \Delta_{k,2}\}, \\ \bar{y}_k^{(5)} &:= \frac{1}{h^5} \{-\Delta_{k,-2} + 5\Delta_{k,-1} + 10\Delta_{k,1} - 5\Delta_{k,2} + \Delta_{k,3}\}.\end{aligned}$$

Satz 2.1. Es sei $f \in C^5([0, 1])$, $y_k^{(q)} := f^{(q)}(x_k)$ und $\bar{y}_k^{(q)}$ die vorher konstruierten Näherungswerte. Dann gelten

$$|y_k^{(q)} - \bar{y}_k^{(q)}| \leq M_{k,q} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h) \quad (k = 0, 1, \dots, n; q = 1, 2, 3, 4, 5),$$

wo

$$h = \frac{1}{n}; \quad \omega(f^{(5)}, h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |f^{(5)}(x) - f^{(5)}(x_1)|$$

und für $M_{k,q}$ bekommen wir

$k \setminus q$	1	2	3	4	5
0; n	24	96,3	176,8	201,6	96,4
1; n-1	1,4	2,1	7,3	24,6	22,5
$2 \leq k \leq n-2$	0,2	0,2	1,3	1,2	6,1

Beweis des Satzes 2.1. Es sei $x_0 \leq x \leq x_1$. Wir können die nachstehende Taylor-Formel aufschreiben, die sich aus der Bedingung $f \in C^5([0; 1])$ ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0^{(0)} + y_0^{(1)}(x - x_0) + \frac{y_0^{(2)}}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}(x - x_0)^3 + \\ &+ \frac{y_0^{(4)}}{24}(x - x_0)^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120}(x - x_0)^5 + \frac{f^{(5)}(\xi) - y_0^{(5)}}{120}(x - x_0)^5 \end{aligned}$$

$$(x_0 < \xi < x).$$

Bei $x = x_j$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) erhalten wir das nachstehende Gleichung-System

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1} = y_1^{(0)} - y_0^{(0)} &= y_0^{(1)}h + \frac{y_0^{(2)}}{2}h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120}h^5 + \\ &+ \frac{h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_1) - y_0^{(5)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0,2} = y_2^{(0)} - y_0^{(0)} &= y_0^{(1)}2h + \frac{y_0^{(2)}}{2}4h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}8h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}16h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120}32h^5 + \\ &+ \frac{32h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_2) - y_0^{(5)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0,3} = y_3^{(0)} - y_0^{(0)} &= y_0^{(1)}3h + \frac{y_0^{(2)}}{6}9h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}27h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}81h^4 + \frac{y_0^{(5)}}{120}243h^5 + \\ &+ \frac{243h^5}{120} \{f^{(5)}(\xi_3) - y_0^{(5)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{0,4} &= y_4^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)}4h + \frac{y_0^{(2)}}{2}16h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}64h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}256h^4 + \\ &\quad + \frac{y_0^{(5)}}{120}1024h^5 + \frac{1024h^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_4) - y_0^{(5)}\}, \\ \Delta_{0,5} &= y_5^{(0)} - y_0^{(0)} = y_0^{(1)}5h + \frac{y_0^{(2)}}{2}25h^2 + \frac{y_0^{(3)}}{6}125h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{24}625h^4 + \\ &\quad + \frac{y_0^{(5)}}{120}3125h^5 + \frac{3125h^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_5) - y_0^{(5)}\},\end{aligned}$$

wo $x_0 < \xi_i < x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Aus diesem System bekommt man

$$\begin{aligned}y_0^{(1)} &= \frac{1}{60h}\{300\Delta_{0,1}^* - 300\Delta_{0,2}^* + 200\Delta_{0,3}^* - 75\Delta_{0,4}^* + 12\Delta_{0,5}^*\}, \\ y_0^{(2)} &= \frac{1}{12h^2}\{154\Delta_{0,1}^* - 214\Delta_{0,2}^* + 156\Delta_{0,3}^* - 61\Delta_{0,4}^* + 10\Delta_{0,5}^*\}, \\ y_0^{(3)} &= \frac{1}{12h^3}\{213\Delta_{0,1}^* - 354\Delta_{0,2}^* + 294\Delta_{0,3}^* - 123\Delta_{0,4}^* + 21\Delta_{0,5}^*\}, \\ y_0^{(4)} &= \frac{1}{h^4}\{-14\Delta_{0,1}^* + 26\Delta_{0,2}^* - 24\Delta_{0,3}^* + 11\Delta_{0,4}^* - 2\Delta_{0,5}^*\}, \\ y_0^{(5)} &= \frac{1}{h^5}\{5\Delta_{0,1}^* - 10\Delta_{0,2}^* + 10\Delta_{0,3}^* - 5\Delta_{0,4}^* + \Delta_{0,5}^*\},\end{aligned}$$

$$\text{wo } \Delta_{0,i}^* = \Delta_{0,i} - \frac{(ih)^5}{120}\{f^{(5)}(\xi_i) - y_0^{(5)}\}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Jetzt bekommen wir

$$\begin{aligned}|y_0^{(1)} - \bar{y}_0^{(1)}| &= \\ &= \frac{1}{60h} \left| 300 \frac{-h^5}{120} [f^{(5)}(\xi_1) - y_0^{(5)}] + 300 \frac{32h^5}{120} [f^{(5)}(\xi_2) - y_0^{(5)}] - \right. \\ &\quad \left. - 200 \frac{243h^5}{120} [f^{(5)}(\xi_3) - y_0^{(5)}] + 75 \frac{1024h^5}{120} [f^{(5)}(\xi_4) - y_0^{(5)}] - 12 \frac{3125}{1024} [f^{(5)}(\xi_5) - y_0^{(5)}] \right| = \\ &= \frac{h^4}{24} \left| -125[f^{(5)}(\xi_5) - f^{(5)}(\xi_4)] + 131[f^{(5)}(\xi_4) - f^{(5)}(\xi_3)] - 31[f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_2)] + \right. \\ &\quad \left. + [f^{(5)}(\xi_2) - f^{(5)}(\xi_1)] \right| \leq \frac{h^4}{24} \{125 + 131 + 31 + 1\} \omega(f^{(5)}, 2h) \leq \\ &\quad \leq \frac{288}{24} h^4 \omega(f^{(5)}, h) = 24h^4 \omega(f^{(5)}, h).\end{aligned}$$

Die weitere Ungleichungen für ($k = 0: q = 2, 3, 4, 5$) und ($k = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, 3, 4, 5$) bekommt man ähnlicherweise.

3. Zweites Konvergenz-Verfahren

In diesem Teil geben wir einen Konvergenzsatz für die modifizierten lakunären "Näherung"-Spline Funktionen $\bar{S}_\Delta(x)$. Zur Konstruktion der "Näherung"-Spline Funktionen benutzen wir die vorher definierten Näherungswerten $\bar{y}_k^{(q)}$ ($q = 0, 2, 3; k = 0, 1, \dots, n$); $\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_n^{(1)}$ und die Formeln (1.1)-(1.22).

Satz 3.1. *Es seien $f \in C^5([0, 1])$ und $\bar{S}_\Delta(x)$ die vorher konstruierte "Näherung"-Spline Funktionen. Dann gelten für $x_k \leq x \leq x_{k+1}$*

$$|f^{(q)}(x) - \bar{S}_k^{(q)}(x)| \leq C_{k,q} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; q = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

und für $C_{k,q}$ bekommen wir

$k \setminus q$	0	1	2	3	4	5
0	2409,6	12297,2	52201,9	179414,8	467766,4	823888
1	9,74	22,58	57,7	69,23	116,64	117
$2 \leq k \leq n-3$	6,64	17,4	50,93	125,58	208,92	172,2
$n-2$	6,99	17	47,7	117,1	195	161,4
$n-1$	619,63	2460,37	9325,48	28484,72	63611,6	91100,8

Zum Beweis dieses Satzes benutzen wir die nächsten Lemmata, welche man mit der Hilfe des Satzes 2.1 leicht beweisen kann.

Lemma 3.1. *Seien $a_{j,k}$ die "echte" Koeffizienten, $\bar{a}_{j,k}$ die "Näherung"-Koeffizienten. Dann gelten*

$$|a_{j,k} - \bar{a}_{j,k}| \leq B_{j,k} h^{5-j} \omega(f^{(5)}, h)$$

und für $B_{j,k}$ bekommen wir

$k \setminus j$	1	4	5	6
0		541,1	713,5	1025,3
1	1,64	1,86	0,95	
$2 \leq k \leq n-3$	0,49	1,53	1,41	
$n-2$	0,95	1,4	0,79	
$n-1$	0,66	147,75	240,73	86,21

Lemma 3.2.

$$|S_k^{(q)}(x) - \bar{S}_k^{(q)}| \leq K_{q,k} h^{5-q} \omega(f^{(5)}, h)$$

und für $K_{q,k}$ bekommen wir

$k \setminus q$	0	1	2	3	4	5
0	2357,6	12245,2	52149,9	179362,8	467714,4	823836
1	6,74	19,58	51,7	66,23	158,64	114
$2 \leq k \leq n-3$	3,64	14,4	47,93	122,58	205,92	169,2
$n-2$	3,99	14	44,7	114,1	192	158,7
$n-1$	477,63	2318,37	9183,48	28342,72	63469,6	90958,8

Beweis des Satzes 3.1. Benutzen wir die Ungleichung

$$|f^{(q)}(x) - \bar{S}_k^{(q)}(x)| \leq |f^{(q)}(x) - S_k^{(q)}(x)| + |S_k^{(q)}(x) - \bar{S}_k^{(q)}(x)|$$

und Satz B, Lemma 3.2, dann bekommen wir Satz 3.1.

Hier möchte ich Herrn Prof.Dr. J. Balázs für seine wertvolle Hilfe [2] meinen Dank ausdrücken.

Literaturverzeichnis

- [1] Györfvári J., Lakunäre Interpolation mit Spline-Funktionen. Die Fälle (0, 2, 3) und (0, 2, 4), *Acta Math. Hungar.*, **42** (1983), 25-33.
 [2] Balázs J., Privatkommunikation

J. Györfvári

Lehrstuhl für Mathematik und Rechentechnik
 Universität Veszprém
 H-8201 Veszprém Pf. 158.
 Ungarn