

APPROXIMATION DURCH LINEARKOMBINATIONEN VON MODIFIZIERTEN SZÁSZ-OPERATOREN

J. Gróf (Veszprém, Ungarn)

Herrn Prof. János Balázs zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Die Definition des Szász-(Mirakjan-)Operators S_n lautet folgenderweise

$$S_n(f; x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \quad (x \geq 0, n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}).$$

O. Szász bewies in [5] die folgende Behauptung: "Es sei die Funktion f in allen beschränkten Intervallen beschränkt und $f(t) = O(t^k)$ ($t \rightarrow \infty$), mit einer positiven Zahl k . Ist f im Punkt x_0 zweimal differenzierbar, so gilt

$$n[S_n(f; x_0) - f(x_0)] \rightarrow \frac{1}{2} x_0 f''(x_0) \quad (n \rightarrow \infty)."$$

Im Falle $x_0 f''(x_0) \neq 0$ kann also die Ordnung der Approximation nicht besser sein, als $1/n$. Um die Ordnung zu verbessern, definierte M. Frentiu die folgende Linearkombinationen von Szász-Operatoren

$$S_n^{[r]}(f) := \alpha_1 S_n(f) + \alpha_2 S_{2n}(f) + \dots + \alpha_r S_{rn}(f) \quad (r \in \mathbb{N}^+)$$

mit den Koeffizienten

$$(1) \quad \alpha_j := \frac{(-1)^{r-j} j^r}{(r-j)! j!} \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Er bewies den folgenden

Satz F. ([1], S.67.) *Es sei die Funktion f im Intervall $[0, \infty)$ beschränkt und im Punkt x_0 $2r$ -mal differenzierbar. Dann gilt*

$$(2) \quad \left| S_n^{[r]}(f; x_0) - f(x_0) \right| = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Der Operator S_n ist nur auf der nichtnegativen Seite der Zahlengeraden zur Approximation geeignet. Um die Beschränkung $x \geq 0$ zu beseitigen, definierte der Verfasser in [3] den Operator H_n durch

$$H_n(f; x) := \frac{1}{2\text{chn}x} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$(-\infty < x < \infty, n \in \mathbb{N}^+).$$

Auch H_n besitzt die nachteilige Eigenschaft: im Falle $x_0 f^{(r)}(x_0) \neq 0$ ist die Ordnung der Konvergenz $H_n(f; x_0) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$) nicht besser als $1/n$. Der Verfasser zeigte in [4], daß der mit den obigen Koeffizienten α_j definierte Operator

$$H_n^{[r]}(f) := \alpha_1 H_n(f) + \alpha_2 H_{2n}(f) + \dots + \alpha_r H_{rn}(f)$$

ähnliche Eigenschaften besitzt wie $S_n^{[r]}$:

Satz G. [4] *Wir nehmen an, daß die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Bedingung*

$$(3) \quad |f(t)| \leq A|t|^{\beta|t|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

genügt. (Hier sind A, β positive Zahlen.) Ist die Funktion f in den Punkten x_0 und $-x_0$ $2r$ -mal differenzierbar, so ist

$$\left| H_n^{[r]}(f; x_0) - f(x_0) \right| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bemerkung. Die Bedingung bezüglich des Punktes $-x_0$ darf man nicht vergessen (Gegenbeispiel in [4]).

M. Frentiu bewies auch die folgende Behauptung ([1], S. 67.): *"Ist f in $[0, \infty)$ beschränkt, in $[0, a]$ $2r$ -mal differenzierbar und $f^{(2r)}$ beschränkt, so gilt die Konvergenzgeschwindigkeit (2) im Intervall $[0, a]$ gleichmäßig." Eine analoge Behauptung ist für $H_n^{[r]}$ leider nicht gültig.*

Gegenbeispiel. Betrachten wir die Funktion $f(t) := t^2$ und den Operator $H_n^{[3]}$. Man verifiziert leicht, daß

$$H_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \operatorname{th} nx$$

ist. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ erhalten wir aus (1) mit $r = 3$:

$$(4) \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = -4, \quad \alpha_3 = \frac{9}{2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H_n^{[3]}(t^2; x) &= \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x}{n} \operatorname{th} nx \right) - 4 \left(x^2 + \frac{x}{2n} \operatorname{th} 2nx \right) + \frac{9}{2} \left(x^2 + \frac{x}{3n} \operatorname{th} 3nx \right) = \\ &= x^2 - \frac{x}{n} \left[\frac{1}{2}(1 - \operatorname{th} nx) - 2(1 - \operatorname{th} 2nx) + \frac{3}{2}(1 - \operatorname{th} 3nx) \right] =: \\ &=: x^2 - \Delta_n(x). \end{aligned}$$

Daraus und aus der Identität $1 - \operatorname{th} y = 2/(e^{2y} + 1)$ ist es klar: Zu jede Zahl x existiert eine Zahl $K > 0$ derart, daß die Abschätzung

$$(5) \quad \left| H_n^{[3]}(t^2; x) - x^2 \right| \leq \frac{K}{n^3}$$

zutrifft. Es gibt aber keine, von x unabhängige Konstante K so, daß (5) für alle $x \in [0, a]$ gültig ist. Ist nämlich $x = 1/n$, so bekommt man

$$\Delta_n(x) = \Delta_n \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} 1 - 2 \operatorname{th} 2 + \frac{3}{2} \operatorname{th} 2 \right).$$

Da die zweite Faktor der rechten Seite von Null verschieden ist, konvergiert $\Delta_n \left(\frac{1}{n} \right)$ nur in der Ordnung n^{-2} .

In der vorliegenden Arbeit modifizieren wir den Operator $H_n^{[3]}$ in der Weise, daß der neue Operator $\tilde{H}_n^{[3]}$ - unter entsprechender Bedingungen - im Intervall $[-a, a]$ eine gleichmäßige Approximation von der Ordnung $1/n^3$ liefert. In dieser Arbeit befassen wir uns also nur mit dem Fall $r = 3$.

II. Die Definition von $\tilde{H}_n^{[3]}$ und der Satz

Die Modifizierung von $H_n^{[3]}$ besteht eigentlich in der Modifizierung von H_n ; die Koeffizienten der Linearkombination bleiben die Zahlen (4):

$$\tilde{H}_n(f; x) := H_n(f; x) - \left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{nx}{2} \operatorname{th} nx$$

$$(-\infty < x < \infty, n \in \mathbb{N}^+).$$

$$\tilde{H}_n^{[3]}(f) := \frac{1}{2} \tilde{H}_n(f) - 4\tilde{H}_{2n}(f) + \frac{9}{2} \tilde{H}_{3n}(f).$$

Im Abschnitt V beweisen wir die folgende Behauptung.

Satz. *Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, in jedem Punkt des endlichen Intervalls $[-a, a]$ 6-mal differenzierbar, die Ableitung $f^{(6)}$ in $[-a, a]$ beschränkt. Dann existiert eine positive Zahl A derart, daß die folgende gleichmäßige Abschätzung gilt*

$$\left| \tilde{H}_n^{[3]}(f; x) - f(x) \right| \leq \frac{A}{n^3} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Bemerkung. 1. Die Beschränktheit von f ist nicht notwendig, es würde auch die Bedingung (3) genügen, aber dann wäre der Beweis komplizierter.

2. Würden wir anstelle von $[-a, a]$ ein beliebiges Intervall $[a, b]$ schreiben, so wäre der Satz falsch.

III. Bezeichnungen

In den folgenden Bezeichnungen ist $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, $j \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(6) \quad f_*(x) := f(-x);$$

$$h_n(f; x) := \left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{nx}{2} \operatorname{th} nx;$$

$$g_n(f; x) := f''(0) \frac{x}{2n} \operatorname{th} nx;$$

$$(7) \quad p_{n,k}(x) := e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}, \quad q_{n,k}(x) := \frac{1}{2\operatorname{ch}nx} \frac{(nx)^k}{k!};$$

$$V_{n,j}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j p_{n,k}(x);$$

$$(8) \quad U_{n,j}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j p_{n,k}(-x);$$

$$(9) \quad Z_{n,j}(y) := e^y \sum_{k=0}^{\infty} (k-y)^j \frac{(-y)^k}{k!}.$$

Das Symbol $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ soll im weiteren eine Funktion φ bedeuten, die der Bedingung

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C}{n^3}$$

mit einer von x und n unabhängigen Konstante C für alle $x \in [0, a]$, $n \in \mathbb{N}^+$ genügt.

IV. Hilfssätze

Hilfssatz 1.

$$(10) \quad \tilde{H}_n^{[3]}(f_*; -x) = \tilde{H}_n^{[3]}(f; x).$$

Beweis. Aus den Definitionen von H_n und h_n bekommt man leicht

$$H_n(f_*; -x) = H_n(f; x), \quad h_n(f_*; -x) = h_n(f; x),$$

daraus ergibt sich (10) unmittelbar.

Hilfssatz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$|g_n(f; x) - h_n(f; x)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (0 \leq x \leq a).$$

Beweis. Auf Grund der Taylor-Formel erhält man

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) - f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} - \frac{f'''(0)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{1}{n^4},$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{f'''(0)}{3!}\frac{1}{n^3} + \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\frac{1}{n^4}.$$

Demnach ist

$$n^2 \left[f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) \right] = f''(0) + \frac{1}{4!} \left[f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\eta) \right] \frac{1}{n^2},$$

also gibt es eine Zahl $C > 0$ derart, daß für $x \in [0, a]$

$$|g_n(f; x) - h_n(f; x)| \leq \left| \frac{C}{n^2} \frac{x}{2n} \operatorname{th} nx \right| = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ist.

Hilfssatz 3.

$$V_{n,0}(x) = 1, \quad V_{n,1}(x) = 0, \quad V_{n,2}(x) = \frac{x}{n}, \quad V_{n,3}(x) = \frac{x^2}{n^2},$$

$$V_{n,4}(x) = \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3}, \quad V_{n,5}(x) = \frac{10x^2}{n^3} + \frac{x}{n^4},$$

$$V_{n,6}(x) = \frac{15x^3}{n^3} + \frac{25x^2}{n^4} + \frac{x}{n^5} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+).$$

Beweis. Die obigen Gleichungen können wir durch einfache Rechnungen bzw. mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel (s. [2], S. 35-36) verifizieren.

$$V_{n,j+1}(x) = \frac{x}{n} V'_{n,j}(x) + \frac{jx}{n} V_{n,j-1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Hilfssatz 4.

$$(11) \quad Z_{n,0}(y) = 1, \quad Z_{n,1}(y) = -2y \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Es gilt die Rekursionsformel

$$(12) \quad Z_{n,j+1}(y) = yZ'_{n,j}(y) - 2yZ_{n,j}(y) + jyZ_{n,j-1}(y) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Beweis. (11) ergibt sich durch einfache Rechnungen. Weiterhin ist

$$(13) \quad Z'_{n,j}(y) = Z_{n,j}(y) - jZ_{n,j-1}(y) + e^y \sum_{k=1}^{\infty} (k-y)^j (-k) \frac{(-y)^{k-1}}{k!}.$$

Die Faktor $-k$ in der letzten Reihe schreiben wir in der Form $-(k-y) - y$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} e^y \sum_{k=1}^{\infty} (k-y)^j (-k) \frac{(-y)^{k-1}}{k!} &= \frac{1}{y} Z_{n,j+1}(y) - e^y (-y)^{j+1} + \\ &+ Z_{n,j}(y) - e^y (-y)^j = \frac{1}{y} Z_{n,j+1}(y) + Z_{n,j}(y). \end{aligned}$$

Daraus und aus (13) folgt (12).

Hilfssatz 5. Seien $\nu \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Es existiert eine positive Zahl C mit

$$(14) \quad x^\nu e^{-nx} \leq \frac{C}{n^\nu} \quad (x \geq 0).$$

Beweis. Da

$$x^\nu e^{-nx} = \frac{1}{n^\nu} (nx)^\nu e^{-nx}$$

ist und die Funktion $\varphi(y) := y^\nu e^{-y}$ ($y \geq 0$) beschränkt ist, gilt (14) offensichtlich.

Hilfssatz 6.

$$(15) \quad U_{n,0}(x) = 1, \quad U_{n,1}(x) = -2x, \quad U_{n,2}(x) = 4x^2 - \frac{x}{n} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Es existiert eine positive Zahl C derart, daß die folgende Abschätzung besteht

$$(16) \quad |e^{-nx} U_{n,j}(x)| \leq \frac{C}{n^j} \quad (x \geq 0, j = 0, 1, \dots, 6).$$

Beweis. Aus (8) und (9) ergibt sich

$$(17) \quad U_{n,j}(x) = \frac{1}{n^j} Z_{n,j}(nx) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

demnach bekommt man (15) mit Hilfe von (11) und (12). Aus (11) und (12) stellt sich heraus, daß die Funktionen $Z_{n,j}$ Polynome sind, demzufolge ist $e^{-y} Z_{n,j}(y) \leq C$ ($y \geq 0, j = 0, 1, \dots, 6$). Daraus und aus (17) folgt (16).

V. Der Beweis des Satzes

Erster Schritt. Es sei $0 \leq x \leq a$. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$f(t) = \sum_{j=0}^6 \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (t-x)^j + \eta(t)(t-x)^6 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei $\lim_{t \rightarrow x} \eta(t) = 0$ ist, ferner gibt es eine Zahl $M > 0$ mit $|\eta(t)| \leq M$ ($t \in \mathbb{R}$). Hiernach erhalten wir unter Benutzung der Bezeichnungen (6) und (7)

$$\begin{aligned} H_n(f; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f_*\left(\frac{k}{n}\right) \right] q_{n,k}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j q_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^6 q_{n,k}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^6 \frac{f_*^{(j)}(x)}{j!} \left(\frac{k}{n} - x\right)^j q_{n,k}(-x) + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n} - x\right)^6 q_{n,k}(-x) =: \\ &=: P + Q + \hat{P} + \hat{Q}. \end{aligned}$$

wobei $\lim_{t \rightarrow x} \eta(t) = \lim_{t \rightarrow x} \hat{\eta}(t) = 0$ ist, ferner gibt es eine Zahl $M > 0$ mit

$$\left| \eta\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M, \quad \left| \hat{\eta}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \quad (k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^+).$$

Da $q_{n,k}(x) \leq p_{n,k}(x)$ ist, bekommen wir

$$|Q| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^6 p_{n,k}(x) = M V_{n,6}(x).$$

\hat{Q} läßt sich ähnlich abschätzen, da für $x \geq 0$ $|q_{n,k}(-x)| = q_{n,k}(x)$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 3 erhalten wir also

$$Q = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \hat{Q} = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Betrachten wir jetzt P und \hat{P} . Offensichtlich gelten die Gleichungen

$$P = \sum_{j=0}^6 \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{e^{nx}}{2\text{chn}x} V_{n,j}(x), \quad \hat{P} = \sum_{j=0}^6 \frac{f_*^{(j)}(x)}{j!} \frac{e^{-nx}}{2\text{chn}x} U_{n,j}(x).$$

Zur Summe P benutzen wir Hilfssatz 3

$$V_{n,4}(x) = \frac{3x^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad V_{n,5}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad V_{n,6}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

mit der Bezeichnung

$$F(x) := \frac{f'''(x)}{3!} + \frac{f^{(4)}(x)}{4!} 3x$$

gilt also

$$P = \frac{e^{nx}}{2\text{chn}x} \left[f(x) + f''(x) \frac{x}{2n} + F(x) \frac{x}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Die Summe \hat{P} untersuchen wir mit Hilfe von Hilfssatz 6: aus (16) folgt

$$e^{-nx} U_{n,j}(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (j = 3, 4, 5, 6),$$

demnach bekommen wir (s. auch (15))

$$\hat{P} = \frac{e^{-nx}}{2\text{chn}x} \left[f_*(x) - f'_*(x) 2x + \frac{1}{2} f_*''(x) \left(4x^2 - \frac{x}{n} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Es gilt also

$$P + \hat{P} = G + \Gamma,$$

wobei wir die folgenden Bezeichnungen benutzen:

$$G := f(x) + f''(x) \frac{x}{2n} + F(x) \frac{x}{n^2},$$

$$\Gamma := \frac{e^{-nx}}{2\text{chn}x} \left[f_*(x) - f(x) - 2x f'_*(x) + \frac{1}{2} f_*''(x) \left(4x^2 - \frac{x}{n} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} f''(x) \frac{x}{n} - F(x) \frac{x}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Aufgrund der Taylor-Formel und der Gleichungen

$$f_*(0) = f(0), \quad f'_*(0) = -f'(0), \quad f''_*(0) = f''(0)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3, \\ f_*(x) &= f(0) - f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_*)x^3, \\ f'_*(x) &= -f'(0) + f''(0)x + \frac{1}{2!}f'''(\vartheta)x^2, \\ f''(x) &= f''(0) + f'''(\tau)x, \\ f''_*(x) &= f''(0) + f'''(\tau_*)x \\ &\quad (\text{mit } 0 < \xi, \xi_*, \vartheta, \tau, \tau_* < x). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dann nach Hilfssatz 5

$$\Gamma = -\frac{e^{-nx}}{2\operatorname{ch}nx} f''(0) \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Identität $e^{-y}/\operatorname{ch}y = 1 - \operatorname{th}y$ läßt sich Γ in der folgenden Form schreiben:

$$\Gamma = -(1 - \operatorname{th}nx) f''(0) \frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Zusammengefaßt: aus unseren Ausführungen geht hervor, daß

$$\begin{aligned} H_n(f; x) &= f(x) + (f''(x) - f''(0)) \frac{x}{2n} + F(x) \frac{x}{n^2} + \\ &\quad + f''(0) \frac{x}{2n} \operatorname{th}nx + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

ist. Daraus bekommt man auf Grund des Hilfssatzes 2

$$\tilde{H}_n(f; x) = f(x) + (f''(x) - f''(0)) \frac{x}{2n} + F(x) \frac{x}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

hiernach gilt

$$\tilde{H}_n^{[3]}(f; x) = \left(\frac{1}{2} - 4 + \frac{9}{2}\right) f(x) + (f''(x) - f''(0)) \frac{x}{2n} \left(\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) +$$

$$+F(x) \frac{x}{n^2} \left(\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = f(x) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Damit ist der Satz für $0 \leq x \leq a$ bewiesen.

Zweiter Schritt. Es sei jetzt $-a \leq x \leq 0$. Da auch die Funktion f_* die Bedingungen des Satzes erfüllt, und $0 \leq -x \leq a$ ist, folgt aus dem soeben bewiesenen

$$(18) \quad \left| \tilde{H}_n^{[3]}(f_*; -x) - f_*(-x) \right| \leq \frac{A_*}{n^3} \quad (0 \leq -x \leq a),$$

wobei A_* eine positive Zahl ist. Da $f_*(-x) = f(x)$ ist, ergibt sich aus (18) nach Hilfssatz 1 die Abschätzung

$$\left| \tilde{H}_n^{[3]}(f; x) - f(x) \right| \leq \frac{A_*}{n^3} \quad (-a \leq x \leq 0).$$

Der Satz ist also bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] **Frentiu M.**, Combinatii liniare de polinoame Bernstein si de operatori Mirakyan, *Studia Univ. Babes-Bolyai Ser. Math-Mech.*, **15** (1970), 63-68.
- [2] **Gróf J.**, A Szász O.-féle operátor approximációs tulajdonságairól, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **20** (1971), 35-44.
- [3] **Gróf J.**, Függvényapproximáció az egész számegyenesen, súlyozott hatványsorokkal, *Mat. Lapok*, **29** (1977-1981), 161-170.
- [4] **Gróf J.**, Linear combinations of Szász-Mirakjan type operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60**. (1995) (im Druck).
- [5] **Szász O.**, Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **45** (1950), 239-245.

J. Gróf

Lehrstuhl für Mathematik und Rechentechnik

Universität Veszprém

H-8201 Veszprém Pf. 158

Ungarn