

ÜBER DIE EINDEUTIGKEITS-, ZULÄSSIGKEITS- UND (mod 1) EINDEUTIGKEITSMENGEN R-ADDITIVER FUNKTIONEN

J. Fehér (Pécs, Ungarn)

*Meinem Freund Professor Karl-Heinz Indlekofer aus
Anlaß der Vollendung seines 50. Lebensjahres gewidmet*

1. Einleitung

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt vollständig additiv, falls für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ $f(ab) = f(a) + f(b)$ gilt. Die Menge aller vollständig additiver Funktionen wird mit $\mathcal{A}^*(\mathbb{C})$ (oder kurz \mathcal{A}^*) bezeichnet.

Definition 1.1. (I.Kátai [4]) Die Menge $E_1(\subset \mathbb{N})$ heißt Eindeutigkeitsmenge (EM) für \mathcal{A}^* , falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad f(E_1) = \{0\} \rightarrow f(\mathbb{N}) = \{0\}.$$

Beispiel 1.1. $\{p+1 \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist eine EM. (I.Kátai [5], P.D.T.A.Elliot [1]) (Für weitere Beispiele siehe z.B. K.-H.Indlekofer [2].)

Definition 1.2. (T.Jahnke [3]) Die Menge $E_2(\subset \mathbb{N})$ heißt Zulässigkeitsmenge (ZM) für \mathcal{A}^* , falls es für jede Funktion $f : E_2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion $g \in \mathcal{A}^*$ gibt, so daß $(f - g)(E_2) = \{0\}$ gilt.

Beispiel 1.2. $\{2^p - 1 \mid p \text{ Primzahl}\}$ ist eine ZM.

Definition 1.3. (I.Kátai) Die Menge $E_3(\subset \mathbb{N})$ heißt (mod 1) Eindeutigkeitsmenge, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad f(E_3) \subset \mathbb{Z} \rightarrow f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}.$$

Beispiel 1.3. $\{p \mid p \equiv -1 \pmod{4}, p \text{ Primzahl}\} \cup \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ ist eine (mod 1) EM. (I.Kátai [4]).

Satz 1.1. (D.Wolke [7]) *Die Menge $E_1 = \{a_1, \dots\} (\subset \mathbb{N})$ ist genau dann eine EM, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens eine Darstellung*

$$(1.1) \quad n = \prod_{i=1}^s a_i^{r_i} \quad (s \geq 1)$$

mit $r_i \in \mathbb{Q}$ existiert.

Satz 1.2. (T.Jahnke [3]) *Die Menge $E_2 = \{a_1, \dots\} (\subset \mathbb{N})$ ist eine ZM genau dann, wenn jedes $n \in \mathbb{N}$ höchstens eine Darstellung (1.1) mit $r_i \in \mathbb{Q}$ besitzt.*

Satz 1.3. (P.Hofman [6], K.-H. Indlekofer, B.Kovács) *Die Menge $E_3 = \{a_1, \dots\} (\subset \mathbb{N})$ ist genau dann eine (mod 1) EM, wenn jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens eine Darstellung (1.1) mit $r_i \in \mathbb{Z}$ besitzt.*

Auf Grund einer Idee von I.Kátai werden wir in dieser Arbeit entsprechende Sätze für eine anderen Klasse additiver Funktionen beweisen.

2. Vorbereitung

Es seien:

$\mathcal{R}_i \in \mathbb{N}^{t_i}$ (Descartes – Produkt), ($t_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $i = 0, 1, \dots$);

$\mathcal{E}_i^* = \{\underline{0}^*, \underline{e}_1^*, \dots, \underline{e}_{t_i}^*\} \in \mathbb{N}_0^{t_i}$ ($\underline{e}^* = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^{t_i}$).

Definition 2.1. $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots\}$ ist ein Zahlensystem (\mathcal{R} -System) in \mathbb{N}_0 , wenn $|\mathcal{R}| = \infty$ ist und sich jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eindeutig in der Form

$$(2.1) \quad n = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{b}_i^*(n) \mathcal{R}_i \quad (\underline{b}_i^*(n) \in \mathcal{E}_i^*)$$

schreiben läßt.

Es sei K ein Körper mit dem Primkörper P und \mathcal{R} ein beliebiges Zahlensystem.

Definition 2.2. Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow K$ heißt \mathcal{R} -additiv (bezüglich des gegebenen \mathcal{R} -Systems), falls $f(0) = 0$ ($\in K$) und – mit der Darstellung (2.1) von n –

$$(2.2) \quad f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} f(\underline{b}_i^* \mathcal{R}_i) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gilt.

Mit $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$ bezeichnen wir die Menge aller \mathcal{R} -additiver Funktionen.

Definition 2.3. Die Menge $H_1 \subset \mathbb{N}_0$ heißt EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K) \quad \text{und} \quad f(H_1) = \{0\} \Rightarrow f(\mathbb{N}_0) = \{0\}.$$

Definition 2.4. Die Menge $H_2 \subset \mathbb{N}_0$ heißt ZM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, wenn für jedes $g : E_2 \rightarrow K$ ein $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$ mit $(g - f)(H_2) = \{0\}$ existiert.

Definition 2.5. Im Falle $P = \mathbb{Q}$ heißt die Menge $H_3 \subset \mathbb{N}_0 \pmod{1}$ EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls gilt:

$$f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K) \quad \text{und} \quad f(H_3) \subset \mathbb{Z} \Rightarrow f(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{Z}.$$

3. Weitere Vorbereitungen und Formulierung der Sätze

Mit der Darstellung (2.1) von n setzen wir

$$(3.1) \quad \underline{n}^* = (\underline{b}_0^*(n), \underline{b}_1^*(n), \dots).$$

In der Definition von \mathcal{E}_i^* soll überall $0, 1 \in P$ statt $0, 1 \in \mathbb{Z}$ werden. Somit geht \underline{n}^* in

$$(3.2) \quad \underline{n} = (\underline{b}_0(n), \underline{b}_1(n), \dots)$$

über.

Die Folge $(t_i)_0^\infty$ soll aus der Definition des vorliegenden \mathcal{R} -Systems genommen werden. Es sei

$$V(P) = \{(\underline{v}_0, \underline{v}_1, \dots) \mid \underline{v}_i \in P^{t_i}, \text{ von einer Stelle ab } \underline{v}_i = \underline{0}\}.$$

$V(P)$ ist ein Vektorraum über P . Die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow V(P)$ ($n \mapsto \underline{n}$) ist injektiv. Für $H_i = \{a_1, \dots\} \subset \mathbb{N}_0$ sei $\underline{H}_i = \varphi(H_i) = \{a_1, \dots\}$ ($a_j = \varphi(a_j)$) ($i = 1, 2, 3$).

Satz 3.1. Die Menge $H_1 \subset \mathbb{N}_0$ ist genau dann eine EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mindestens eine Darstellung

$$(3.3) \quad \underline{n} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \underline{a}_i \quad (s \geq 1)$$

mit $\lambda_i \in P$ existiert.

Satz 3.2. Die Menge $H_2 \subset \mathbb{N}_0$ ist genau dann eine ZM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$, falls für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.

Satz 3.3. Die Menge $H_3 \subset \mathbb{N}_0$ ist genau dann eine (mod 1) EM für $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mathbb{Q})$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mindestens eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.

4. Beweis der Sätze

Es sei für eine \mathcal{R} -additive Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow K$, $\underline{f} := (\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots)$, $(\underline{x}_i = (f(\underline{e}_i^* \mathcal{R}_i), \dots, f(\underline{e}_i^* \mathcal{R}_i)))$. Dann ist $f(n) = \underline{f} \cdot \underline{n}$.

Beweis des Satzes 3.1. (a) Setzen wir $f(H_1) = \{0\}$ und für $\underline{n} = \varphi(n)$ die Form (3.3) voraus. Dann ist $f(n) = \underline{f} \underline{n} = \sum_{i=1}^s \lambda_i (\underline{f} \underline{a}_i) = \sum_{i=1}^s \lambda_i f(a_i) = 0$.

(b) Setzen wir zweitens voraus, daß es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, für das $\underline{n} = \varphi(n)$ keine Darstellung (3.3) besitzt. Man kann annehmen, daß $\underline{H}_1 = \varphi(H_1)$ ein linear unabhängiges System ist. (Andern falls kann man aus \underline{H}_1 ein maximales unabhängiges Teilsystem \underline{H}_1^* auswählen. Sei nun $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, K)$. Dann gilt: $f(H_1) = \{0\} \iff f(H_1^*) = \{0\}$, und kann H_1^* die Rolle von H_1 spielen.)

Es sei $\underline{E} \subset V(P)$ die Menge aller Einheitsvektoren. Weil \underline{E} eine Basis von $V(P)$ ist, gibt es eine nichtleere Untermenge \underline{E}' von \underline{E} derart, daß $\underline{H}_1 \cup \underline{E}'$ auch eine Basis von $V(P)$ ist. Sei nun $f(H_1) = \{0\}$ und $f(\varphi^{-1}(e'_j)) = k_j$, falls $e'_j \in \underline{E}'$. Die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow K$ ($f(n) = \underline{f} \cdot \underline{n} = \sum_j \lambda_j \underline{f} e'_j + \sum_i u_i \underline{f} a_i = \sum_j \lambda_j k_j$) ist wohl erklärt, \mathcal{R} -additiv, und nicht notwendigerweise identisch 0.

Beweis des Satzes 3.2. (a) Das System H_2 ist linear unabhängig, und deswegen gibt es ein Teilsystem \underline{E}' von \underline{E} (wie oben!), so daß $\underline{H}_2 \cup \underline{E}'$ eine Basis von $V(P)$ ist. Erklärt man die Funktion f auf der Menge $H_2 \cup \varphi^{-1}(\underline{E}')$ beliebig, und sie kann \mathcal{R} -additiv sein.

(b) Hätte \underline{n} zwei verschiedene Darstellungen (3.3), so hätte auch die $\underline{0}$ eine nichttriviale Darstellung $\underline{0} = \sum_j k_j a_j$. Man kann dann für die dabei auftretenden $a_j \in H_2$ die Werte $f(a_j)$ so angeben, daß $f(0) = \underline{f} \cdot \underline{0} = \sum_j k_j f(a_j) \neq 0$ ist, was aber unmöglich ist.

Beweis des Satzes 3.3. Daß die Bedingung hinreichend ist, ist trivial. Wir werden nur die Notwendigkeit beweisen. Es sei

$$G(\mathbb{Z}) = \{(\underline{v}_0, \underline{v}_1, \dots) \mid \underline{v}_i \in Z^{t_i}, \text{ von irgendeiner Stelle ab } \underline{v}_i = \underline{0}\}$$

$G(\mathbb{Z})$ ist eine freie Abel'sche Gruppe (fAG) in $V(Q)$. $\underline{H}_3 = \varphi(H_3)$ ist eine Untergruppe von $G(\mathbb{Z})$. Es bezeichne $\langle \underline{H}_3 \rangle$ die von \underline{H}_3 erzeugte Untergruppe von $G(\mathbb{Z})$. Da $\langle \underline{H}_3 \rangle$ auch eine f.A.G. ist, gibt es eine Gruppenbasis $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots\}$ von $\langle \underline{H}_3 \rangle$. Es ist klar: $f(H_3) \subset \mathbb{Z} \iff \underline{f} \cdot \underline{b}_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, \dots)$. Setzen wir voraus, daß ein $\underline{n} \in \mathbb{N}_0$ ohne eine Darstellung (3.3) mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ existiert.

Fall 1. B ist keine Basis von $V(Q)$. Weil \underline{B} ein linear unabhängiges System ist, kann es mit einer nichtleeren Menge $\underline{E}' \subset \underline{E}$ (wie oben!) zu einer Basis ergänzt werden. Es sei nun $f(B) = \{0\}$, und $f(\varphi^{-1}(\underline{E}')) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Es gibt also ein $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, Q)$ mit $f(H_3) \subset \mathbb{Z}$ und $f(\mathbb{N}_0) \not\subset \mathbb{Z}$.

Fall 2. \underline{B} ist eine Basis von $V(Q)$. Dann existiert ein $\underline{n}_0 \in \mathbb{N}_0$ mit der Darstellung $\underline{n}_0 = \lambda_{i_1} \underline{b}_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} \underline{b}_{i_r}$, $\lambda_{i_1} \in Q \setminus \mathbb{Z}$. Es sei nun $f(b_{i_1}) = 1$ und $f(b_j) = 0 \ (j \neq i_1)$. Dann kann $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, Q)$ sein, ist $f(H_3) \subset \mathbb{Z}$ und – wegen $f(n_0) = \lambda_{i_1} - f(\mathbb{N}_0) \not\subset \mathbb{Z}$.

Literaturverzeichnis

- [1] Elliot P.D.T.A., A conjecture of KátaI, *Acta Arith.*, **26** (1974), 11-20.
- [2] Indlekofer K.-H., On sets characterizing additive and multiplicative functions, *Illionis Journal of Mathematics*, **25** (2) (1981), 251-257.
- [3] Jahnke T., Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen, *Elemente der Mathematik*, **36** (2) (1981), 36-39.
- [4] KátaI I., On sets characterizing numbertheoretical functions, *Acta Arith.*, **13** (1968), 315-320.
- [5] KátaI I., On sets characterizing numbertheoretical functions, *Acta Arith.*, **16** (1968), 1-4.
- [6] Hofman P., Note on a problem of KátaI, *Acta Math.Hung.*, **45** (3-4) (1985), 261-262.
- [7] Wolke D., Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen, *Elemente der Mathematik*, **33** (1) (1978), 14-16.

J. Fehér

Lehrstuhl für Mathematik

Janus Pannonius Universität

Ifjúság u. 6.

H-7624 Pécs, Ungarn