Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 13 (1992) 3-10

APPROXIMATION DURCH OPERATOREN VOM SZÁSZ – MIRAKJAN–TYP

J. Gróf (Veszprém, Ungarn)

Herrn Prof. János Balázs zum 70. Geburtstag gewidmet

I. Einleitung

Bei der Approximation von Funktionen auf unbeschränkten Intervallen ist der Szász - Mirakjan-Operator S_n einer der am öftesten untersuchten Operatoren. Die Definition von S_n lautet folgendermaßen:

$$(1)\qquad S_n(f;x) := e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\qquad (x\geq 0;\ n=1,2,3,\ldots).$$

Wir erwähnen drei nachteilige Eigenschaften dieses Operators: 1. S_n ist nur auf der nichtnegativen Seite der Zahlengeraden zur Approximation geeignet; 2. Wegen der unendlichen Reihe sind die numerische Rechnungen im allgemeinen problematisch; 3. Ist $f(x)\geq x^{x\Phi(x)}$ $(x>0)$, Φ monoton wachsend und $\lim\limits_{\infty}\Phi=\infty$, so ist die Reihe in (1) divergent [3], d.h. $S_n(f;x)$ existiert nicht.

Um die Beschränkung $x\geq 0$ zu beseitigen, definierten wir in [2] die Operatoren H_n:

$$(2)\qquad H_n(f;x) := \frac{1}{e^{nx}+e^{-nx}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$(-\infty<x<\infty;\ n=1,2,\ldots).$$

Wir wollen auch Nachteil 2. und 3. beseitigen; deshalb führen wir in (2) eine Modifizierung durch und bezeichnen die so entstehenden Operatoren mit $H_{n,\nu}$:

$$(3)\qquad H_{n,\nu}(f;x) := \frac{1}{e^{nx}+e^{-nx}}\sum_{k=0}^{\nu(n)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+(-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$(-\infty<x<\infty;\ \ n=1,2,\ldots).$$

Hier sei die Folge $\nu : N \to N$ streng monoton wachsend und $\lim_{n\to\infty} \nu(n)/n = \infty$. ($N$ bedeutet die Menge der positiven ganzen Zahlen.)

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, daß sich die Geschwindigkeit der punktweisen Konvergenz $H_n(f) \to f$ und $H_{n,\nu}(f) \to f$ für Funktionen einer wichtigen Klasse kaum unterscheidet (Satz 1), ferner zeigen wir, daß durch $H_{n,\nu}$ auch solche Funktionen approximiert werden können - sogar auf der ganzen Zahlengeraden - für welche die Operatoren S_n bzw. H_n gar nicht erklärt sind (Satz 2 bzw. Korollar 2.1 und 2.2). Aus dem Satz 3 bzw. seinen Korollaren 3.1 und 3.2 geht hervor, daß sich die Bedingungen im Satz 2 bzw. in den Korollaren 2.1 und 2.2 nicht wesentlich abschwächen lassen.

Wir erwähnen noch die Arbeit [1], in der die $\nu(n)$-te Partialsumme der Reihe (1) in einigen Spezialfällen untersucht wurde. Hier wollen wir die Beziehungen zwischen f und ν allgemeiner behandeln.

Im folgenden bezeichne R, R^+ bzw. R_0^+ die Menge der reellen, der positiven reellen bzw. nichtnegativen reellen Zahlen.

II. Die Sätze 1-3 und einige Korollare

Satz 1. *Wir nehmen an, daß für die Funktion $f : R \to R$ die Ungleichung $| f(t) | \le A | t |^{\alpha|t|}$ $(t \in R,\ t \ne 0)$ gilt. (Hier sind A, α positive Konstanten.) Ist $B \subset R$ eine beschränkte Menge, so existieren positive Zahlen C, λ, n_0 derart, daß*

$$| H_{n,\nu}(f;x) - H_n(f;x) | \le Ce^{-\lambda n} \qquad (x \in B,\ n > n_0) \tag{4}$$

ist.

Satz 2. *Es sei die Funktion $G : R_0^+ \to R$ differenzierbar, $G(0) \ge 0, G'$ monoton wachsend, $G'(t) \ge t^\delta$ $(t \ge t_0)$, wobei t_0 und δ positive Zahlen sind. Wir setzen noch voraus, daß mit einer Konstante $M > 0$*

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) \le Mn \qquad (n \in N) \tag{5}$$

ist. Gilt für $f : R \to R$ die Ungleichung

$$| f(t) | \le Ae^{G(|t|)} \qquad (t \in R) \tag{6}$$

mit $A > 0$, und ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} H_{n,\nu}(f;x) = f(x). \tag{7}$$

Korollar 2.1. Nehmen wir an, daß folgende Bedingungen gelten:

$$| f(t) | \leq Ae^{|t|^p} \quad (t \in R)$$

mit $A > 0, p > 1$, weiterhin

$$\nu(n) \leq n^\beta \quad (n \in N) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p}{p-1}. \tag{8}$$

Ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt (7).

(Es sei nämlich $G(t) = t^p$. Aus (8) folgt dann

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) = p\left(\frac{\nu(n)}{n}\right)^{p-1} \leq p\left(\frac{n^{p/(p-1)}}{n}\right)^{p-1} = pn$$

also gilt auch (5).)

Korollar 2.2. Nehmen wir an, daß folgende Redingungen gelten:

$$| f(t) | \leq Ae^{e^{|t|}} \quad (t \in R) \quad \text{mit} \quad A > 0,$$

weiterhin

$$\nu(n) \leq n \log n \qquad (n \in N). \tag{9}$$

Ist f in den Punkten x und $-x$ stetig, so gilt (7).

(Für $G(t) = e^t$ folgt aus (9)

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) = e^{\nu(n)/n} = e^{\log n} = n,$$

also gilt auch (5).)

Bemerkung. In Satz 2 und seinen Korollaren wurde f im Punkt x approximiert, die Stetigkeit wurde aber auch im Punkt $-x$ vorausgesetzt. Ohne diese Voraussetzung würden diese Behauptungen falsch, als Gegenbeispiel genügt z.B. die Funktion f in [2], S. 165. Für diese beschränkte und auf R^+ stetige Funktion gilt $H_n(f;x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für kein $x > 0$ [2]. Aus diesem Ergebnis und aus Satz 1 folgt, daß auch $H_{n,\nu}(f;x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für kein $x > 0$ gilt.

Satz 3. *Es sei $G : R_0^+ \to R$ differenzierbar, $G(0) \geq 0$, G' monoton wachsend, $G'(t) > 0$ $(t > 0)$. Wir setzen noch voraus, daß für hinreichend große n*

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) \geq 2n \log \nu(n) \tag{10}$$

gilt. Ist

$$f(t) = \begin{cases} e^{G(t)} & \textit{für} \;\; t \geq 0, \\ 0 & \textit{für} \;\; t < 0, \end{cases} \tag{11}$$

so besteht für alle $x > 0$ die Limesrelation

$$\lim_{n \to \infty} H_{n,\nu}(f; x) = \infty. \tag{12}$$

Korollar 3.1. (Vgl. Korollar 2.1.) Wir nehmen an, daß

$$f(t) = \begin{cases} e^{t^p}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \text{mit } p > 1,$$

und

$$\nu(n) = [n^\beta] \qquad (n \in N) \;\; \text{mit} \;\; \beta > \frac{p}{p-1} \tag{13}$$

ist. ($[t]$ bezeichnet den ganzen Anteil von t.) Dann gilt für $x > 0$ die Relation (12).

(Es sei nämlich $G(t) = t^p$. Aus (13) gilt dann für $n \geq 2$

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) = p\left(\frac{[n^\beta]}{2n}\right)^{p-1} \geq p\left(\frac{n^\beta}{4n}\right)^{p-1} = \frac{p}{4^{p-1}} n^{(\beta-1)(p-1)}.$$

Wegen $\beta > \frac{p}{p-1}$ ist $(\beta - 1)(p - 1) > 1$, folglich haben wir

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) \geq \frac{p}{4^{p-1}} n^\lambda,$$

mit $\lambda > 1$. Somit ist für hinreichend große n

$$\frac{p}{4^{p-1}} n^\lambda > 2n \log [n^\beta],$$

also gilt (10).)

Korollar 3.2. (Vgl. Korollar 2.2.) Wir nehmen an, daß

$$f(t) = \begin{cases} e^{e^t} & \text{für} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0, \end{cases}$$

und

$$(14) \qquad \nu(n) = [n^{1+\varepsilon}] \qquad (n \in N) \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0$$

ist. Dann gilt für $x > 0$ die Relation (12).

(Man betrachte nämlich $G(t) = e^t$. Aus (14) erhält man dann für hinreichend große n

$$G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) = \exp\left(\frac{[n^{1+\varepsilon}]}{n}\right) > \exp\left(\frac{n^{1+\varepsilon}-1}{n}\right) > \frac{1}{2}e^{n^\varepsilon} >$$

$$> 2n \log n^{1+\varepsilon} \geq 2n \log \nu(n),$$

also gilt (10).)

III. Die Beweise

Zum Beweis des Satzes 1. benutzen wir den nachstehenden

Hilfssatz [3]. *Sind b, α positive Zahlen, so existieren positive Zahlen C, λ, n_0 derart, daß die folgende Ungleichung gilt:*

$$e^{-nx} \sum_{k \geq 2bn} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha \frac{k}{n}} \frac{(nx)^k}{k!} < Ce^{-\lambda n} \qquad (0 \leq x \leq b, \quad n > n_0).$$

Beweis des Satzes 1. Es sei $x \in B$. Die Zahl $\delta \in N$ wählen wir so, daß $B \subset [-\delta, \delta]$ ist. Auf Grund der Voraussetzungen des Satzes gilt

$$| H_{n,\nu}(f;x) - H_n(f;x) | =$$

$$= \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \sum_{k=\nu(n)+1}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right)\right] \frac{(nx)^k}{k!} \leq$$

$$\leq 2A\, e^{-n|x|} \sum_{k=\nu(n)+1}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha \frac{k}{n}} \frac{| nx |^k}{k!} =: \Delta.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(n)/n = \infty$ ist, gilt für hinreichend große n die Ungleichung $\frac{\nu(n)}{n} > 2\delta$, also für $k > \nu(n)$ die Ungleichung $k > 2\delta n$. Nach dem Hilfssatz existieren dann C, λ, n_0 so, daß

$$\Delta < Ce^{-\lambda n} \qquad (0 \leq | x | \leq \delta; \quad n > n_0)$$

ist. Daraus folgt (4) unmittelbar.

Beweis des Satzes 2. Für $x = 0$ ist die Behauptung trivial, es sei also $x \neq 0$. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$$x_1 := [|\,x\,| + 1], \qquad E := [e^{M+2}] \qquad (s.(5)),$$

$$\hat{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad 0 \leq |\,t\,| \leq Ex_1, \\ 0 & \text{für} \quad |\,t\,| > Ex_1. \end{cases}$$

Für hinreichend große n ist $\nu(n) > Ex_1 n$, im folgenden nehmen wir immer an, daß diese Ungleichung gilt.

$$H_{n,\nu}(f;x) = \sum_{k=0}^{Ex_1 n} \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + (-1)^k f\left(-\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(nx)^k}{k!} + \\ + \sum_{k=Ex_1 n+1}^{\nu(n)} \ldots =: U + V.$$

Offensichtlich ist $U = H_n(\hat{f};x)$, und da $\hat{f}$ beschränkt und in den Punkten x und $-x$ stetig ist, erhält man (s.[2])

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\hat{f};x) = \hat{f}(x) = f(x),$$

folglich haben wir nur die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} V = 0$ zu beweisen.

Auf Grund der Bedingung (6) erhalten wir

$$|\,V\,| \leq 2A\, e^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} e^{G(\frac{k}{n})} \frac{|\,nx\,|^k}{k!}$$

und daraus (mit Hilfe der Stirling-Formel)

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} |\,V\,| &\leq 2Ae^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} e^{G(\frac{k}{n})} \frac{|\,nx\,|^k}{\sqrt{2\pi k}\, k^k e^{-k}} \leq \\ &\leq 2Ae^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1 n}^{\nu(n)} \exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right) + k \log \frac{en\,|\,x\,|}{k} \right) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\text{(16)} \qquad \psi_n(t) := G\left(\frac{t}{n}\right) + t \log \frac{en\,|\,x\,|}{t} \qquad (t > 0).$$

Nach dem Satz von Lagrange existiert zu jeder Zahl $t > Ex_1n$ ein τ mit $Ex_1n < \tau < t$ so, daß

$$\psi_n(t) = \psi_n(Ex_1n) + \psi'(\tau)(t - Ex_1n)$$

ist, somit gilt wegen (16)

$$\psi_n(t) \leq G(Ex_1) + Ex_1 n\log\frac{e \mid x \mid}{Ex_1} +$$
$$+ \left(G'\left(\frac{\tau}{n}\right)\frac{1}{n} - \log\frac{\tau}{n \mid x \mid}\right)(t - Ex_1n) =: \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Da $E > e$ und $x_1 > \mid x \mid$ ist, gilt $\lim\limits_{n+\infty} \Gamma_1 = -\infty$. Weil G' und log monoton wachsen, erhält man

$$\Gamma_2 \leq \left(G'\frac{\nu(n)}{n}\frac{1}{n} - \log\frac{Ex_1n}{n \mid x \mid}\right)\nu(n) \quad (Ex_1n \leq t \leq \nu(n)).$$

Daher ergibt sich wegen (5)

$$\Gamma_2 \leq (M - \log E)\nu(n) \qquad (Ex_1n \leq t \leq \nu(n)).$$

Nach der Definition von E ist $M - \log E < 0$, folglich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_2 = -\infty$. Wir erhalten also für hinreichend große n

$$\psi_n(t) < 0 \qquad (Ex_1n < t < \nu(n)),$$

und daraus - auf Grund von (15) und (16)

$$\mid V \mid \leq 2Ae^{-n|x|} \sum_{k=Ex_1n}^{\nu(n)} e^{\psi_n(k)} \leq 2Ae^{-n|x|}\nu(n). \tag{17}$$

Nach den Bedingungen $G'(t) \geq t^\delta$ $(t \geq t_0)$ und (5) gelten für hinreichend große n die Abschätzungen

$$\left(\frac{\nu(n)}{n}\right)^\delta \leq G'\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) \leq Mn.$$

Hieraus ergibt sich

$$\nu(n) \leq M^{\frac{1}{m^\delta}} n^{1+\frac{1}{\delta}}.$$

Daraus und aus (17) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} V = 0$.

Beweis des Satzes 3. Nach dem Satz von Lagrange und den Bedingungen des Satzes 3 erhalten wir

$$
\tag{18}
\begin{aligned}
G\left(\frac{\nu(n)}{n}\right) = G\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right) + G'(\xi_n)\frac{\nu(n)}{2n} \geq G'\left(\frac{\nu(n)}{2n}\right)\frac{\nu(n)}{2n} \geq \\
\geq (2n \log \nu(n))\,\frac{\nu(n)}{2n} = \log(\nu(n))^{\nu(n)}.
\end{aligned}
$$

Es sei $x > 0$. Wir setzen

$$
\tag{19}
a_k := \frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}}\exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right)\right)\frac{(nx)^k}{k!} > 0 \quad (k \in N).
$$

Mit Hilfe der Stirling-Formel ergibt sich:

$$
a_k > \frac{e^{-nx}}{2}\exp\left(G\left(\frac{k}{n}\right)\right)\left(\frac{enx}{k}\right)^k \frac{1}{q_k\sqrt{2\pi k}},
$$

wobei $\lim\limits_{k+\infty} q_k = 1$ ist. Für hinreichend große n gilt wegen (18)

$$
\begin{aligned}
a_{\nu(n)} &> \frac{1}{2\sqrt{2\pi}q_{\nu(n)}} e^{-nx}(enx)^{\nu(n)}\frac{1}{\sqrt{\nu(n)}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}q_{\nu(n)}}\exp\left(\nu(n)\left[-\frac{nx}{\nu(n)} + \log(enx) - \frac{1}{2\nu(n)}\log\nu(n)\right]\right),
\end{aligned}
$$

woraus $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\nu(n)} = \infty$ folgt. Da $a_{\nu(n)}$ das $\nu(n)$-te Glied der Reihe $H_n(f;x)$ ist (s.(11) und (19)) und alle Glieder von $H_n(f;x)$ positiv sind, gilt auch (12).

Literaturverzeichnis

[1] **Gróf J.**, Über Approximation durch Polynome mit Belegungsfunktion, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, **35**(1-2) (1980), 109-116.

[2] **Gróf J.**, Függvényapproximáció az egész számegyenesen, súlyozott hatványsorokkal, *Mat.Lapok*, **29**(1-3) (1977-1981), 161-170.

[3] **Hermann T.**, Approximation of unbounded functions on unbounded interval, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, **29** (1977), 393-398.

(Eingegangen am 1. März 1988)

J. Gróf
Institut für Mathematik und Rechentechnik
Universität für Chemische Industrie
H-8201 Veszprém, Pf. 158.
Ungarn