АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ ПУАССОНА

АНТАЛ КОВАЧ

Кафедра Теории Вероятностей и Математической Статистисти Университета им. Л. Этвеша, 1088 Будапешт, Музэум крт. 6–8.

(Поступило 13 сентября 1985)

В этой статье изучаем асимптотические разложения распределений сумм независимых, неотрицательных случайных величин в том случае, когда аппроксимающее распределение является обобщенным законом Пуассона. Будем говорить, что случайная величина U имеет функцию распределения обобщенного закона Пуассона, если его производящая функция имеет вид $e^{\lambda(\Psi(z)-1)}$, где $\Psi(z)$ является производящей функцией некоторой случайной величины, принимающей неотрицательные, целые значения. Здесь λ — некоторая положительная константа. Так как обобщенные законы Пуассона безгранично делимы, то они выступают предельными законами распределений сумм независимых случайных величин. Примером может служить случай, когда производящие функции слагаемых имеют вид $1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}\Psi(z)$. Этот пример показывает, что аппроксимация обобщенным законом Пуассона может использоваться тогда, когда производящие функции слагаемых имеют вид $f(\Psi(z))$ где f тоже производящая функция. В дальнейшем построим асимптотические разложения и оценим остаточные члены разложений при таких условиях. Для этого будем использовать понятие оператора Δ_Q. Пусть Q и P вероятностные меры на неотрицательных целых числах. В силу определения

$$\Delta_Q P = P - P * Q.$$

Для построения асимптотических разложений нам нужны некоторые свойства оператора Δ_Q:

1. Справедливо равенство

$$\Delta_Q^r P = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} P * Q^{*j}, \tag{1}$$

где Δ_Q^r определяется рекуррентными соотношениями

$$\Delta_Q^r P = \Delta_Q(\Delta_Q^{r-1} P).$$

Утверждение легко доказывается по индукции.

2. Пусть $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — производящие функции от P и Q. Тогда производящая функция от $\Delta_Q^r P$ равна $(1-\Psi(z))^r\,\Phi(z)$. Это получается следующим образом. В силу

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} (P * Q^{*j})(k)$$

имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \sum_{k=0}^{\infty} z^k (P * Q^{*j})(k).$$

3. Если $Q = I$ вероятностная мера, сосредоточенная в единице, то оператор Δ_I совпадает с оператором конечной разности, т.е.

$$\Delta_I P(k) = P(k) - P(k-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \Delta_Q^r P(k) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j \Phi(z) \Psi^j(z) = (1-\Psi(z))^r \Phi(z).$$

Пусть в дальнейшем P обозначает обобщенный закон Пуассона с производящей функцией $e^{\lambda(\Psi(z)-1)/n}$, где $\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k Q(k)$. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимые, одинаково распределенные, неотрицательные, целочисленные случайные величины с функцией распределения $\Phi(x)$ и с производящей функцией $f^*(\Psi(z))$, где $f^*(z)$ является производящей функцией некоторой случайной величины U. Пусть случайная величина V имеет распределение Пуассона с параметром λ/n. Обозначим факториальные и абсолютные факториальные псевдомоменты r-ого порядка случайных величин U и V через $\alpha(r)$ и $\beta(r)$. Пусть $\alpha(1) = 0$.

Для аппроксимации распределения F^{*n} используем следующее разложение

$$F^{*n}(x) = G^{*n}(x) + \sum_{j=1}^{s} B_j(x) + r_{s+1}(x), \tag{2}$$

где

$$G(x) = \sum_{k<x} P(k),$$

$$B_j(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} \overline{H}_{j+\nu,\nu} (-1)^{j+\nu} \Delta_Q^{j+\nu} G^{*(n-\nu)}(x),$$

$$\Delta_Q G(x) = \sum_{k<x} \Delta_Q P(k),$$

$$\overline{H}_{j,\nu} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{\alpha(i_l)}{i_l!}.$$

Это разложение получим аналогичным образом как в [1]. Пусть $f(t) = \bar{f}^*(\Psi(e^{it})), g(t) = e^{-\frac{\lambda}{n}(\Psi(e^{it})-1)}$ а $b_j(t)$ – преобзование Фурье-Стилтьеса для $B_j(x)$. Для определения $b_j(t)$ используем следующее формальное разложение

$$(f(t)-g(t))^\nu = \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha(j)}{j!}(\Psi(e^{it})-1)^j\right)^\nu =$$

$$= \sum_{j=2\nu}^{\infty} (\Psi(e^{it})-1)^j \bar{H}_{j,\nu}.$$

Получаем, что

$$b_j(t) = \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu}(\Psi(e^{it})-1)^{j+\nu} g^{n-\nu}(t)\, \bar{H}_{j+\nu,\nu}.$$

Из этого по второму свойству оператора Δ_Q следует, что

$$B_j(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} \bar{H}_{j+\nu,\nu}(-1)^{j+\nu} \Delta_Q^{j+\nu} G^{*(n-\nu)}(x).$$

В разложении (2) получим такую оценку остаточного члена:

Теорема. *Если* $\beta(s+2)$ *конечен, то*

$$\max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \sum_{j=1}^{s} B_j(x) \right| \leq \sum_{\nu=1}^{s+1} \binom{n}{\nu} \bar{h}_\nu,$$

где $\bar{h}_\nu$ *является полиномом от* $\beta(2), \beta(3), \ldots, \beta(s+2)$.

Замечание. Полиномы $\bar{h}_\nu$ имеют такой явный вид:

$$\bar{h}_\nu = \sum_{j=s+\nu+1}^{\nu(s+1)} D_j L_{j,\nu}^{(s+1)} + \sum_{l=1}^{\nu} \binom{\nu}{l} \left(\frac{\beta(s+2)}{(s+2)!}\right)^l \sum_{j=2(\nu-l)}^{(s+1)(\nu-l)} D_{l(s+2)+j} L_{j,\nu}^{(s+1)},$$

$$L_{j,\nu} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j \\ 1<i_l\leq s+1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{\beta(i_l)}{i_l!}$$

и

$$D_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\Psi(e^{it})-1|^j}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|} dt$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, s$. В случае $\nu = s+1$

$$\bar{h}_{s+1} = \frac{D_{2(s+1)}}{2^{(s+1)}} \beta^{s+1}(2).$$

Заметим, что константы D_j можно оценить используя C_j, которые были определены в [1]. Пусть $q = \sum_{k=1}^{\infty} kQ(k)$. Тогда

$$|\Psi(e^{it})-1|\leq q|e^{it}-1|,$$

следовательно, $D_j \leq q^j C_j$.

Доказательство теоремы. Утверждение этой теоремы доказывается аналогичным образом, как Теорема 2.1. в [1]. Только следует использовать разложение

$$f(t)-g(t)=\sum_{j=2}^{s+1}\frac{\alpha(j)}{j!}(\Psi(e^{it})-1)^j+\frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!}(\Psi(e^{it})-1)^{s+2}. \quad \square$$

Таким образом выражения, $e^{it}-1$ и $|e^{it}-1|$, выступающие в теореме, следует заменить разностью $\Psi(e^{it})-1$ и его абсолютным значением $|\Psi(e^{it})-1|$.

Следствие. Если $s=0$, то получим

$$\max_x |F^{*n}(x)-G^{*n}(x)|\leq\frac{nD_2}{2}\beta(2)\leq\frac{2q^2}{\Pi}n\beta(2).$$

В случае $s=1$

$$\max_x \left|F^{*n}(x)-G^{*n}(x)-\frac{n\alpha(2)}{2}\Delta_Q^2 G^{*(n-1)}(x)\right|\leq$$

$$\leq\frac{nD_3}{3!}\beta(3)+\binom{n}{2}\frac{D_4}{4}\beta^2(2)\leq\frac{nq^3\beta(3)}{3}+\frac{4n(n-1)q^4\beta^2(2)}{3\pi}.$$

Пример. Если $f(t)=1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}\Psi(e^{it})$, то $\alpha(1)=0, \alpha(r)=-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r$, и $\beta(r)=\left(\frac{\lambda}{n}\right)^r$, $r=2,3,\ldots$, следовательно,

$$\max_x |F^{*n}(x)-G^{*n}(x)|\leq\frac{2q^2\lambda^2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\max_x \left|F^{*n}(x)-G^{*n}(x)-\frac{\lambda^2}{2n}\Delta_Q^2 G^{*(n-1)}(x)\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{q^3\lambda^3}{3}+\frac{4q^4\lambda^4}{3\pi}\right)\frac{1}{n^2}-\frac{4q^4\lambda^4}{3\pi}\cdot\frac{1}{n^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ковач А.:* Асимптотические разложения в терминах псевдомоментов. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Computatorica* 5 (1977), 67—76.