АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ ПСЕВДОМОМЕНТОВ

А. КОВАЧ

Кафедра Теории Вероятностей и Математической Статистики Университета им. Л. Этвеша, Будапешт

(Поступило 15 ноября 1983)

1. Формальное разложение с помощью факториальных псевдомоментов

Г. Бергстрем [6] показал, как, используя общее тождество, можно получить классические, например, по многочленам Чебышева—Эрмита, разложения. В этом параграфе построим разложения распределений сумм независимых, неотрицательных, целочисленных случайных величин, которые будут выражаться через факториальные псевдомоменты отдельных слагаемых. Рассмотрим только тот случай, когда слагаемые одинаково распределены. Для неодинаково распределенных случайных величин можно построить разложения аналогичным образом, но формулы при этом будут громоздкими.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ независимые, одинаково распределенные случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения. Пусть F и G их функции распределения, а f и g соответстьенно характеристические функции. Через

$$\alpha(r) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-r+1)\big(P(X_j = k) - P(Y_j = k)\big)$$

и

$$\beta(r) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-r+1)|P(X_j = k) - P(Y_j = k)|$$

обозначим факториальные и абсолютные факториальные псевдомоменты случайных величин X_j и Y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Для аппроксимации распределения F^{*n} некоторым распределением G^{*n} используем разложение

$$F^{*(n)}(x) = G^{*n}(x) + \sum_{j=1}^{s} B_j(x) + r_{s+1}(x). \tag{1.1}$$

Здесь

$$B_j(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} H_{j+\nu,\,\nu} (-1)^{j+\nu} \triangle^{j+\nu} G^{*(n-\nu)}(x), \tag{1.2}$$

$$\triangle G(x) = G(x) - G(x-1),$$

$$\triangle^j G(x) = \triangle\left(\triangle^{j-1} G(x)\right),$$

$$H_{j,\nu} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{\alpha(i_l)}{i_l!}. \tag{1.3}$$

Это разложение получаем следующим образом. Заметим, что в терминах характеристических функций разложение Бергстрема имеет такой вид:

$$f^n(t) = g^n(t) + \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} (f(t) - g(t))^\nu g^{n-\nu}(t) + r_{s+1}(t). \tag{1.4}$$

Предположим, что распределения F и G имеют одинаковые первые моменты, т. е. $\alpha(1) = 0$. Для построения формального разложения для характеристической функции $f^n(t)$ предполагаем, что случайные величины X_j, Y_j имеют конечные факториальные псевдомоменты всех порядков. Таким образом, имеем формальное равенство

$$f(t) - g(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\alpha(j)}{j!} (e^{it} - 1)^j.$$

Следовательно,

$$(f(t) - g(t))^\nu = \sum_{j=2\nu}^{\infty} (e^{it} - 1)^j H_{j,\nu}. \tag{1.5}$$

Этот ряд подставляем в (1.4) и получаем

$$\sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} (f(t) - g(t))^\nu g^{n-\nu}(t) = \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} g^{n-\nu}(t) \sum_{j=2\nu}^{\infty} (e^{it} - 1)^j H_{j,\nu}.$$

Порядок убывания $\alpha(r)$ в общем случае самый разнообразный. Для выявления порядка убывания ряда

$$\sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} g^{n-\nu}(t) \sum_{j=2\nu}^{\infty} (e^{it} - 1)^j H_{j,\nu}$$

необходимо прибегнуть к некоторым ограничениям, налагаемым на факториальные псевдомоменты $\alpha(r)$. Существует много примеров, показывающих, что

$$\alpha(r) = O(n^{-r})$$

при $n \to \infty$.

В этом случае из (1.3) имеем, что при $n \to \infty$

$$H_{j,\nu} = O(n^{-j}). \tag{1.6}$$

Из (1.5) получаем

$$\sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu}(f(t)-g(t))^{\nu}g^{n-\nu}(t) = \sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu}g^{n-\nu}(t)\sum_{j=\nu}^{\infty}(e^{it}-1)^{j+\nu}H_{j+\nu,\nu} =$$

$$(1.7)\qquad = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\min(j,s)}\binom{n}{\nu}g^{n-\nu}(t)(e^{it}-1)^{j+\nu}H_{j+\nu,\nu}.$$

В силу (1.6) в ряде (1.7) слагаемые имеют следующие порядки убывания относительно n:

$$\sum_{\nu=1}^{\min(j,s)}\binom{n}{\nu}g^{n-\nu}(t)(e^{it}-1)^{j+\nu}H_{j+\nu,\nu} = O(n^{-j}).$$

Заметим, что в j-ом члене этой суммы присутствуют факториальные псевдомоменты только до $j+1$-ого порядка.

В сумме (1.7) ограничимся первыми s членами. Обозначим

$$b_j(t) = \sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}(e^{it}-1)^{j+\nu}g^{n-\nu}(t)H_{j+\nu,\nu},\qquad j = 1,2,\ldots,s.$$

Тогда вместо (1.7) получим сумму

$$(1.8)\qquad \sum_{j=1}^{s}b_j(t).$$

Легко видеть, что $b_j(t)$ является преобразованием Фурье-Стилтьеса для функции

$$B_j(x) = \sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}H_{j+\nu,\nu}(-1)^{j+\nu}\triangle^{j+\nu}G^{*(n-\nu)}(x).$$

Следовательно, получим разложение типа (1.1).

В частности,

$$B_1(x) = \frac{n\alpha(2)}{2}\triangle^2G^{*(n-1)}(x),$$

$$B_2(x) = \binom{n}{2}\left(\frac{\alpha(2)}{2}\right)^2\triangle^4G^{*(n-2)}(x)-\frac{n\alpha(3)}{3!}\triangle^3G^{*(n-1)}(x).$$

В определении функции $B_j(x)$ был использован тот факт, что если $g(t)$ является характеристической функцией j-кратной расности $G(x)$, то $(1-e^{it})^jg(t)$ есть преобразование Фурье-Стилтьеса от $\triangle^jG(x)$.

2. Оценки остаточного члена

Для оценивания остаточного члена используем абсолютные факториальные псевдомоменты до $s+2$-ого порядка. Для упрощения формулировок наших теорем определим понятие порядка полинома от абсолютных факториальных псевдомоментов.

Определение 2.1. Порядок полинома h с положительными коэффициентами от абсолютных факториальных псевдомоментов $\beta(r)$ обозначается через $R(h)$ и определяется следующими свойствами:

а) для двух полиномов h_1 и h_2

$$R(h_1+h_2) = \min\left(R(h_1), R(h_2)\right),$$
$$R(h_1 \cdot h_2) = R(h_1)+R(h_2);$$

б) порядок константы равен нулю и

$$R(\beta(r)) = r. \square$$

Пример. Если $\beta(r) = O(n^{-r})$ и $h(\beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(s)) = O(n^{-l})$, то $R(h) = l$.

Теорема 2.1. *Пусть s неотрицательное целое число. Если $\alpha(1) = 0$ и $\beta(s+2)$ конечно, то*

$$\max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \sum_{j=1}^{s} B_j(x) \right| \leq \sum_{\nu=1}^{s+1} \binom{n}{\nu} h_\nu, \tag{2.1}$$

где h_ν является полиномом от $\beta(2), \beta(3), \ldots, \beta(s+2)$ и

$$R(h_\nu) = s+1+\nu.$$

Полиномы h_ν можем записать в явном виде:

$$h_\nu = \sum_{j=s+\nu+1}^{\nu(s+1)} C_j L_{j,\nu}^{(s+1)} + \sum_{l=1}^{\nu} \binom{\nu}{l} \left(\frac{\beta(s+2)}{(s+2)!}\right)^l \sum_{j=2(\nu-l)}^{(s+1)(\nu-l)} C_{l(s+2)+j} L_{j,\nu}^{(s+1)}, \tag{2.2}$$

где

$$L_{j,\nu}^{(s+1)} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j \\ 1<i_l\leqq s+1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{\beta(i_l)}{i_l!}, \tag{2.3}$$

$$C_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|2\sin\frac{t}{2}\right|^{j+1} dt = \frac{2^{j-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}, \tag{2.4}$$

при $\nu = 1, 2, \ldots, s$, а в случае $\nu = s+1$

$$h_{s+1} = \frac{C_{2(s+1)}}{2^{s+1}} \beta^{s+1}(2). \quad \square \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 2.1. При доказательстве теоремы используем результаты [8]. В теореме 1 [8], полагая $m = 1$, получаем,

$$\max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} \left((F-G)^{*\nu} * G^*\right)^{(n-\nu)}(x) \right| \leq \binom{n}{s+1} h_{s+1}.$$

Таким образом, нам достаточно доказать неравенство

$$(2.6)\qquad \max_x \left|\sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu}\left((F-G)^{*\nu} * G^{*(n-\nu)}\right)(x) - \sum_{j=1}^{s} B_j(x)\right| \le \sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu} h_\nu.$$

Рассмотрим разность

$$D = \left|\sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu}(f(t)-g(t))^\nu g^{n-\nu}(t) - \sum_{j=1}^{s} b_j(t)\right|$$

соответствующих преобразований Фурье-Стилтьеса. В силу (1.8) получаем

$$(2.7)\qquad \begin{aligned}\sum_{j=1}^{s} b_j(t) &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}(e^{it}-1)^{\nu+j} g(t)^{n-\nu} H_{j+\nu,\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu} g(t)^{n-\nu}\sum_{j=2\nu}^{s+\nu}(e^{it}-1)^j H_{j,\nu}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(2.8)\qquad D = \left|\sum_{\nu=1}^{s}\binom{n}{\nu} g^{n-\nu}(t)\left\{(f(t)-g(t))^\nu - \sum_{j=2\nu}^{s+\nu}(e^{it}-1)^j H_{j,\nu}\right\}\right|.$$

По формуле Тейлора

$$(2.9)\qquad f(t)-g(t) = \sum_{j=2}^{s+1}\frac{\alpha(j)}{j!}(e^{it}-1)^j + \frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!}(e^{it}-1)^{s+2}.$$

Для остаточного члена имеет место неравенство

$$(2.10)\qquad |\gamma(s+2)| \le \beta(s+2).$$

Из (2.9) следует равенство

$$\begin{aligned}(f(t)-g(t))^\nu &= \left(\sum_{j=2}^{s+1}\frac{\alpha(j)}{j!}(e^{it}-1)^j\right)^\nu + \\ &+ \sum_{l=1}^{\nu}\binom{\nu}{l}\left(\frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!}(e^{it}-1)^{s+2}\right)^l\left(\sum_{j=2}^{s+1}\frac{\alpha(j)}{j!}(e^{it}-1)^j\right)^{\nu-l}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(2.11)\qquad \begin{aligned}(f(t)-g(t))^\nu &= \sum_{j=2\nu}^{\nu(s+1)}(e^{it}-1)^j H_{j,\nu}^{(s+1)} + \\ &+ \sum_{l=1}^{\nu}\binom{\nu}{l}\left(\frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!}(e^{it}-1)^{s+2}\right)^l\sum_{j=2(\nu-l)}^{(s+1)(\nu-l)}(e^{it}-1)^j H_{j,\nu}^{(s+1)}.\end{aligned}$$

Здесь

$$H_{j,\nu}^{(s+1)} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j\\ 1<i_l\le s+1}}\prod_{l=1}^{\nu}\frac{\alpha(i_l)}{i_l!}.$$

Поскольку $H_{j,\nu} = H_{j,\nu}^{(s+1)}$ при $j \leq s+\nu$, то из (2.8) и (2.11) получаем

$$D = \left| \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} g^{n-\nu}(t) \left\{ \sum_{j=s+\nu+1}^{\nu(s+1)} (e^{it}-1)^j H_{j,\nu}^{(s+1)} + \right.\right. \tag{2.12}$$

$$\left.\left. + \sum_{l=1}^{\nu} \binom{\nu}{l} \left(\frac{\gamma(s+2)}{(s+2)!} \right)^l \sum_{j=2(\nu-l)}^{(s+)(\nu-l)} (e^{it}-1)^{l(s+2)+j} H_{j,\nu}^{(s+1)} \right\} \right|.$$

Так как $\alpha(r) \leq \beta(r)$, $|g(t)| \leq 1$ и $|e^{it}-1| = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, то из (2.12) следует, что

$$D \leq \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} \left\{ \sum_{j=\nu+s+1}^{\nu(s+1)} L_{j,\nu}^{(s+1)} \left| 2\sin\frac{t}{2} \right|^j + \right. \tag{2.13}$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\nu} \binom{\nu}{l} \left(\frac{\beta(s+2)}{(s+2)!} \right)^l \sum_{j=2(\nu-l)}^{(s+1)(\nu-l)} L_{j,\nu}^{(s+1)} \left| 2\sin\frac{t}{2} \right|^{l(s+2)+j} \right\}.$$

Заметим, что $L_{j,\nu}^{(s+1)}$ определено в (2.3).

По утверждению леммы Цареградского [3]

$$\max_x \left| \sum_{\nu=1}^{s} \binom{n}{\nu} ((F-G)^{*\nu} * G^{*(n-\nu)})(x) - \sum_{j=1}^{s} B_j(x) \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} dt.$$

Подставляя оценку (2.13), получаем неравенство (2.6).

Если $\nu = 1, 2, \ldots, t$, то из того, что $R(L_{j,\nu}^{(s+1)}) = j$ и из (2.2) следует, что $R(h_\nu) = s+1+\nu$. Поскольку $R(h_{s+1}) = 2(s+1)$, то теорема 2.1 доказана. □

3. Асимптотические разложения в случае аппроксимации законом Пуассона

В этом параграфе рассмотрим случай, когда в качестве аппроксимации для свертки F^{*n} используется закон Пуассона. Скорость сходимости и асимптотические разложения в этом случае изучались в [1, 2, 5, 6]. В этих работах получены асимптотические разложения по полиномам Пуассона-Шарлье, а коэффициенты выражаются в терминах факториальных моментов. Основным методом доказательства яьляется метод характеристических функций. В этом параграфе покажем, что из общих результатов, полученных в предыдущих параграфах с использованием представления Бергстрема, в случае пуассоновской аппроксимации получаем асимптотические разложения аналогичного типа, но в терминах факториальных псевдомоментов.

Пусть

$$G(x) = \sum_{l<x} \pi(l; \lambda),$$

где

$$\pi(l;\lambda) = \frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}, \qquad \lambda > 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть s неотрицательное целое число. Если* $\alpha(1) = 0$ *и* $\beta(s+2)$ *конечно, то*

$$\max_x \left| F^{*n}(x) - G^{*n}(x) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}H_{j+\nu,\nu}\pi(k;(n-\nu)\lambda)J_{j+\nu-1}(k;(n-\nu)\lambda)\right| \le \tag{3.1}$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{s+1}\binom{n}{\nu}h_\nu,$$

где $k = [x]$,

$$H_{j+\nu,\nu} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j+\nu\\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu}\frac{\alpha(i_l)}{i_l!},$$

а h_ν является полиномом от абсолютных факториальных псевдомоментов (см. (2.2) *и* (2.5)); *$J_l(k;\lambda)$ является полиномами Пуассона-Шарлье, т. е.*

$$J_l(k;\lambda) = \sum_{r=0}^{\min(l,k)}(-1)^r\binom{l}{r}\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{\lambda^r}. \qquad \square$$

Доказательство. Известно [4], что для конечных разностей пуассоновского распределения выполняются следующие соотношения

$$\triangle^l\pi(k;\lambda) = \pi(k;\lambda)(-1)^lJ_l(k;\lambda),$$
$$\triangle^lG(x) = \triangle^{l-1}\pi([x];\lambda).$$

Используя теорему 2.1, в которой функция $B_j(x)$ имеет вид

$$B_j(x) = \sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}H_{j+\nu,\nu}(-1)^{j+\nu}\triangle^{j+\nu}\Big(\sum_{l<x}\pi(l;(n-\nu)\lambda)\Big) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{j}\binom{n}{\nu}H_{j+\nu,\nu}\pi([x];(n-\nu)\lambda)J_{j+\nu-1}([x];(n-\nu)\lambda),$$

получаем утверждение теоремы 3.1. $\square$

Полученное разложение в (3.1) является аналогичным разложению Франкена в [7]. Отличие состоит в том, что вместо факториальных моментов выступают факториальные псевдомоменты, а также в том, что параметр пуассоновского закона зависит от номера члена разложения.

Пример. Пусть $P(X_j = 1) = p$, $P(X_j = 0) = 1-p$, где $0<p<1$. В случае $s = 1$ из (3.1) получаем

$$\max_x\left|\sum_{l<x}\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l} - \sum_{l<x}\pi(l;np) - \frac{np^2}{2}\left(1-\frac{[x]}{(n-1)p}\right)\pi([x];(n-1)p)\right| \le$$
$$\le \binom{n}{2}\frac{4}{3\pi}p^4 + n\frac{p^3}{3}.$$

Порядок членов в разложении типа (3.1) может оказаться нерегулярным. Чтобы обойти эту трудность, Франкен в [7] исследовал, так называемые «нормированные последовательности», которые указывают, как можно сгруппировать члены разложения в убывающем порядке для довольно широкого класса распределений. Следуя Франкену, определим понятие «нормированности» последовательности случайных величин.

Определение 3.1. Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ называется «нормированной по последовательности неотрицательных чисел δ_n, $n = 1, 2, \ldots$" до s-ого порядка, если существуют числа $m(1), m(2), \ldots, m(s)$ такие, что

$$M(Z_n(Z_n-1)\ldots(Z_n-r+1)) = m(r)\delta_n^r, \quad r = 1, 2, \ldots s; \ n = 1, 2, \ldots . \ \square$$

Примеры. 1. Если случайные величины Z_n, $n = 1, 2, \ldots$ распределены по закону Пуассона с параметрами λ_n, тогда они очевидным образом нормированы по λ_n до произвольного порядка, поскольку

$$M(Z_n(Z_n-1)\ldots(Z_n-r+1)) = \lambda_n^r, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

2. Пусть Z неотрицательная, целочисленная случайная величина, у которой факториальные моменты

$$m(r) = M(Z(Z-1)\ldots(Z-r+1)), \quad r = 1, 2, \ldots, s$$

конечны, и пусть δ_n, $n = 1, 2, \ldots$ последовательность чисел, для которых $0 < \delta_n < 1$. Если $V_{1,n}$, $V_{2,n}$, $\ldots$ серия независимых случайных величин такая, что

$$P(V_{i,n} = 1) = \delta_n, \quad P(V_{i,n} = 0) = 1 - \delta_n, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и Z независима от $V_{i,n}$, тогда случайные величины

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z} V_{i,n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

образуют нормированную последовательность по δ_n до s-ого порядка. Действительно,

$$M(Z_n(Z_n-1)\ldots(Z_n-r+1)) =$$
$$= \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-r+1) \sum_{N=k}^{\infty} P(Z = N)\binom{N}{k}\delta_n^k(1-\delta_n)^{N-k}.$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$M(Z_n(Z_n-1)\ldots(Z_n-r+1)) =$$
$$= \sum_{N=r}^{\infty} P(Z = N) \sum_{k=r}^{N} k(k-1)\ldots(k-r+1)\binom{N}{k}\delta_n^k(1-\delta_n)^{N-k} =$$
$$= \delta_n^r \sum_{N=r}^{\infty} P(Z = N)N(N-1)\ldots(N-r+1) \sum_{j=0}^{N-r} \binom{N-r}{j}\delta_n^j(1-\delta_n)^{N-r-j} =$$
$$= m(r)\delta_n^r.$$

Теперь сформулируем утверждения для нормированных серий. Пусть $Y_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, k_n$; $n = 1, 2, \ldots$ серия независимых случайных величин, для которой

$$P(Y_{j,n} = k) = \pi(k; \lambda_n)\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть $X_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, k_n$; $n = 1, 2, \ldots$ серия независимых, одинаково распределенных, неотрицательных, целочисленных случайных величин, которые ($n = 1, 2, \ldots$) образуют нормированную последовательность по λ_n до $s+2$-го порядка. Обозначим через F_n и G_n функции распределения, а через $\alpha(n, r)$ и $\beta(n, r)$ факториальные и абсолютные факториальные псевдомоменты случайных величин $X_{j,n}$, $Y_{j,n}$.

Теорема 3.2. *Если* $\alpha(n, 1) = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, *то при* $n \to \infty$

$$\max_x \left| F_n^{*k_n}(x) - G_n^{*k_n}(x) - \sum_{j=1}^{s} \lambda_n^j A_{j,n}(x) \right| = O\left(\sum_{\nu=1}^{s+1} \binom{k_n}{\nu} \lambda_n^{s+1+\nu} \right), \tag{3.2}$$

где

$$A_{j,n}(x) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{j} \binom{k_n}{\nu} \lambda_n^\nu \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j+\nu \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{m(i_l)-1}{i_l!} \pi(k; (k_n-\nu)\lambda_n) J_{j+\nu-1}(k; (k_n-\nu)\lambda_n),$$

$$k = [x],$$

$$G_n^{*k_n} = \sum_{l<x} \pi(l; k_n\lambda_n). \quad \square$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2.1, если учесть, что

$$\alpha(n, r) = M(X_{j,n}(X_{j,n}-1)\ldots(X_{j,n}-r+1)) -$$
$$- M(Y_{j,n}(Y_{j,n}-1)\ldots(Y_{j,n}-r+1)) = m(r)\lambda_n^r - \lambda_n^r = \lambda_n^r[m(r)-1]$$

и

$$\beta(n, r) \leq \lambda_n^r[m(r)+1]. \quad \square$$

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} k_n\lambda_n = \lambda$, $\lambda > 0$, *то*

$$\max_x \left| F_n^{*k_n}(x) - G_n^{*k_n}(x) - \sum_{j=1}^{s} \lambda_n^j A_{j,n}(x) \right| = O(\lambda_n^{s+1}),$$

где

$$\lim_{n\to\infty} A_{j,n}(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \lambda^\nu \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_\nu=j+\nu \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{m(i_l)-1}{i_l!} \pi(k; \lambda) J_{j+\nu-1}(k; \lambda),$$

при $k = [x]$, *и*

$$\lim G_n^{*k_n}(x) = \sum_{l<x} \pi(l; \lambda). \quad \square$$

Следовательно, j-тый член разложения имеет порядок λ_n^j.

Заметим, что Франкен рассматривал случай, когда $\lambda_n = \frac{1}{n}$. В этой ситуации оценки остаточного члена в (3.2) имеют такой же порядок, как и в работе [7].

Пример. Пусть $P(X_{j,n} = 1) = \lambda_n, P(X_{j,n} = 0) = 1 - \lambda_n, j = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$. В этом случае $\alpha(n, 1) = 0, \alpha(n, r) = \beta(n, r) = \lambda_n^r$, $r = 2, 3, \dots$, поэтому

$$\max_x \left| \sum_{l<x} \binom{n}{l} \lambda_n^l (1 - \lambda_n)^{n-l} - \sum_{l<x} \frac{(n\lambda_n)^l}{l!} e^{-n\lambda_n} - \sum_{j=1}^{s} \lambda_n^j A_{j,n}(x) \right| =$$

$$= O\left(\sum_{\nu=1}^{s+1} \binom{n}{\nu} \lambda_n^{s+1+\nu} \right),$$

где

$$A_{j,n}(x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{j} \binom{n}{\nu} \lambda_n^{\nu} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_\nu=j+\nu \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{1}{i_l!} \pi(k; (n-\nu)\lambda_n) J_{j+\nu-1}(k; (n-\nu)\lambda_n),$$

и $k = [x]$.

Если $\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$, то

$$\max_x \left| \sum_{l<x} \binom{n}{l} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^l \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-l} - \sum_{l<x} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\lambda^j A_{j,n}(x)}{n^j} \right| = O\left(\frac{1}{n^{s+1}} \right),$$

и

$$\lim_{n\to\infty} A_{j,n}(x) = \sum_{\nu=1}^{j} \lambda^{\nu} (-1)^{\nu} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_\nu=j+\nu \\ i_l>1}} \prod_{l=1}^{\nu} \frac{1}{i_l!} \pi(k; \lambda) J_{j+\nu-1}(k; \lambda).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Григелионис Б.*, Сб асимптотическом разложении остаточного члена в случае сходимости к закону Пуассона. *Лит. мат. сд.*, **2** (1) (1962), 35–48.

[2] *Милашявичюс Й.*, О сходимости асимптотических разложений Григелиониса-Франкена. *Прим. теор. вер. и мат. стат.* Вып. 3. Вильнюс, 1980, 87–110.

[3] *Цареградский И. П.*, О равномерном приближении биномиального распределения неограничено делимыми законами. *Теор. вер. и её примен.*, **3** (4) (1958), 470–478.

[4] *Ширяев А. Н.*, Вероятность, Наука, Москва, 1980.

[5] *Якшявичюс Ш.*, Асимптотические разложения для вероятностных распределений. *Прим. теор. вер. и мат. стат.* Вып. 3. Вильнюс, 1980, 41–86.

[6] *Bergström H.*, On asymptotic expansions of probability functions. *Skand. Akt.* (1/2) (1951), 1–34.

[7] *Franken P.*, Approximation der Verteilungen von Summen unabhangiger nichtnegativer ganzzahliger Zufallgrössen durch Poissonsche Verteilungen, *Math. Nachr.* **27** (5/6) (1964), 303–340.

[8] *Kováts A.*, On the closeness of distributions of sums of independent integer valued random variables. Proceedings of 3rd Pannonian Symp. on Math. Stat., Visegrád, 1982, 135–142.