ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. А. ГРИГОРЬЕВ

Кафедра Математической физики Московского Государственного Университета, Москва 117234, Ленинские горы

(Поступило 16 марта 1983)

1. Предметом изучения в настоящей работе является обратная по «времени» t первая краевая задача для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Рассмотрение простейшего случая, а именно, задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t < T, \tag{1.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t < T, \tag{1.2}$$

$$u(x, T) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1.3}$$

(здесь $f(x)$ — заданная функция), показывает некорректность в смысле Адамара постановки (1. 1) — (1.3) над пространством непрерывных функций C. Во-первых, решение этой задачи не существует для произвольной $f \in C$. Во-вторых, даже в случае существования решения оно, вообще говоря, является неустойчивым по отношению к возмущениям начальной функции. Действительно,

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} e^{n^2(T-t)} \sin nx,$$

где n — натуральное число, удовлетворяет (1.1)–(1.3) с $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, а $u(x, t) \equiv 0$ — решение той же задачи с $f(x) = 0$. И хотя при $n \to \infty$ $\|f_n - f\|_C = \frac{1}{n} \to 0$, тем не менее для любого фиксированного $t < T$

$$\|u_n(x, t) - u(x, t)\|_{C[0, \pi]} = \frac{1}{n} e^{n^2(T-t)} \to \infty .$$

Известно, что существует целый ряд естественнонаучных проблем, приводящих к математическим постановкам типа (1.1)–(1.3), что обусловливает важность создания устойчивых методов решения таких задач. Одной из первых работ в этом направлении была [1], где предложен численный метод решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным ходом времени и проведением оценок погрешности показана его устойчивость на множестве ограниченных положительных функций.

Иной подход связан с теорией некорректно поставленных задач, развитой А. Н. Тихоновым, М. М. Лаврентьевым и их последователями. В частности, в [2] приведен следующий результат, имеющий фундаментальное значение для исследования устойчивости обратных задач:

Лемма 1.1. *Пусть метрическое пространство U отображается на метрическое пространство F и F_0 — образ множества $U_0 \subset U$ при этом отображении. Если отображение $U \to F$ непрерывно, взаимно однозначно и множество U_0 компактно в U, то отображение $F_0 \to U_0$ также непрерывно по метрике пространства U.* □

На основе [2] в [3] было сформулировано понятие корректности по Тихонову. Именно, задача называется поставленной корректно по Тихонову, если выполнены следующие условия: 1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит определенному множеству $\mathcal{M}$ некоторого функционального пространства; 2) решение задачи единственно; 3) бесконечно малым вариациям исходных данных задачи, не выводящим решение за пределы $\mathcal{M}$, соответствуют бесконечно малые вариации решения. Множество $\mathcal{M}$ при этом называется классом корректности.

При изучении некорректных обратных задач обычно совершенно естественным путём вводится прямое отображение $U \to F$, однозначное и непрерывное. Если же в качестве класса корректности выбирается компактное в U множество, то выполнение условия 3) следует по лемме 1.1 из 2).

Таким образом, узловыми здесь оказываются следующие моменты: *а)* доказательство теоремы единственности для обратной задачи; *б)* выделение компактного класса корректности (причем по возможности в наиболее естественном, удобном с точки зрения практики виде).

Указанный подход весьма плодотворен. Так, [4] с этой позиции объясняет результат работы [1]. Более того, оказалось, что аналитичность решения прямой задачи, решающим образом использованная в [1] не является существенной (см. [5]).

Настоящая работа распространяет результаты [5] на случай линейного параболического уравнения второго порядка общего вида.

2. Пусть Ω — ограниченная связная область с границей ω в n — мерном евклидовом пространстве E_n, $\mathcal{D} \equiv \Omega \times (0, T]$, $T > 0$, — цилиндр в E_{n+1}; точки E_n и E_{n+1} будем обозначать соответственно через $x = (x_1, \dots x_n)$ и (x, t). Пусть $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Сформулируем основные условия, при которых будут проводиться дальнейшие рассмотрения.

1° *а)* $\mathcal{L}$ – равномерно параболический в $\mathcal{D}$ оператор, т. е. существуют такие положительные константы μ_0, ν_0, что для любой точки $(x, t)\in\mathcal{D}$ и каждого ненулевого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ выполнено неравенство

$$\nu_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu_0|\xi|^2,$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

б) коэффициенты $\mathcal{L}$ – равномерно непрерывные по Гельдеру в $\mathcal{D}$ функции.

2° Граница ω области Ω обладает свойством строгой сферичности изнутри, т. е. для любой точки $x_0\in\omega$ существует такой (замкнутый) шар K с центром в некоторой точке $x^*\in\Omega$, $x^*\neq x_0$, что $K\subset\Omega$ и $K\cap\omega = \{x_0\}$ (Для выполнения этого условия достаточно принадлежности границы классу C^2).

Рассмотрим (прямую) начально-краевую задачу

$$\mathcal{L}u = 0, \quad (x,t)\in\mathcal{D}; \tag{2.1}$$

$$u|_s = 0, \quad s\equiv\omega x(0,T]; \tag{2.2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in\Omega, \tag{2.3}$$

где φ такова, что в $\overline{\mathcal{D}}$ обеспечено существование решения $u(x, t)$, понимаемого в классическом смысле. Множество всевозможных таких функций обозначим через Φ. Для каждой $\varphi\in\Phi$ при сделанных предположениях решение $u(x, t)$ единственно; кроме того для задачи (2.1)–(2.3) существует единственная функция Грина $G(x,t;\xi,\tau)$, $t>\tau$, так что в $\mathcal{D}$

$$u(x,t) = \int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi.$$

Рассматривая для φ, пробегающих Φ, семейство задач вида (2.1)–(2.3), обозначим через $U = \{u(x, t)\}$ соответствующее множество их решений.

Пусть для фиксированного $t\in(0, T]$ $\Omega_t\equiv\Omega\times\{t\}$, $U(t)$ – сужение U на $\overline{\Omega}_t$. $U(t)$ является подпространством $C(\overline{\Omega})$. Для фиксированных t_1, t_2 : $0<t_1<t_2\leq T$, вводим отображение $A_{t_2-t_1}$: $U(t_1)\to U(t_2)$, которое для каждого элемента $u\in U$ функции $u(x, t_1)$ ставит в соответствие функцию $u(x, t_2)$, $x\in\overline{\Omega}$. $A_{t_2-t_1}$ задается соотношением

$$u(x,t_2) = \int_{\Omega} G(x,t_2;\xi,t_1)u(\xi,t_1)d\xi.$$

Переходя к рассмотрению обратной задачи, т. е. задачи определения решения (2.1), удовлетворяющего (2.2), для $t<T$ по известной $f(x)$,

заметим, что решение ее существует, если $f \in U(T)$. Так как отображение A_{T-t}, $t \in (0, T)$, однозначно и непрерывно в равномерной метрике, вопрос об устойчивости решения обратной задачи сводится к доказательству однозначности A_{T-t}^{-1} и непрерывности его на некотором подмножестве $U(T)$.

Однозначность отображения A_{T-t}^{-1} дает вытекающее из результатов [6] утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть для оператора $\mathcal{L}$ выполнены условия 1° и, кроме того, $a_{ij}(x, t)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{D}$. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет в $\mathcal{D}$ уравнению (2.1) и граничному условию (2.2). Пусть, далее, $\omega \in C^1$. Тогда если $u(x, T) = 0$ $\forall x$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$.* □

3. Пусть $\tau \in (0, T)$; для $M > 0$ рассмотрим $U_{M,\tau}$ — совокупность всех функций из U, для которых

$$\|u\|_{C(\Omega_\tau)} \equiv \sup_{x \in \Omega} |u(x, \tau)| \leq M,$$

что в силу принципа максимума эквивалентно

$$\|u\|_{C(\bar{\mathcal{D}}_\tau)} \leq M,$$

где

$$\mathcal{D}_\tau \equiv \bar{\Omega} \times [\tau, T],$$

Имеет место

Лемма 3.1. *Для любого $t \in (\tau, T]$ множество $A_{t-\tau}(U_{M,\tau})$ компактно в $C(\bar{\Omega})$.* □

Доказательство. Линейный интегральный оператор $A_{t-\tau}$, действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, является вполне непрерывным. □

Заметим, что леммы 2.1 и 3.1 означают устойчивость обратной задачи на решениях из множества $U_{M,\tau}$.

Введем теперь в рассмотрение U^+ — подмножество неотрицательных функций из U. По принципу максимума $u \in U^+$ не может принимать нулевые значения внутри $\mathcal{D}$, если только $u \not\equiv 0$.

Далее будем через $\nu = \nu(x, t)$ обозначать внутреннюю нормаль к боковой поверхности S цилиндра $\mathcal{D}$ в точке (x, t). Существование ν, а также нормальной производной $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S$ решения (2.1)—(2.3) при $t \geq \tau$ обеспечено условиями 1°—2° и требованиями на $\varphi(x)$.

Следующий результат вытекает из принципа максимума.

Лемма 3.2. $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S > 0$ *для всякого $u \in U^+$, если только $u \not\equiv 0$.* □

Доказательство с помощью барьерной (относительно точки $(x_0, t_0) \in S$) функции

$$v(x, t) = e^{-\alpha(|x-x^*|^2 + |t-t_0|^2)} - e^{-\alpha R^2}, \quad \alpha > 0,$$

проводится так же, как в теореме 14 главы 11 [7]. Здесь (x^*, t_0), R суть соответственно центр и радиус шара K, о котором идет речь в условии 2°.

Лемма 3.3. *Пусть* Ω_0 — *строго внутренняя подобласть* Ω, $t<T$, $\tau_1, \tau_2 \in (0, t)$. *Тогда найдется такая постоянная* $C_0>0$ *(зависящая от* Ω_0, τ_1, τ_2, t*), что*

$$0 \le \frac{G(x,t;\xi,\tau_1)}{G(x,t;s,\tau_2)} \le C_0 \tag{3.1}$$

при всех x, $\xi \in \Omega$, $s \in \Omega_0$. □

Доказательство. Заметим, что $G(x, t; \xi, \tau)$ как функция (x, t) есть решение (2.1) при $t>\tau$, удовлетворящее (2.2), причем $G(x, t; \xi, \tau)>0$ для x, $\xi \in \Omega$. Поэтому (3.1) очевидно, когда x пробегает замыкание некоторой строго внутренней подобласти области Ω.

Теперь для $x_0 \in \omega$ возьмем внутреннюю нормаль к боковой поверхности цилиндра $\mathcal{D}$. Аргумент $t>0$ в наших рассмотрениях фиксирован, поэтому ниже будем говорить об этой нормали как о $\nu(x_0)$.

Распространим определение отношения из (3.1) для $x_0 \in \omega$ как предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu(x_0) \cap \Omega}} \frac{G(x,t;\xi,\tau_1)}{G(x,t;s,\tau_2)}. \tag{3.2}$$

Ниже показано, что такой предел существует.

Функция Грина задачи (2.1)—(2.3) при выполнении условий 1° непрерывно дифференцируема по x в Ω ([7]), поэтому при $x \in \nu(x_0) \cap \Omega$, $t>\tau$

$$0 \le G(x,t;\xi,\tau) = G(x,t;\xi,\tau) - G(x_0,t;\xi,\tau) =$$
$$= |x-x_0| \frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(\tilde{x},t;\xi,\tau),$$

где $\tilde{x}$ — точка нормали $\nu(x_0)$, лежащая между x_0 и x. Отсюда и из леммы 3.2 вытекает существование конечного предела (3.2) равного

$$\frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(x_0,t;\xi,\tau_1) \Big/ \frac{\partial G}{\partial \nu(x_0)}(x_0,t;s,\tau_2).$$

В силу непрерывности последнего отношения по переменной x получаем справедливость (3.1), когда x изменяется в некоторой окрестности границы ω в Ω. □

Далее нам потребуются дополнительные предположения относительно коэффициентов $\mathcal{L}$, а именно:

б$'$) $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}, \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \dfrac{\partial b_i}{\partial x_k}$ — равномерно непрерывные по Гельдеру в $\mathcal{D}$ функции.

Введем для некоторого $M>0$ множество

$$U_M^+ \equiv \{u\colon u \in U^+,\ \|u\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \le M\}.$$

Теорема. *Пусть* $t \in (t_0, T)$, $t_0 > 0$. *Тогда множество* $U_M^+(t)$ *компактно в* $C(\bar{\Omega})$. □

Доказательство. При выполнении условий 1°, 2°, б′) существует ([7], теорема 17 главы III) функция Грина $G^*(\xi, \tau; x, t)$ сопряженного оператора $\mathcal{L}^*$ (коэффициенты которого удовлетворяют условию б)). G^* является непрерывной функцией точки $(\xi, \tau; x, t)$, где $\xi \in \bar{\Omega}$, $x \in \Omega$, $\tau < t$. При этом для любых точек (x, t) и (ξ, τ) из $\mathcal{D}$, у которых $t > \tau$

$$G^*(\xi, \tau; x, t) = G(x, t; \xi, \tau).$$

Начально-краевая задача для уравнения

$$\mathcal{L}^* v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \{t < T\}$$

с граничным условием $v|_S = 0$ заменой t на $T - t$ сводится к задаче вида (2.1)–(2.3). Поэтому в силу леммы 3.3 получаем ограниченность отношения

$$\frac{G^*(\xi, \tau; x, t_1)}{G^*(\xi, \tau; s, t_2)} = \frac{G(x, t_1; \xi, \tau)}{G(s, t_2; \xi, \tau)}$$

при

$$t_1, t_2 > \tau; \quad x, \xi \in \Omega; \quad s \in \Omega_0.$$

Итак, существует такое число $c > 0$ (зависящее от Ω_0, τ, t_0, T; $0 < \tau < t_0 < T$), что

$$0 \le \frac{G(x, t_1; \xi, \tau)}{G(s, t_2; \xi, \tau)} \le c \tag{3.3}$$

для любых $t_1, t_2 \in [t_0, T]$; $x, \xi \in \Omega$; $s \in \Omega_0$.

Поэтому для каждого $u \in U^+$

$$u(x, t_1) = \int_\Omega G(x, t_1; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi \le c \cdot \int_\Omega G(s, t_2; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi = c \cdot u(s, t_2), \tag{3.4}$$

где константа c не зависит от выбора u.

В частности, рассматривая U_M^+, имеем

$$0 \le u(x, t_0) \le c \cdot u(s, T) \le c \cdot M \qquad \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, s \in \Omega_0,$$

откуда вследствие леммы 3.1 получаем утверждение теоремы. □

Лемма 2.1 и теорема обеспечивают выполнение всех условий, гарантирующих корректность по Тихонову обратной по t задачи для уравнения (2.1) с (2.2) на множестве U_M^+.

4. Замечания. 1) Неравенство (3.4) можно сформулировать в следующем виде: при $0 < t_0 \le t_1 \le t_2 \le T$ для всех $u \in U^+$ справедливо

$$\sup_{x \in \Omega} u(x, t_1) \le c \cdot \inf_{x \in \Omega_0} u(x, t_2) \tag{4.1}$$

с общей константой c (зависящей от Ω_0, t_0, T). Это неравенство типа Харнака для уравнения $\mathcal{L} u = 0$. В отличие от известных результатов точная верхняя грань в левой части неравенства берется по всему Ω, а не по его строго внутреннему подмножеству.

Из (4.1) следует, что для выделения из $U^+(t)$ компактного в $C(\bar{\Omega})$ множества достаточно для элементов этого множества потребовать выполнения условия

$$u(x_0, T) \leq M \tag{4.2}$$

в какой-то одной внутренней точке $x_0 \in \Omega$.

2. На самом деле можно говорить об устойчивости в метрике C обратной по t задачи для уравнения (2.1) в классе положительных решений U^+, а не U_M^+, так как в силу локального характера определения непрерывности условие (4.2) выполняется автоматически для соответствующего пучка решений.

3. Требования на гладкость коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, а также на гладкость границы ω, по-видимому, можно ослабить.

4. Схема, предложенная в настоящей работе, может быть обобщена на случай целого класса задач, носящих эволюционный характер (см. по этому поводу [8]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *John F.*, Numerical solution of the equation of heat conduction for proceeding times, *Ann. Math. pura ed appl., ser. IV* **40** (1955), 129–142.

[2] *Тихонов А. Н.*, Об устойчивости обратных задач, *Докл. АН СССР*, **39** (5) (1943), 195–198.

[3] *Лаврентьев М. М.*, О некоторых некорректных задачах математической физики, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

[4] *Григорьев Е. А.*, Об устойчивости обратной по времени задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе положительных решений. *Дифференц. уравнения*, **17** (7) (1981), 1250–1255.

[5] *Григорьев Е. А.*, Об устойчивости положительных решений обратных задач теплопроводности., *Журнал вычисл. математ. и матем. физики*, **22** (6) (1982), 1508–1513.

[6] *Lees M.* and *Protter M. H.*, Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities, *Duke Math, J.*, **28** (1961), 369–383.

[7] *Фридман А.*, Уравнения с частными производными параболического типа, «Мир», Москва, 1968.

[8] *Григорьев Е. А.*, Устойчивость положительных решений одного класса задач, приводящихся к интегральному уравнению 1-го рода. В сб. «Методы решения некорректных задач и их приложения». Новосибирск, 1982, 199–201.