# О ГЛУБИНЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ

ЛОЖКИН С. А.

Московский Государственный Университет
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Математической кибернетики, Москва, Ленинские горы

*(Поступило 29. 12. 1982)*

В настоящей работе продолжается изучение одного из основных классов управляющих систем — класса схем из функциональных элементов (с.ф.э.). Для каждой с.ф.э. определяется ее естественная временная характеристика, называемая глубиной*, и рассматриваются вопросы оптимальной (по глубине) реализации функций алгебры логики (ф.а.л.) с.ф.э. в некоторых базисах.

Пусть $\sum = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ — система исходных элементов (базис) и для $i = 1, 2, \ldots, r$ $E_i = (\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k_i}), D_i)$, то есть элемент $E_i$ реализует ф.а.л. $\varphi_i$, существенно зависящую от всех своих $k_i$ аргументов, и имеет глубину $D_i \geq 0$ ($D_i$ может быть, вообще говоря, произвольным неотрицательным действительным числом).

Будем предполагать, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^r$ базисных ф.а.л. полна и что с.ф.э. над базисом $\sum$ строятся в соответствии с обычными правилами (см., например, [9]).

Под глубиной цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов базиса, будем понимать сумму глубин всех ее элементов; глубину с.ф.э. будем определять как максимальную глубину ее цепей, а глубину ф.а.э. $f$ в базисе $\sum$ — как минимальную глубину с.ф.э. над базисом $\sum$, реализующих $f$.

Из [3, 8] следует, что тип асимптотического поведения функции Шеннона $D_\Sigma(n)$, которая равна максимальной глубине ф.а.л. от $n$ переменных в базисе $\sum$, определяется множеством $Z$, состоящим из тех базисных ф.а.л. $\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, для которых $D_i = 0$, а именно:

1. $D_\Sigma(n) \sim \tau_\Sigma \cdot n$, если $Z$ состоит из ф.а.л. одной переменной;
2. $D_\Sigma(n) \sim \alpha_\Sigma \log_2 n$, если $Z$ состоит из линейных ф.а.л.;

* В работах разных авторов эта временная характеристика называлась либо задержкой (см., например, [3, 4, 8]), либо глубиной (см., например, [1, 11, 12]). Однако, учитывая результаты [10], следует признать, что термин глубина является более удачным.

3. $D_\Sigma(n) = C'_\Sigma$ при $n \geq n_\Sigma$, если $Z$ содержит нелинейную ф.а.л., где $\tau_\Sigma$, $\alpha_\Sigma$, $c'_\Sigma$, $n_\Sigma$ – некоторые константы, зависящие от базиса. Формулы, выражающие $\tau_\Sigma$, $\alpha_\Sigma$, $C'_\Sigma$ через характеристики элементов базиса, получены в [3, 4, 8].

Для первых двух типов асимптотического поведения функции Шеннона $D_\Sigma(n)$ естественно возникает задача об оценке остаточных членов соответствующих асимптотических формул. Из [3] следует, что в случае второго типа асимптотического поведения функции Шеннона $D_\Sigma(n)$ справедливо равенство:

$$D_\Sigma(n) = \alpha_\Sigma \cdot \log_2 n + 0(1).$$

В работах [1, 11, 12] были получены некоторые оценки остаточного члена асимптотической формулы первого типа для функции Шеннона $D_{\Sigma_0}(n)$ в базисе

$$\textstyle\sum_0 = \{(x \cdot y, 1), (x \vee y, 1), (\bar{x}, 1)\}.$$

Наиболее точные из этих оценок были получены в [1], где было доказано, что

$$(1) \qquad ]n - \log_2 \log_2 n + 0(1)[ \leq D_{\Sigma_0}(n) \leq ]n - \log_2 \log_2 n + 0(1)[ + 2$$

(через $]a[$ будем обозначать ближайшее к $a$ сверху целое число, а через $[a]$ – ближайшее к $a$ снизу целое число).

Настоящая работа продолжает исследования в данном направлении. Для некоторых конкретных базисов $\sum$ первого типа с целочисленными положительными величинами $D_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$ и $\tau_\Sigma = 1$ (в частности и для базиса $\sum_0$) поведение функции Шеннона $D_\Sigma(n)$ устанавливается здесь, вообще говоря, с точностью до $0(1)$, то есть для $D_\Sigma(n)$ доказывается равенство вида:

$$(2) \qquad D_\Sigma(n) = ]n - \log_2 \log_2 n + 0(1)[ + C''_\Sigma,$$

где $C''_\Sigma$ – некоторая константа, зависящая от базиса.

Формулировки полученных результатов были опубликованы в [5].

## § 1. Основные определения, обозначения и некоторые вспомогательные результаты

Введем необходимые определения и обозначения, касающиеся ф.а.л. и их реализации в классе с.ф.э.

Пусть $B = \{0, 1\}$ и $B^n = \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n}$, где $n = 1, 2, \ldots,$ – единичный $n$ – мерный куб, то есть множество наборов из $x$ и 1 длины $n$.

Множестно ф.а.л. $f : B^m \xrightarrow{f} B$ от $m$ переменных будем обозначать через $P_2^m$, а множество всех ф.а.л. – через $P_2$. Будем считать, что переменные берутся их некоторого фиксированного счетного алфавита $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i \in P_2$ и т.п. будем обозначать также через $\tilde{\sigma}^n$ (или $\tilde{\sigma}$), $\tilde{x}^n$ (или $\tilde{x}$), $\tilde{f}^n$ (или $\tilde{f}$) и т.п.

Для ф.а.л. $f(\tilde{x}^n)$ через $N_f$ будем обозначать множество тех наборов $\tilde{\beta} \in B^n$, для которых $f(\tilde{\beta}) = 1$.

Для наборов $\tilde{\sigma}, \tilde{\gamma} \in B^n$ через $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\gamma}$, $\tilde{\sigma} \vee \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma} + \tilde{\gamma}$ будем обозначать наборы, получающиеся поразрядной операцией конъюнкции, дизъюнкции и сложения по модулю 2 соответственно из наборов $\tilde{\sigma}, \tilde{\gamma}$. Число единиц в наборе $\tilde{\sigma}$ будем обозначать через $\|\tilde{\sigma}\|$.

Единичной сферой в $B^n$ с центром в $\tilde{\beta} \in B^n$ будем, как обычно, называть множество всех таких наборов $\tilde{\gamma} \in B^n$, для которых $\|\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}\| = 1$. Как известно (см., например, [6]), для числа $n$, являющегося степенью 2, $B^n$ можно разбить на непересекающиеся единичные сферы.

Через $I_{\tilde{\gamma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x})$ и $K_{\tilde{\gamma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x})$, где $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, $\tilde{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{\gamma}, \tilde{\varrho} \in B^n$ будем обозначать следующие ф.а.л., называемые элементарной дизъюнкцией и элементарной конъюнкцией (э.к. ранга $\|\tilde{\gamma}\|$ от переменных $\tilde{x}$

$$I_{\tilde{\gamma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x}) = \bigvee_{\gamma_i = 1} x_i^{\varrho_i}, \quad K_{\tilde{\gamma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x}) = \mathop{\&}_{\gamma_i = 1} x_i^{\varrho_i},$$

где, как обычно, $x^0 = \bar{x}$, $x^1 = x$. Положим также, что

$$I_{\tilde{\varrho}}(\tilde{x}) = I_{\tilde{1}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x}) \quad \text{и} \quad K_{\tilde{\varrho}}(\tilde{x}) = K_{\tilde{1}, \tilde{\varrho}}(\tilde{x}), \quad \text{где} \quad \tilde{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in B^n.$$

Э.к. $K$ от переменных $\tilde{x}$ называется допустимой для ф.а.л. $f(\tilde{x})$, если $N_K \subseteq N_f$.

С.ф.э. над базисом $\sum = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$, где $E_i = (\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k_i}), D_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, будем задавать ациклическими ориентированными графами, вершины и ребра которых помечены следующим образом:

*1.* если число ребер, входящих в вершину $w$, которое мы будем обозначать через $indeg(w)$, равно 0, то вершина $w$ называется входом схемы и помечается символом некоторой переменной из $X$, причем разные входы помечаются разными переменными;

*2.* если $indeg(w) > 0$, то вершина $w$ называется внутренней вершиной схемы и помечается символом некоторого элемента $E_i \in \sum$ такого, что $indeg(w) = k_i$;

*3.* все ребра, входящие во внутреннюю вершину $w$ помечаются числами $1, 2, \ldots, indeg(w)$.

Через $V_{\text{вх}}(S)$, $V_{\text{вн}}(S)$, $V(S)$ и $U(S)$ будем обозначать множество входов, множество внутренних вершин, множество всех вершин и множество ребер с.ф.э. $S$ соответственно.

В каждой вершине $w$ с.ф.э. $S$ над базисом $\sum$ реализуется некоторая ф.а.л. $f_w$, зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, приписанных входам $S$, и определяемая по индукции следующим образом:

*1.* если $w \in V_{\text{вх}}(S)$, то $f_w$ совпадает с переменной, приписанной $w$;

*2.* если $w \in V_{\text{вн}}(S)$ помечена символом элемента $E_i \in \sum$, для $j = 1, 2, \ldots, k_i$ ориентированная пара $\overrightarrow{(w_j, w)} \in U(S)$ помечена числом $j$, в вершине $w_j$, $j = 1, 2, \ldots, k_i$ реализуется ф.а.л. $f_j = f_{w_j}$, то в вершине $w$ реализуется ф.а.л.

$$f_w = \varphi_i(f_1, f_2, \ldots, f_{k_i}).$$

Число ребер, выходящих из вершины $w$, будем обозначать через $outdeg(w)$. Вершины $w$, для которых $outdeg(w) = 0$, будем называть выходами схемы. С.ф.э. $S$ над базисом $\sum$ будем называть формулой (ф.), если для любой вершины $w \in V_{\text{вн}}(S)$ $outdeg(w) \leq 1$, и абсолютной формулой (а.ф.), если для любой вершины $w \in V(S)$ $outdeg(w) \leq 1$.

Будем считать, что рассматриваемые формулы имеют только один выход, и будем говорить, что с.ф.э. $S$ реализует ф.а.л. $f$, если $f$ реализуется на выходе $S$. С.ф.э. $S'$ и $S''$ будем называть эквивалентными, если они реализуют одну и ту же ф.а.л.

Изоморфизм с.ф.э. над базисом $\sum$ будем понимать как изоморфизм соответствующих помеченных графов. С.ф.э. $S'$ и $S''$ будем называть квазиизоморфными, если путем переименования (без отождествления) входов, их можно сделать изоморфными.

Цепью в с.ф.э. $S$ будем называть последовательность ее внутренних вермин $w_1, w_2, \ldots, w_l$, для которой $\overrightarrow{(w_{i-1}, w_i)} \in U(S)$ при всех $i = 2, 3, \ldots, l$. Глубиной такой цепи будем называть число $D_{i_1} + D_{i_2} + \ldots + D_{i_l}$, где $i_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$, – номер элемента, приписанного вершине $w_j$, а глубиной с.ф.э. $S$ над базисом $\sum$ – максимальную глубину ее цепей, которую мы будем обозначать через $D(S)$.

Однородной полной $\mu$–ярусной а.ф., построенной из элементов $E_i$, будем называть а.ф. $F$, для которой $|V_{\text{вх}}(F)| = (k_i)^\mu$, $D(F) = \mu D_i$ и все внутренние вершины $F$ помечены символами $E_i$ (все такие а.ф. будут, очевидно, квазиизоморфными).

В предположении полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^r$ базисных ф.а.л. в $P_2$ введем, как обычно, функцию Шеннона $D_\Sigma(n)$:

$D_\Sigma(f) = \min D(S)$, где $f \in P_2$ и минимум берется по всем с.ф.э. $S$ над базисом $\sum$, реализующим ф.а.л. $f$.

Очевидно, что для любой с.ф.э. $S$ над базисом $\sum$ существует эквивалентная ей ф. $F$ над $\sum$, для которой $D(F) = D(S)$. Следовательно, при определении и изучении функций $D_\Sigma(f)$ и $D_\Sigma(n)$ можно ограничиться рассмотрением класса формул над базисом $\sum$.

Нижние оценки в (2) будут получены с помощью обычных мощностных соображений, проводимых, возможно, с учетом функциональных особенностей некоторых из рассматриваемых базисов. Получение нижней оценки для функции Шеннона $D_\Sigma(n)$ в случае произвольного базиса первого типа $\sum = \{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$, $E_i = (\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k_i}), D_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ можно осуществить, например, следующим образом (ср. [8]).

**Лемма 1.** Для любой с.ф.э. $S$ над базисом $\sum$

(3) $$|V_{\text{вх}}(S)| \le 2^{\frac{D(S)}{\tau_\Sigma}}, \quad \text{где} \quad \tau_\Sigma = \min_{k_i \ge 2} \frac{D_i}{\log_2 k_i}. \ \square$$

Доказательство проводится индукцией по числу вершин.

Обозначим через $\mathfrak{N}_\Sigma(D)$, $D \ge 0$, – множество попарно не квазиизоморфных а.ф. $F$ над базисом $\sum$ таких, что $D(F) \le D$ и в $F$ отсутствуют цепи, состоящие из двух вершин $w'$, $w''$, для которых $indeg(w') = indeg(w'') = 1$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\Sigma(D, n)$, $D \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ – множество ф. $F'$ над базисом $\sum$ таких, что $|V_{\text{вх}}(F')| \le n$ и $F'$ получается из некоторой а.ф. $F \in \mathfrak{N}_\Sigma(D)$ отождествлением входов и приписыванием каждому из них переменной из множества $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, что для любой ф. $F''$ над базисом $\sum$ такой, что $D(F'') \le D$, $|V_{\text{вх}}(F'')| \le n$ и каждый вход $F''$ помечен некоторой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n$, найдется эквивалентная ей формула из $\mathfrak{M}_\Sigma(D, n)$.

**Лемма 2.** Для некоторой константы $C_{1,\Sigma}$, зависящей от базиса $\sum$,

(4) $$|\mathfrak{N}_\Sigma(D)| \le (D_{1,\Sigma})^{2^{D/\tau_\Sigma}}. \ \square$$

**Доказательство.** По построению множества $\mathfrak{N}_\Sigma(D)$ для любой а.ф. $F \in \mathfrak{N}_\Sigma(D)$ справедливо

(5) $$|U(F)| \le 4\,|V_{\text{вх}}(F)|.$$

Граф, соответствующий а.ф. $F$, является, очевидно, корневым деревом (определение корневого дерева см., например, в [2]), и для любой а.ф. $F$ путем нанесения определенным образом пометок на внутренние вершины и ребра некоторого корневого дерева можно всегда получить а.ф. $F'$ квазиизоморфную $F$ (нанесение пометок на входы для квазиизоморфизма несущественно). Поскольку число попарно неизоморфных корневых деревьев с $h$ ребрами не превосходит $4^h$ (см., например, [2] стр. 189), то, учитывая (3), (5) и то, что для любой с.ф.э. $S$ $|V_{\text{вн}}(S)| \le |U(S)|$, можно получить оценку (4), где

$$C_{1,\Sigma} = \left(8r \cdot \left(\max_{1 \le i \le r} k_i\right)\right)^4.$$

Лемма доказана. $\square$

В силу (3)–(4) для множества $\mathfrak{M}_\Sigma(D, n)$ будет, очевидно, справедливо неравенство

(6) $$|\mathfrak{M}_\Sigma(D, n)| \le (n \cdot C_{1,\Sigma})^{2^{D/\tau_\Sigma}}.$$

**Лемма 3.** Для почти всех ф.а.л. $f \in P_2^n$

$$D_\Sigma(f) \ge D_n,$$

где

(7) $$D_n = \tau_\Sigma\left(n - \log_2 \log_2 (n \cdot 2C_{1,\Sigma})\right). \ \square$$

**Доказательство.** Рассмотрим множество $Q^n$, состоящее из тех ф.а.л. $f \in P_2^n$, для которых $D_\Sigma(f) < D_n$. Любую ф.а.л. $f \in Q^n$ можно реализовать некоторой ф. $F \in \mathfrak{M}_\Sigma(D_n, n)$ и поэтому

$$|Q^n| \le |\mathfrak{M}_\Sigma(D_n, n)| \,. \tag{8}$$

Используя (6) и (8), можно легко показать, что

$$\frac{|Q^n|}{|P_2^n|} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \,.$$

*Следствие.*

1.
$$D_\Sigma(n) \ge \tau_\Sigma\left(n - \log_2 \log_2 n + o(1)\right).$$

2.
$$D_\Sigma(n) \ge \left]\tau_\Sigma\left(n - \log_2 \log_2 n + O(1)\right)\right[ \,, \tag{9}$$

если все элементы базиса $\sum$ имеют в качестве глубины целое число.

## § 2. Формулировки и доказательства основных результатов

Рассмотрим некоторые двуместные базисы $\sum$ первого типа, для которых $\tau_\Sigma = 1$, и докажем для каждого из них соотношение (2) с некоторой константой $C''_\Sigma$.

Положим

$$E_\lambda^{\&} = (x \cdot y, \lambda), \quad E_\lambda^{\vee} = (x \vee y, \lambda), \quad E_\lambda^{+} = (x + y, \lambda), \quad E_\lambda^{\neg} = (\bar{x}, \lambda)$$

и $E_\lambda^1 = (1, \lambda)$, где $\lambda$ – произвольное целое число.

**Теорема 1.** Для базиса $\sum_0 = \{E_1^{\&}, E_1^{\vee}, E_1^{\neg}\}$ $C''_{\Sigma_0} = 0$. □

**Доказательство.** Нижняя оценка, соответствующая соотношению (2) с $C''_\Sigma = 0$, для базиса $\sum_0$ следует непосредственно из (9).

Для получения верхней оценки используем специальное представление ф.а.л., построенное на основе конструкций О. Б. Лупанова из [6, 7] (ср. [1]).

Пусть $k$ и $t$ – некоторые натуральные числа, причем $k$ является степенью 2, и пусть $d = k \cdot t$. Для $\mu = 1, 2, \ldots, k$ через $\tilde{e}_\mu$ обозначим набор $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{\mu}, 0, \ldots, 0) \in B^k$, а через $(e_\mu)^t$ – набор $(e_\mu, \tilde{e}_\mu, \ldots, \tilde{e}_\mu) \in B^d$. Для произвольного набора $\tilde{\beta} \in B^d$ $t$-сферой с центром $\tilde{\beta}$ будем называть множество наборов $\{\tilde{\beta} + (\tilde{e}_\mu)^t\}_{\mu=1}^{k}$; $t$-сферу с центром $\tilde{\beta}$ будем называть хорошей, если для любого $\mu = 1, 2, \ldots, k$ найдется такое целое $\nu$, $1 \le \nu \le d$, для которого $\nu = \mu \pmod k$ и $\beta_\nu = 0$, и плохой в противном случае.

Пусть единичные сферы с центрами $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^k/k}$ образуют разбиение единичного куба $B^k$ (см. § 1). Легко видеть, что всевозможные $t$-сферы $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^d/k$, с центрами $\tilde{\beta}_i$, где $\beta_i$ совпадает с одним из наборов вида $(\tilde{\alpha}_\nu, \tilde{\gamma})$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^k/k$, $\tilde{\gamma} \in B^{d-k}$, не пересекаются и образуют разбиение единичного куба $B^d$, причем отношение $\varepsilon$ числа хороших $t$ – сфер $A_i$ к числу всех таких сфер удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon \geq \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right). \tag{10}$$

Для произвольного набора $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d) \in B^d$ и произвольной ф.а.л. $\psi(\tilde{u})$, где $\tilde{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$, $u_i \in X$ при всех $i = 1, 2, \ldots, d$, определим наборы

$$\tilde{R}(\tilde{\beta}) = (R_1(\tilde{\beta}), R_2(\tilde{\beta}), \ldots, R_d(\tilde{\beta})),$$
$$\tilde{G}(\tilde{\beta}) = (G_1(\tilde{\beta}), G_2(\tilde{\beta}), \ldots, G_d(\tilde{\beta})),$$
$$\tilde{H}(\tilde{\beta}, \psi) = (H_1(\tilde{\beta}, \psi), H_2(\tilde{\beta}, \psi), \ldots, H_d(\tilde{\beta}, \psi))$$

из множества $B^d$ следующим образом: для $r = 1, 2, \ldots, d$ и $r' = r \pmod k$, $1 \leq r' \leq k$,

$$R_r(\tilde{\beta}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \beta_{r'} = \beta_{r'+k} = \ldots = \beta_{r-k} = 1 \text{ и } \beta_r = 0 \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$G_r(\tilde{\beta}) = \begin{cases} \beta_r, \text{ если } R_r(\tilde{\beta}) = 1 \\ 0 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$H_r(\tilde{\beta}, \psi) = \psi(\tilde{\beta} + (\tilde{l}_{r'})^t).$$

Пусть $\chi_{\tilde{\beta}}(\tilde{u})$ – характеристическая ф.а.л. $t$ – сферы $A$ с центром $\beta \in B^d$. Из определения $t$ – сферы и введенных обозначений следует, что для любой ф.а.л. $\psi(\tilde{u})$

$$\chi_{\tilde{\beta}}(\tilde{u}) \cdot \psi(\tilde{u}) = \chi_{\tilde{\beta}}(\tilde{u}) \cdot I_{\tilde{R}(\tilde{\beta}) \cdot \tilde{H}(\tilde{\beta}, \psi),\, \tilde{G}(\tilde{\beta})}(\tilde{u}). \tag{11}$$

Заметим, что для хорошей $t$ – сферы $A$ с центром $\tilde{\beta}$ $\tilde{G}(\tilde{\beta}) = \tilde{0}$ и что для произвольной $t$ – сферы $A$ с центром $\tilde{\beta}$ справедливо

$$\|\tilde{R}(\tilde{\beta}) \cdot \tilde{H}(\tilde{\beta}, \psi)\| = |N_\psi \cap A|. \tag{12}$$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная ф.а.л. и $a, b, c, d, k, t, s, p$ – натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

$$к \text{ – степень } 2,\ a + b + c + d = n,\ d = k \cdot t,\ s \leq 2^c,\ p = \left]\frac{2^c}{s}\right[. \tag{13}$$

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2^d/k}$ – $t$ – сферы с центрами $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_{2^d/k}$ соответственно, образующие развиение единичного куба $B^d$ и построенные описанным выше способом.

Введем обозначения:

1. $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_a)$, $\tilde{y} = (x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_{a+b})$, $\tilde{z} = (x_{a+b+1}, \ldots, \ldots, x_{a+b+c})$, $\tilde{u} = (x_{a+b+c+1}, \ldots, x_n)$;
2. для всех $\tilde{\sigma} \in B^a$, $\tilde{\varrho} \in B^b$, $i = 1, 2, \ldots, 2^d/k$

$$f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{z}, \tilde{u}) = f(\tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, \tilde{z}, \tilde{u}) \cdot \chi_{\tilde{\beta}_i}(\tilde{u}).$$

Ф.а.л. $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}}$ зададим таблицей, строкам которой соответствуют всевозможные наборы из $B^c$, столбцам — всевозможные наборы из $A_i$, а на пересечении строки, соответствующей набору $\tilde{\pi} \in B^c$ и столбца, соответствующего набору $\tilde{\gamma} \in A_i$ стоит значение $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}}(\tilde{\pi}, \tilde{\gamma})$. Строки таблицы разрежем, как обычно, на полосы, содержащие по $s$ строк каждая, за исключением, возможно, последней полосы, которая содержит $s' \leq s$ строк. Для $l = 1, 2, \ldots, p$ определим ф.а.л. $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l}(\tilde{z}, \tilde{u})$, совпадающую с ф.а.л. $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}}$ на $l$-й полосе и равную 0 вне ее. Столбцы значений ф.а.л. $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l}$ $l = 1, 2, \ldots, p$ разобьем на группы одинаковых столбцов, содержащих не более $g_i$, где $q_i \leq k$ — некоторый параметр, таких столбцов. Легко видеть, что число таких групп будет не более чем

$$N_i = \left]\frac{k}{q_i}\right[ + 2^s. \tag{14}$$

Для определенности будем считать, что число групп в точности равно $N_i$, так как этого всегда можно добиться дополнительным подразбиением групп.

Для всех $j = 1, 2, \ldots, N_i$ через $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}(\tilde{z}, \tilde{u})$ обозначим ф.а.л., совпадающую с $f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l}$ на $j$-й группе столбцов и равную 0 вне ее. Очевидно, что

$$f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}(\tilde{z}, \tilde{u}) = f^{(1)}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}(\tilde{z}) \cdot f^{(2)}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}(\tilde{u}), \tag{15}$$

где $f^{(1)}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}$ — ф.а.л. от переменных $\tilde{z}$, столбец значений которой есть любой из столбцов $j$-й группы, а $f^{(2)}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}$ — характеристическая ф.а.л. множества столбцов $j$-й группы. Пусть

$$\chi_{\tilde{\beta}_i}(\tilde{u}) = \chi_i(\tilde{u}), \quad \tilde{R}(\tilde{\beta}_i) = \tilde{R}_i,$$
$$\tilde{H}\left(\tilde{\beta}_i, f_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}\right) = \tilde{H}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}, \quad \tilde{G}(\tilde{\beta}_i) = \tilde{G}_i.$$

Из (11) следует, что

$$f^{(2)}_{i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j}(\tilde{u}) = \chi_i(\tilde{u}) \cdot l_{\tilde{F}_i \cdot \tilde{H}_i, \tilde{\sigma}, \tilde{\varrho}, l, j, \tilde{b}_i}(\tilde{u}). \tag{16}$$

Пусть $b'$, $b''$ — целочисленные параметры, удовлетворяющие соотношению $b' + b'' = b$ и пусть $\tilde{y}' = (x_{a+1}, \ldots, x_{a+b'})$, $\tilde{y}'' = (x_{a+b'+1}, \ldots, x_{a+b})$, $\tilde{\varrho}' \in B^{b'}$, $\tilde{\varrho}'' \in B^{b''}$. В силу (15) для ф.а.л. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будут справедливы соотношения:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o},\tilde{\varrho}'',l,j} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\cdot K_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\cdot f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{z})\cdot f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{u})\vee f^0 =$$

$$= \bigvee_{i,\tilde{\sigma},l,j} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\cdot\left(\bigvee_{\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o},\tilde{\varrho}''} K_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\cdot f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{z})\right)\times$$

$$\times\left(\bigvee_{\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o},\tilde{\varrho}''} K_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\cdot f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{u})\right)\vee f^0$$

и

(17) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{i,\tilde{\sigma},l,j} K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\cdot g_{i,\tilde{\sigma},l,j}(\tilde{y}, z)\cdot \mathop{\&}_{\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o},\tilde{\varrho}''}\left(I_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\vee f^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{u})\right)\vee f^0$$

где

$$g_{i,\tilde{\sigma},l,j}(\tilde{y},\tilde{z}) = \bigvee_{\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o},\tilde{\varrho}''} K_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\cdot f^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j}(\tilde{z});\quad f^0 = f(\tilde{x},\tilde{o},\tilde{y}'',\tilde{z},\tilde{u}).$$

Из (16) и (17) следует, что

(18) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{i,\tilde{\sigma},l,j} \underbrace{\underbrace{K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\,\chi_i(\tilde{u})\,g_{i,\tilde{\sigma},l,j}(\tilde{y},\tilde{z})}_{F^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}} \mathop{\&}_{\tilde{\varrho}'\neq\tilde{o}} \underbrace{\mathop{\&}_{\tilde{\varrho}''}\left(I_{(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'')}(\tilde{y})\vee I_{\tilde{R}_i\cdot\tilde{H}_i,\tilde{\sigma},(\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}''),l,j,\tilde{G}_i}(\tilde{u})\right)}_{F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',l,j}}}_{F^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}}\vee$$

$$\vee f^0.$$

Выберем значения параметров следующим образом:

$$b = [2\log_2 n],\quad b' = [\log_2\log_2 n],\quad c = [2\log_2\log_2 n]$$

$$k = 2^{[\log_2\log_2 n]-1},\quad t = [\log_2 n],\quad s = [\log_2 n - 7\log_2\log_2 n],$$

$$q_i = \begin{cases} q, & \text{если } A_i \text{ — хорошая } t\text{-сфера}\\ q/2, & \text{если } A_i \text{ — плохая } t\text{-сфера,}\end{cases}$$

где

(19) $$2b+q = 2^m,$$

(20) $$(\log_2 n)^5 \le q \le 3(\log_2 n)^5.$$

Параметры $a, d, p$ определяются из (13), а параметры $k, s, c$ — удовлетворяют (13) при достаточно больших $n$.

Покажем, что можно построить такую ф. $F$ над базисом $\sum_0$, которая реализует ф.а.л. $f$ в соответствии с (18) и для которой

$$D_{\Sigma_0}(F) \le\, ]n - \log_2\log_2 n + \delta_n''[\,,$$

где
$$\delta_n'' \le \frac{2\log_2\log_2 n}{\log_2 n} + O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right).$$

Используя однородную полную $\mu$-ярусную ф., построенную из элементов $E_1^{\&}$ (соответственно $E_1^{\vee}$), для реализации ф.а.л. $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_M$ (соответственно $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_M$), где $M \le 2^{\mu}$, легко показать, что

(21) $$D_{\Sigma_0}(K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})) \le ]\log_2 n[ + 1 \le \log_2 n + 2$$

(22) $$D_{\Sigma_0}(\chi_i(\tilde{u})) \le ]\log_2 d[ + 1 + ]\log_2 k[ \le 2\log_2 n$$

(23) $$D_{\Sigma_0}(g_{i,\tilde{\sigma},l,j}(\tilde{y},\tilde{z})) \le b + c + 1 + ]\log_2(b+c)[ \le$$
$$\le 2\log_2 n + 3\log_2\log_2 n + 3 + o(1).$$

Из (18), (21)–(23) следует, что можно построить ф. $F^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}$ таким образом, что
$$D_{\Sigma_0}\left(F^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}\right) \le 2 + \max\{D_{\Sigma_0}(K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})),\ D_{\Sigma_0}(\chi_i(\tilde{u})),\ D_{\Sigma_0}(g_{i,\tilde{\sigma},l,j})\},$$
то есть

(24) $$D_{\Sigma_0}\left(F^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}\right) \le 2\log_2 n + 3\log_2\log_2 n + 5 + o(1).$$

Из (11), (12), (16), (19), (18) следует, что можно построить формулы $F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'',l,j}$ и $F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',l,j}$ таким образом, что
$$D_{\Sigma_0}\left(F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',\tilde{\varrho}'',l,j}\right) \le m,$$

(25) $$D_{\Sigma_0}\left(F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',l,j}\right) \le b'' + m.$$

Для того, чтобы получить ф. $F^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}$ построим $b'$-ярусную однородную полную формулу из элементов $E_1^{\&}$, отождествим каждый ее вход с выходом ф. $F^{(1)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}$, $F^{(2)}_{i,\tilde{\sigma},\tilde{\varrho}',l,j}$ для всех $\tilde{\varrho} \ne \tilde{o}$ и склеим одноименные входы всех таких ф. В силу (24) и (25)

(26) $$D_{\Sigma_0}\left(F^{(3)}_{i,\tilde{\sigma},l,j}\right) \le b' + b'' + m = b + m.$$

Так как $(n - b') \to \infty$ при $n \to \infty$, то в силу (1) можно построить ф. $F^0$, которая реализует ф.а.л. $f^0$ и для которой при достаточно больших $n$

(27) $$D_{\Sigma_0}(F^0) \le n - b' - \log_2\log_2 n + 3 \le n - 2\log_2\log_2 n + 4.$$

Обозначим через $I$ множество различных индексных наборов $(i, \tilde{\sigma}, l, j\}$. Очевидно, что $2^d/k$
$$|I| \le 2^a \cdot p \cdot \sum_{i=1} N_i$$

и поэтому в силу (10), (13), (14), (19) и (20)

$$|I| \le 2^a \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{2^d/k} \left( \frac{k}{q_i} + 2^s + 1 \right) \le 2^a \cdot p \frac{2^d}{q} \left( 1 + (1-\varepsilon) + \frac{(2^s+1)q}{k} \right) \le$$

$$\le \frac{2^{n-b}}{q \cdot s} (1+\delta)$$

где

$$\delta = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right).$$

Пусть $\lambda = [\log_2 \log_2 n] - 5$. Ф. $F$, реализующую ф.а.л. $f$ в соответствии с (18), построим следующим образом. Множество $I$ разобьем на непересекающиеся подмножества $I_1, I_2, \ldots, I_{2^\lambda - 1}$, каждое из которых содержит не более чем $|I|/2^\lambda - 1$ элементов. Для $\mu = 1, 2, \ldots, 2^\lambda - 1$ через $F_\mu$ обозначим ф., которая получается склеиванием одноименных входов всех ф. $F^{(3)}_{i, \tilde{\sigma}, l, j}$, соответствующих наборам $(i, \tilde{\sigma}, l, j) \in I_\mu$, и отождествлением выхода каждой такой ф. с одним из входов однородной полной $\mu$-ярусной ф., где $\mu = \left]\log_2 \left(\frac{|I|}{2^\lambda - 1}\right)\right[$, построенной из элементов $E_1^\vee$. В силу (26)

$$D_{\Sigma_0}(F_\mu) \le \left]\log_2 \left(\frac{|I|}{2^\lambda - 1}\right)\right[ + b + m \le ]n - \lambda - \log_2 q - \log_2 s + \delta'[ + m \tag{28}$$

где

$$\delta' \le \delta + \log_2 \left( 1 + \frac{1}{2^\lambda - 1} \right) = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right).$$

Ф. $F$ получается склеиванием одноименных входов ф. $F^0, F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_{2^\lambda - 1}$ и отождествлением выхода каждой из этих ф. с одним из входов $\lambda$-ярусной однородной ф., построенной из элементов $E_1^\vee$. В силу (27) и (28) для $F$ будет справедливо

$$D_{\Sigma_0}(F) \le ]n - \lambda - \log_2 q - \log_2 s + \delta'[ + m + \lambda \le ]n - \log_2 \log_2 n + \delta_n''[$$

где

$$\delta_n'' \le \delta' + \log_2 \left( 1 + \frac{2b}{q - 4b} \right) + (\log_2 \log_2 n - \log_2 s) \le$$

$$\le \frac{2 \log_2 \log_2 n}{\log_2 n} + O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right).$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Для базиса $\sum_1 = \{E_1^\vee, E_1^\neg\}$ $C_{\Sigma_1} = 2$. □

**Доказательство.** Требуемая верхняя оценка функции Шеннона получается так же, как и в теореме 1, на основе представления (18). Э. к. $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_M$ реализуется при этом как $(\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x} \vee \ldots \vee \bar{x}_M})$.

Для получения необходимой в данном случае нижней оценки рассмотрим множество $Q^n \leq P_2^n$, состоящее из тех ф.а.л. $f$, у которых ранг допустимых э. к. не меньше чем $n-[\log_2 n]-1$. Как известно (см., например, [2] стр. 133),

$$\frac{|Q^n|}{|P_n^2|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 .$$

Для а.ф. $F$ над базисом $\sum_1$ через $V_{\text{вх}}(F,t)$, где $t$ — произвольное целое число, будем обозначать множество входов $w \in V_{\text{вн}}(F)$, обладающих тем свойством, что среди вершин $w_i \in V_{\text{вн}}(F)$, $i=1,2,\ldots,l$, для которых $(\overrightarrow{w_{i-1}w_i}) \in U(F)$ при всех $i=2,3,\ldots,l$ и $(\overrightarrow{w w_1}) \in U(F)$, по крайней мере $t$ вершин помечено символом $E_1^{\neg}$.

**Лемма 4.** Для любой а.ф. $F$ над $\sum_1$ и любого $t=0,1,2,\ldots,$

(29) $$|V_{\text{вх}}(F,t)| \leq 2^{D(F)-t}. \ \square$$

Доказательство проводится индукцией по $t$ с использованием (3).

Пусть $\mathfrak{M}'_{\Sigma_1}(D,n)$ — множество всех тех ф. $F' \in \mathfrak{M}_{\Sigma_1}(D,n)$, для которых соответствующая а.ф. $F'' \in \mathfrak{R}_{\Sigma_1}(D)$ обладает следующими свойствами:

1. $V_{\text{вх}}(F'') = V_{\text{вх}}(F'',1)$;

2. для любой вершины $w$ из множества $V_{\text{вн}}^{(1)}(F'')$, состоящего из тех внутренних вершин а.ф. $F''$, помеченных символом $E_1^{\neg}$, «ниже» которых уже нет вершин, помеченных $E_1^{\neg}$, справедливо неравенство

$$|V_{\text{вх}}(F''_w)| \geq \frac{n}{2},$$

где $F''_w$ — подформула а.ф. $F''$, «вырастающая вверх» из $w$.

Легко видеть, что любая ф.а.л. $f \in Q^n$ реализуется некоторой формулой из $\mathfrak{M}'_{\Sigma_1}(D_{\Sigma_1}(f),n)$ при $n \geq b$.

По построению множества $\mathfrak{M}'_{\Sigma_1}(D,n)$ для любой а.ф. $F''$, соответствующей некоторой ф. $F'$ из этого множества,

(30) $$|V_{\text{вн}}^{(1)}(F'')| \leq \frac{2\,|V_{\text{вх}}(F'')|}{n} .$$

Учитывая (4), (29)—(30) и то, что число способов приписывания переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тем входным вершинам $w$ а.ф. $F'' \in \mathfrak{R}_{\Sigma_1}(D)$, которые принадлежат множеству $V_{\text{вх}}(F'') \setminus V_{\text{вх}}(F'',2)$ не больше чем $(2n)^{|V_{\text{вн}}^{(1)}(F'')|}$ легко получить оценку

(31) $$|\mathfrak{M}'(D,n)| \leq (C_2)^{2^D} \cdot n^{2^{D-2}} .$$

На основе (31) с помощью обычных мощностных рассуждений (см. доказательство леммы 3) можно доказать, что

$$D_{\Sigma_1}(n) \geq ]n - \log_2 \log_2 n + o(1)[ + 2 .$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема 2 дает пример получения нижней оценки для функции Шеннона $D_\Sigma(n)$ с помощью мощностных рассуждений, учитывающих специфику тех ф.а.л., которые реализуются элементами базиса.

**Теорема 3.** Для базисов $\sum_2 = \{E_1^+, E_1^\&, E_1^1\}$ и $\sum_3 = \{E_1^+, E_2^\&, E_1^1\}$

$$C''_{\Sigma_2} = 0, \quad C''_{\Sigma_3} = 2 . \ \Box$$

При доказательстве теоремы 3 соответствующая верхняя оценка получается на основе представлений аналогичных представлению (18), в котором операция дизъюнкции заменена операцией сложения по модулю 2 (для базиса $\sum_3$ полученное таким образом представление должно несколько видоизменено, для того, чтобы избавиться от «длинных» конъюнкций).

Требуемая нижняя оценка для базиса $\sum_2$ следует из (9), а для базиса $\sum_3$ получается так же, как при доказательстве теоремы 2, если в качестве множества $Q^n$ взять множество тех ф.а.л. $f \in P_2^n$, в полиноме Жегалкина которых отсутствуют слагаемые (каждое такое слагаемое является некоторой монотонной э. к.) ранга меньше чем $\frac{n}{3}$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] *Гашков С. Б.:* О глубине булевых функций. Проблемы кибернетики, вып. 34, М.: Наука, 1978, с. 265 – 268.

[2] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. т. 1. М.: Наука, 1974.

[3] *Ложкин С. А.:* Асимптотическое поведение функций Шеннона для задержек схем из функциональных элементов. Матем. заметки, 1976, т. 19, № 6, с. 939 – 951.

[4] *Ложкин С. А.:* О критической задержке для схем из функциональных элементов с задержками. Проблемы кибернетики, вып. 37, М.: Наука, 1980, с. 119 – 138.

[5] *Ложкин С. А.:* О поведении функции Шеннона для глубины булевских функций в некоторых базисах. У Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, 1980, с. 69 – 70.

[6] *Лупанов О. Б.:* О сложности реализации функций алгебры логики формулами. Проблемы кибернетики, вып. 3, М.: Физматгиз, 1960, с. 61 – 80.

[7] *Лупанов О. Б.:* О сложности универсальной параллельно-последовательной сети глубины 3. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1973, т. 133, с. 127 – 131.

[8] *Лупанов О. Б.:* О схемах из функциональных элементов с задержками. Проблемы кибернетики, вып. 23, М.: Наука, 1970, с. 43 – 81.

[9] *Лупанов О. Б.:* Об одном классе схем из функциональных элементов. Проблемы кибернетики, вып. 7, М.: Физматгиз, 1962, с. 61 – 114.

[10] *Храпченко В. М.:* Различие и сходство между задержкой и глубиной. Проблемы кибернетики, вып. 35, М.: Наука, 1979, с. 141 – 168.

[11] *Mc Coll W. F., Paterson M. S.:* The depth of all Boolean functions. SIAM Journ. on Computing, 1977, v. 6, 2, p. 373 – 380.

[12] *Spira P. M.:* On the time necessary to compute switching functions. IEEE Trans. C – 20, 1971, № 1, p. 104 – 105.