SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES MULTI-POINTS

Par

KATALIN KÁROLYI

Centre de Calcul de l'Université Eötvös Loránd de Budapest
1117 Budapest, Bogdánffy u. 10.

(Reçu 28 octobre 1982)

ABSTRACT. — We present the description of a numerical (Newton or quasilinearization) method for the solution of multi-point (boundary value) problems for ordinary differential equations. Numerical experiments are reported, together with some proposals (conclusions) — as to the accuracy (and computer time) requirements of the various subalgorithms involved — which they indicate.

I. Introduction

Nous considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$(1)\quad y' = f(x, y), \quad \text{où} \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

et nous cherchons la solution qui vérifie les conditions données aux m valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'intervalle $[x_1, x_m]$ par les relations suivantes:

$$(2)\quad \begin{aligned} A^{(1)} y(x_1) &= b^{(1)} && (2.1) \\ A^{(2)} y(x_2) &= b^{(2)} && (2.2) \\ &\vdots \\ A^{(m)} y(x_m) &= b^{(m)} && (2.m) \end{aligned}$$

où $A^{(j)} \in R^{s_j \times n}$, $b^{(j)} \in R^{s_j}$ sont des matrices, des vecteurs donnés, s_j des nombres naturels donnés, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Nous supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont continues et ont des dérivées partielles continues par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dans le domaine

$$S := \{(x, y) | x_1 \leq x \leq x_m, \; y \in R^n\}.$$

De plus, nous supposons que le problème (1)—(2) possède une solution et une seule: nous la désignons par $y^*(x)$.

Dans ce qui suit nous allons présenter une méthode numérique pour calculer une solution approchée du problème (1)—(2). Nous apporterons quelques remarques sur la réalisation de l'algorithme et quelques expériences numériques obtenues sur l'ordinateur R-40 du Centre de Calcul de l'Université Eötvös Loránd de Budapest.

II. Description globale de la méthode

Nous cherchons à trouver une solution approchée par itération en formant une suite

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(k)}(x), \ldots$$

dont chaque élément vérifie le système d'équations différentielles (1) et la condition initiale (2.1), c'est-à-dire:

$$\text{(3)} \qquad \frac{dy^{(k)}(x)}{dx} = f(x, y^{(k)}(x)) \qquad (3.1)$$

$$A^{(1)} y^{(k)}(x_1) = b^{(1)} \qquad (3.2)$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

Introduisons la fonction $\eta^{(k)}(x)$,

$$\text{(4)} \qquad \eta^{(k)}(x) := y^*(x) - y^{(k)}(x).$$

Nous pouvons écrire:

$$\text{(5)} \qquad \frac{d\,\eta^{(k)}(x)}{dx} = f(x, y^*(x)) - f(x, y^{(k)}(x)), \qquad (5.1)$$

$$A^{(1)} \eta^{(k)}(x_1) = 0. \qquad (5.2)$$

Remplaçons $f(x, y^*(x))$ par son développement de Taylor autour du point $(x, y^{(k)}(x))$ limité au terme du premier ordre, nous obtenons le système linéaire d'équations différentielles

$$\frac{d\,\eta^{(k)}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x, y^{(k)}(x))}{\partial y_i} \eta_i^{(k)}(x)$$

qui s'écrit plus brièvement

$$\text{(6)} \qquad \frac{d\,\eta^{(k)}(x)}{dx} = D_y f(x, y^{(k)}(x)) \cdot \eta^{(k)}(x).$$

Soient les fonctions

$$\eta_1^{(k)}(x), \eta_2^{(k)}(x), \ldots, \eta_l^{(k)}(x) \tag{7}$$

des solutions linéairement indépendantes du système (6), vérifiant la condition (5.2), $l = n - r^{(1)}$, où $r^{(1)}$ est le rang de la matrice $A^{(1)}$.

Il est facile de voir que la formule

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{l} d_j \eta_j^{(k)}(x) \tag{8}$$

où $d_1, d_2, \ldots, d_l$ sont des constantes arbitraires, donne toutes les solutions du système (6) qui vérifient la condition (5.2).

C'est donc qu'il existe, pour $\eta^{(k)}(x)$ aussi, des constantes

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \ldots, d_l^{(k)} \tag{9}$$

qui vérifient la formule

$$\eta^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{l} d_j^{(k)} \eta_j^{(k)}(x).$$

Pour trouver les coefficients (9) nous devons résoudre le système d'équations linéaires par rapport à $d_1, d_2, \ldots, d_l$, qui s'obtient en substituant dans les conditions (2.2)–(2.m) $y^*(x)$ par

$$y^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{l} d_j \eta_j^{(k)}(x):$$

$$\begin{aligned}
&A^{(2)} y^{(k)}(x_2) + \sum_{j=1}^{l} d_j A^{(2)} \eta_j^{(k)}(x_2) = b^{(2)},\\
&A^{(3)} y^{(k)}(x_3) + \sum_{j=1}^{l} d_j A^{(3)} \eta_j^{(k)}(x_3) = b^{(3)},\\
&\vdots\\
&A^{(m)} y^{(k)}(x_m) + \sum_{j=1}^{l} d_j A^{(m)} \eta_j^{(k)}(x_m) = b^{(m)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Ces résultats nous conduisent à l'approximation suivante de la solution $y^*(x)$:

$$y^{(k+1)}(x) := y^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{l} d_j^{(k)} \eta_j^{(k)}(x). \tag{11}$$

III. Description de l'algorithme numérique

A. Initiation

Nous déterminons d'abord une solution particulière, $z^{(1)}$, du système d'équations linéaires

$$A^{(1)} z = b^{(1)} \tag{12}$$

et nous la prenons pour valeur initiale de la fonction $y^{(1)}(x)$,

(13) $$y^{(1)}(x_1) := z^{(1)}.$$

Ensuite nous cherchons $l = n - r^{(1)}$ solutions particulières linéairement indépendantes,

(14) $$w_1, w_2, \ldots, w_l$$

du système homogène

(15) $$A^{(1)} w = 0.$$

B. Phase itérative

B.1. Nous déterminons $y^{(k)}(x)$, la solution du système d'équations différentielles

(16) $$y' = f(x, y), \quad x_1 \leqq x \leqq x_m$$

à partir de la condition initiale

(17) $$y(x_1) = z^{(k)}$$

où $z^{(k)}$ est obtenu par (13) pour $k = 1$ et par (22) pour $k > 1$.

B.2. Simultanément, nous déterminons les fonctions

(18) $$\eta_1^{(k)}(x), \eta_2^{(k)}(x), \ldots, \eta_l^{(k)}(x),$$

les solutions du système linéaire d'équations differentielles

(19) $$\eta'(x) = D_y f(x, y^{(k)}(x)) \cdot \eta(x),$$
$$x_1 \leqq x \leqq x_m$$

á partir des conditions initiales

(20) $$\begin{aligned} \eta_1^{(k)}(x_1) &= w_1, \\ \eta_2^{(k)}(x_1) &= w_2, \\ &\vdots \\ \eta_l^{(k)}(x_1) &= w_l. \end{aligned}$$

B.3. Connaissant les valeurs des fonctions

$$y^{(k)}(x), \eta_1^{(k)}(x), \eta_2^{(k)}(x), \ldots, \eta_l^{(k)}(x)$$

pour $x = x_2, x_3, \ldots, x_m$ nous établissons le système d'équations linéaires d'après (10):

(21) $$\sum_{j=1}^{l} d_j A^{(p)} \eta_j^{(k)}(x_p) = b^{(p)} - A^{(p)} y^{(k)}(x_p)$$
$$p = 2, 3, \ldots, m,$$

et en le résolvant nous obtenons les coefficients (9): $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \ldots, d_l^{(k)}$.

B.4. Nous déterminons la valeur initiale de l'approximation suivante de $y^*(x)$ selon la formule:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \sum_{j=1}^{l} d_j^{(k)} w_j . \tag{22}$$

Notons ici que si les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont linéaires par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nous ne devons effectuer qu'une seule phase itérative pour trouver une solution approchée de notre problème.

C. Sortie de la phase itérative

Nous donnons ici deux critères possibles de l'achèvement des phases itératives.

Nous sortons des itérations et prenons, comme solution approchée, la fonction $y^{(k)}(x)$ obtenue dans la dernière phase itérative si, au moins, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

$$\max_j \|A^{(j)} y^{(k)}(x_j) - b^{(j)}\| < \varepsilon_c , \tag{23}$$

$$\|z^{(k+1)} - z^{(k)}\| < \varepsilon_r \|z^{(k)}\| \tag{24}$$

où ε_c et ε_r sont des nombres positifs donnés (erreurs tolérées).

IV. Remarques sur la réalisation numérique

Nous apportons ici des remarques relatives aux paragraphes A., B., C., (respectivement) du chapitre précédent.

A. Initiation

L'applicabilité de l'algorithme dépend étroitement de la méthode de résolution du système linéaire (12) et (15), $A^{(1)} z = b^{(1)}$ et $A^{(1)} w = 0$.

Nous avons utilisé la méthode de Gauss avec pivot maximum (en valeur absolue $\geq \varepsilon$). L'exactitude de la détermination du rang de la matrice $A^{(1)}$ dépend entièrement du paramètre ε, il faut donc le choisir avec soin.

Pour assurer la convergence de la méthode, il est conseillé, si c'est possible, d'utiliser dans le calcul de $z^{(1)}$ une estimation de ses composantes libres.

On aura également intérêt à choisir $w_1, w_2, \ldots, w_l$ orthogonaux deux à deux.

B. Phase itérative

Il est très important de bien choisir la méthode de résolution du problème de Cauchy pour les systèmes (16)–(17) et (19)–(20). (Pour éviter, par exemple, les inconvénients des problèmes « stiff » qui apparaissent souvent.)

Dans notre programme nous utilisons, pour le moment, la méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4 avec pas constant sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, qui nous a donné de bons résultats.

Pour résoudre le système d'équations linéaires (21) nous avons à nouveau utilisé la méthode de Gauss avec pivot maximum. Si, en raison d'un mauvais choix de ε, on devait conclure que le système est irréqulier (bien qu'il soit réqulier par construction), on trouverait dans notre programme la possibilité de faire un nouveau choix pour ε.

C. Sortie de la phase itérative

Dans le dessein de réduire le nombre d'itérations il est conseillé de choisir les paramètres ε_c et ε_r de telle sorte que

$$M \cdot h^3 \approx \varepsilon_c \approx \varepsilon_r$$

où M est une constante dépendant des dérivées jusqu'au quatrième ordre de f et de la longueur de l'intervalle $[x_1, x_m]$, et h est le pas choisi pour la méthode de Runge-Kutta.

V. Résultats numériques

Notre programme a été écrit en PL/1 pour l'ordinateur R-40 de l'Université Eötvös Loránd de Budapest. Il se compose de 450 instructions, son espace de travail est approximativement de $4(6n+2n^2)$ bytes.

Il est important de noter que nous n'utilisons aucune mémoire de stockage pour la fonction $y^{(k)}(x)$ et pour les fonctions intermédiaires $\eta_j^{(k)}(x)$.

Nous avons testé différents types de problèmes parmi lesquels nous choisissons ici les deux exemples suivants:

1. Soit le système

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 & y_5' &= y_6 \\ y_2' &= y_1 - 2\sin x & y_6' &= 0.25\,y - 1.25\,y_7 \\ y_3' &= y_4 & y_7' &= y_8 \\ y_4' &= 4y_3 - 5y_7 & y_8' &= -y_7 \end{aligned}$$

dont nous avons cherché la solution dans trois cas différents:

a) $m = 2$ $\quad x_1 = 0$

$x_2 = 6.28318$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{Bmatrix} 5.7350 \cdot 10^5 \\ 8.6027 \cdot 10^5 \\ 1.9136 \\ 0 \\ 2.8673 \cdot 10^5 \\ 5.7355 \cdot 10^5 \\ 3.7646 \cdot 10^5 \end{Bmatrix}$$

b) $m = 3$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3.14159$$
$$x_3 = 6.28318$$

$$A^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b^{(1)} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.1349 \cdot 10^3 \\ 5.3940 \cdot 10^2 \\ 3.7427 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.1470 \cdot 10^6 \\ 5.7356 \cdot 10^5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $m = 8$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0.7854$$
$$x_3 = 1.5708$$
$$x_4 = 2.35619$$
$$x_5 = 3.14159$$

$$x_6 = 4.71239$$
$$x_7 = 5.49779$$
$$x_8 = 6.28318$$

$$A^{(1)} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(2)} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(3)} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(4)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(5)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(6)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$
$$A^{(7)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$
$$A^{(8)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$b^{(1)} = (0)$$
$$b^{(2)} = (7.0711 \cdot 10^{-1})$$
$$b^{(3)} = (2.4184 \cdot 10)$$
$$b^{(4)} = (2.2191 \cdot 10^{2})$$
$$b^{(5)} = (5.0184)$$
$$b^{(6)} = (5.228)$$
$$b^{(7)} = (7.0711 \cdot 10^{-1})$$
$$b^{(8)} = (1)$$

Avec $h \approx 6.28318 \cdot 10^{-3}$ le temps d'exécution a été de 4–6 minutes pour une obtention d'erreurs de l'ordre de 10^{-10}.

2. Soit le problème non linéaire

$$y'' = \frac{3}{2} y^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

qui a deux solutions (cf [1] chapitre 7.3).

En utilisant comme approximation initiale pour $z^{(1)} = (y(0), \tilde{y}'(0))$: : (4,0), nous avons obtenu la solution correspondant à la condition initiale $(y(0), y'(0)) = (4, -8)$ à la $7^{\text{ième}}$ itération, avec une précision de 10^{-10}. Pour $h = 0.001$ le temps d'exécution a été de 51 sec.

RÉFÉRENCES

[1] *J. Stoer – R. Bulirsch:* Introduction to numerical analysis, Springer–Verlag, Heidelberg, 1977.
[2] *Н. С. Бахвалов:* Численные методы. Наука, Москва, 1975.