

NUMERISCHE LÖSUNG DER DIFFERENZIALGLEICHUNG

$y'' = f(x; y; y')$ MIT SPLINE-FUNKTION

JÁNOS GYÓRVÁRI

Universität für Chemische Industrie Veszprém
Institut für Mathematik und Rechnentechnik
8201 Veszprém, Pf. 158.

(Eingegangen am 21. Februar 1982)

Betrachten wir das Cauchy-Problem:

$$(1) \quad \begin{aligned} y'' &= f(x; y; y'); \quad x \in [0; 1] \\ y(0) &= y_0; \quad y'(0) = y'_0. \end{aligned}$$

Seien die nachstehenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Funktion $f(x; y(x); y'(x))$ ist r -mal differenzierbar (d. h. $y \in C^{r+2} [0; 1]$).
2. $|f^{(q)}(x; y_1; y'_1) - f^{(q)}(x; y_2; y'_2)| \leq M \{|y_1 - y_2| + |y'_1 - y'_2|\}$ für $q = 1; 2; 3; \dots; r$

(für $q = 0$ siehe [1]), wo $f^{(0)} = f$;

$$f^{(m+1)} = f_x^{(m)} + f_y^{(m)} \cdot y' + f_{y'}^{(m)} \cdot f.$$

Es sei

$$x_k = \frac{k}{n}; \quad h = \frac{1}{n}; \quad y_k = y(x_k); \quad y_k^{(q)} = y^{(q)}(x_k),$$

$$(q = 1; 2; \dots; r+2);$$

$$\omega_{r+2}(h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |y^{(r+2)}(x) - y^{(r+2)}(x_1)|.$$

1. Die Definition der Spline-Funktion

Definition:

$$(2) \quad S_\Delta(x) := \begin{cases} S_0(x) & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_k(x) & \text{für } x_k \leq x \leq x_{k+1} \end{cases}$$

$$(k = 1; 2; \dots; n-1)$$

wo

$$S_0(x) := y_0 + y'_0 \cdot (x - x_0) + \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(x_0; y_0; y'_0)}{(j+2)!} \cdot (x - x_0)^{j+2}$$

$$S_k(x) := S_{k-1}(x_k) + S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) +$$

$$+ \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2}.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß

$$S_{k-1}(x_k) = S_k(x_k),$$

$$S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k),$$

das heißt $S_A(x) \in C^1[0; 1]$.

2. Probleme der Konvergenz

Das Ziel der Untersuchungen ist die Approximation der Lösung des Cauchy-Problems mit Hilfe der Spline-Funktion. Außerdem werden wir zeigen, daß die Spline-Funktion $S_A(x)$ Lösung des Cauchy-Problems ist, wenn $n \rightarrow \infty$ (das heißt $h \rightarrow 0$).

Zum Beweis benutzen wir oft die nachstehenden Taylor-Formeln, die sich aus der Bedingung $y(x) \in C^{r+2}[0; 1]$ ergeben:

$$y(x) = y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y'_k)}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} +$$

$$+ \frac{y^{(r+2)}(\xi_{0;k})}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2},$$

$$y'(x) = y'_k + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y'_k)}{(j+1)!} \cdot (x - x_k)^{j+1} + \frac{y^{(r+2)}(\xi_{1;k})}{(r+1)!} \cdot (x - x_k)^{r+1},$$

$$y^{(2+q)}(x) = \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{f^{(q+j)}(x_k; y_k; y'_k)}{j!} \cdot (x - x_k)^j + \frac{y^{(r+2)}(\xi_{q+2;k})}{(r-q)!} \cdot (x - x_k)^{r-q}$$

$$x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

$$x_k < \xi_{q+2;k} < x$$

$$(k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$(q = 0; 1; 2; \dots; r-1).$$

Definition:

$$e_k^{(q)} := |y^{(q)}(x_k) - S_k^{(q)}(x_k)|; \quad (k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$$

$$e_n^{(q)} := |y^{(q)}(x_n) - S_{n-1}^{(q)}(x_n)|; \quad (q = 0; 1; 2; \dots; r+2).$$

Lemma 2.1.

$$e_{k+1} \leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot h \cdot e'_k + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$.

Beweis. Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ($k = 1; 2; \dots; n-2$). Dann

$$\begin{aligned}
 |y(x) - S_k(x)| &\leq \left| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; y_k; y'_k)}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} + \right. \\
 &+ \frac{y^{(r+2)}(\xi_{0;k})}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2} - S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - \\
 &- \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))}{(j+2)!} \cdot (x - x_k)^{j+2} - \\
 &- \left. \frac{f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))}{(r+2)!} \cdot (x - x_k)^{r+2} \right| \leq e_k + e'_k \cdot h + \\
 &+ M \cdot \{e_k + e'_k\} \cdot \left\{ \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \right\} + \\
 &+ \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} |y^{(r+2)}(\xi_{0;k}) - y^{(r+2)}(x_k)| + \\
 &+ \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot |f^{(r)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq \\
 &\leq e_k \cdot \{1 + C_1 \cdot h^2\} + C_2 e'_k \cdot h + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h).
 \end{aligned}$$

Bei $x = x_{k+1}$

$$\begin{aligned}
 |y(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})| &= |y(x_{k+1}) - S_{k+1}(x_{k+1})| = \\
 &= e_{k+1} \leq e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot e'_k \cdot h + \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \cdot \omega_{r+2}(h).
 \end{aligned}$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ und $k = n-1$ ähnlicherweise durchgeführt werden.

Lemma 2.2.

$$e'_{k+1} \leq e_k \cdot L \cdot h + e'_k \cdot (1 + L \cdot h) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für ($k = 0; 1; 2; \dots; n-1$), wo L eine Konstante ist.

Beweis. Den Beweis kann man ähnlicherweise durchführen, wie beim Lemma 2.1.

Lemma 2.3.

$$e'_{k+1} \leq C_3 e_{r_0} + C_4 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für ($k = 0; 1; 2; \dots; n-1$), wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}$; und $0 \leq r_0 \leq k$.

Beweis. Wenden wir das Lemma 2.2. mehrmal an, dann bekommen wir folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
 e'_{k+1} &\leq e_k \cdot L \cdot h + e'_k \cdot (1 + L \cdot h) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h), \\
 e'_k \cdot (1 + L \cdot h) &\leq e_{k-1} \cdot L \cdot h \cdot (1 + L \cdot h) + e'_{k-1} \cdot (1 + L \cdot h)^2 + \\
 &\quad + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + L \cdot h), \\
 e'_{k-1} \cdot (1 + L \cdot h)^2 &\leq e_{k-2} \cdot L \cdot h \cdot (1 + L \cdot h)^2 + e'_{k-2} \cdot (1 + L \cdot h)^3 + \\
 &\quad + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + L \cdot h)^2, \\
 &\quad \vdots \\
 e'_1 \cdot (1 + L \cdot h)^k &\leq e_0 \cdot L \cdot h \cdot (1 + L \cdot h)^k + e'_0 \cdot (1 + L \cdot h)^{k+1} + \\
 &\quad + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + L \cdot h)^k.
 \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 e'_{k+1} &\leq L \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k e_j \cdot (1 + L \cdot h)^{k-j} + e'_0 \cdot (1 + L \cdot h)^{k+1} + \\
 &\quad + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \sum_{j=0}^k (1 + L \cdot h)^j, \\
 e'_{k+1} &\leq L \cdot h \cdot e_{r_0} \cdot \frac{(1 + L \cdot h)^{k+1} - 1}{L \cdot h} + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \frac{(1 + L \cdot h)^{k+1} - 1}{L \cdot h},
 \end{aligned}$$

wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}$ und $0 \leq r_0 \leq k$ ist.

Auf Grund der Ungleichung

$$(1 + L \cdot h)^{k+1} = \left(1 + L \cdot \frac{1}{n}\right)^{k+1} \leq \left(1 + \frac{L}{n}\right)^n \leq e^L = \text{const}$$

bekommen wir das Lemma 2.3.

Lemma 2.4.

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_8 \cdot h) + C_5 \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$, wo $e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}$ und $0 \leq r_0 \leq k$.

Beweis. Wenden wir die Lemmata 2.1. und 2.3. an, dann bekommen wir Lemma 2.4.

Lemma 2.5.

$$e'_{r_0} \leq C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e'_{r_0} = \max \{e'_0; e'_1; e'_2; \dots; e'_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und

$$e_{r_1} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1.$$

Beweis. Lemma 2.5. ergibt sich aus Lemma 2.3.

Lemma 2.6.

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_0} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und

$$e_{r_1} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1.$$

Beweis. Aus Lemma 2.1. folgt

$$\begin{aligned} e_{r_0} &\leq e_{r_0-1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot e'_{r_0-1} + C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h) \leq \\ &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot e'_{r_0-1} + C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.5. folgt

$$e'_{r_0-1} \leq C_7 \cdot e_{r_1}^* + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_1}^* = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-2}\}$; $0 \leq r_1^* \leq r_0 - 2$.

Wenn wir die Ungleichung $e_{r_1}^* \leq e_{r_1}$ anwenden, bekommen wir:

$$e'_{r_0-1} \leq C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} e_{r_0} &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h^2) + C_{12} \cdot h \cdot \{C_7 \cdot e_{r_1} + C_8 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)\} + \\ &+ C_{13} \cdot h^{r+2} \cdot \omega_{r+2}(h) \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h). \end{aligned}$$

SATZ 2.1.

$$e_{k+1} \leq C_{14} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h) \quad \text{für } (k = 0; 1; 2; \dots; n-1).$$

Beweis. Laut Lemma 2.4.:

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_6 \cdot h) + C_5 \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_0} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_k\}$; $0 \leq r_0 \leq k$ und $(k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$.
Laut Lemma 2.6.:

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_1} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_0-1}\}$; $0 \leq r_1 \leq r_0 - 1$,

$$e_{r_1} \leq e_{r_2} \cdot (1 + C_1^* \cdot h) + C_1^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_2} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_1-1}\}$; $0 \leq r_2 \leq r_1 - 1$,

$$e_{r_2} \leq e_{r_3} \cdot (1 + C_2^* \cdot h) + C_2^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_s} = \max \{e_0; e_1; e_2; \dots; e_{r_2-1}\}$; $0 \leq r_3 \leq r_2 - 1$, und so weiter, endlich

$$e_{r_s} \leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_s^* \cdot h) + C_s^{**} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h),$$

wo $e_{r_s} = \max \{e_0; e_1\}$; $0 \leq r_s \leq 1$, und $e_{r_{s+1}} = \max \{e_0\} = e_0 = 0$.

Es sei $C_{11} = \max \{C_6; C_9; C_1^*; C_2^*; \dots; C_s^*\}$ und $C_{12} = \max \{C_5; C_{10}; C_1^{**}; C_2^{**}; \dots; C_s^{**}\}$.

Dann erhalten wir die folgenden Ungleichungen (ähnlich wie im Beweis des Lemmas 2.3.):

$$\begin{aligned} e_{k+1} &\leq e_{r_0} \cdot (1 + C_{11} \cdot h) + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h), \\ e_{r_0} \cdot (1 + C_{11} \cdot h) &\leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2 + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h), \\ e_{r_1} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2 &\leq e_{r_2} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^3 + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^2, \\ &\vdots \\ e_{r_s} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+1} &\leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+1}. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &\leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} + C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \sum_{j=0}^{s+1} (1 + C_{11} \cdot h)^j, \\ e_{k+1} &\leq C_{12} \cdot h^{r+1} \cdot \omega_{r+2}(h) \cdot \frac{(1 + C_{11} \cdot h)^{s+2} - 1}{C_{11} \cdot h}, \\ e_{k+1} &\leq C_{14} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h). \end{aligned}$$

SATZ 2.2.

$$e'_{k+1} \leq C_{15} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \dots; n-1)$.

Beweis. Aus Lemma 2.3. und SATZ 2.1. folgt SATZ 2.2.

SATZ 2.3.

$$e_k^{(2+q)} \leq C_{16;q} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h)$$

für $(k = 0; 1; 2; \dots; n)$, $(q = 0; 1; 2; \dots; r)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} e_k^{(2+q)} &= |f^{(q)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(q)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq \\ &\leq M \cdot \{e_k + e'_k\} \leq C_{16;q} \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h). \end{aligned}$$

SATZ 2.4.

$$\begin{aligned} |y^{(q)}(x) - S_{\Delta}^{(q)}(x)| &\leq K_q \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h); \quad (q = 0; 1; 2), \\ |y^{(2+q)}(x) - S_{\Delta}^{(2+q)}(x)| &\leq K_{2+q} \cdot h^{r-q} \cdot \omega_{r+2}(h); \quad (q = 1; 2; \dots; r). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ($k = 0; 1; 2; \dots; n-1$). Dann

$$\begin{aligned}
 & |y^{(2+q)}(x) - S_{\Delta}^{(2+q)}(x)| \leq \\
 & \leq \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{h^j}{j!} \cdot |f^{(q+j)}(x_k; y_k; y'_k) - f^{(q+j)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| + \\
 & \quad + \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(2+r)}(\xi_{q+2; k}) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq \\
 & \leq \sum_{j=0}^{r-1-q} \frac{h^j}{j!} \cdot M(e_k + e'_k) + \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(r+2)}(\xi_{q+2; k}) - y^{(r+2)}(x_k)| + \\
 & \quad + \frac{h^{r-q}}{(r-q)!} \cdot |y^{(r+2)}(x_k) - f^{(r)}(x_k; S_{k-1}(x_k); S'_{k-1}(x_k))| \leq \\
 & \leq K_{2+q} \cdot h^{r-q} \cdot \omega_{r+2}(h) \\
 & \quad (q = 0; 1; 2; \dots; r).
 \end{aligned}$$

Der andere Teil des Satzes läßt sich mit Hilfe der Sätze 2.1. und 2.2. beweisen.

Wir werden jetzt zeigen, daß die durch (2) definierte Spline-Funktion das Cauchy-Problem befriedigt, wenn $n \rightarrow \infty$ (das heißt $h \rightarrow 0$).

SATZ 2.5. Es sei $S_{\Delta}(x)$ die durch (2) definierte Spline-Funktion und $S_{\Delta}^*(x) := f((x; S_{\Delta}(x); S'_{\Delta}(x)))$, ferner $f^{(q)}(x; y; y') \in \text{Lip}_M 1$; ($q = 0; 1; 2; \dots; r$). Dann

$$|S'_{\Delta}(x) - S_{\Delta}^*(x)| \leq K_3^* \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).$$

Beweis. Es sei $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ($k = 0; 1; 2; \dots; n-1$). Dann

$$\begin{aligned}
 |S'_{\Delta}(x) - S_{\Delta}^*(x)| &= |S''_k(x) - f(x; S_k(x); S'_k(x))| \leq |S''_k(x) - y''(x)| + \\
 & \quad + |f(x; y; y') - f(x; S_k(x); S'_k(x))| \leq K_2 \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h) + \\
 & \quad + M\{|y(x) - S_k(x)| + |y'(x) - S'_k(x)|\} \leq K_3^* \cdot h^r \cdot \omega_{r+2}(h).
 \end{aligned}$$

Hier möchte ich Herrn Prof. Dr. J. Balázs [2] für seine wertvolle Hilfe meinen Dank ausdrücken.

REFERAT

- [1] J. Györfvári: Spline-Funktion und das Cauchy-Problem; Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1981, p. 344 – 348.
- [2] J. Balázs: Privatkommunikation (Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Budapest)