EINE SPEZIELLE SPLINE-FUNKTION UND DAS CAUCHY-PROBLEM

JÁNOS GYŐRVÁRI

Universität für Chemische Industrie Veszprém Lehrstuhl für Mathematik
H-8201 Veszprém, Pf. 158.

(Eingegangen am 12. Januar 1982)

T. Fawzy definierte in [1] und [2] eine Klasse von Spline-Funktionen und mit deren Hilfe hat er die numerische Lösung des mit $y' = f(x; y)$; $x \in [0; 1]$, $y(0) = y_0$ gegebenen Cauchy-Problems gegeben. Der Verfasser gab mit der in [3] definierten Spline-Funktion die numerische Lösung des $y'' = f(x, y, y')$; $x \in [a, b]$, $y(a) = y_0$; $y'(a) = y'_0$ Cauchy-Problems. In der vorliegenden Arbeit definieren wir eine Spline-Funktion und mit deren Hilfe approximieren wir die Lösung des Cauchy-Problems. Wir werden zeigen, dass diese Spline-Funktion eine bessere Näherung gibt, als die in [3] definierte Spline-Funktion.

1. Die Definition der Spline-Funktion

Betrachten wir das Cauchy-Problem:

$$y'' = f(x, y, y'); \quad x \in [a, b] \tag{1}$$
$$y(a) = y_0; \, y'(a) = y'_0 .$$

Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung im Intervall $[a, b]$, wenn die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Funktion $f(x, y, y')$ ist stetig
   (d.h. $y''(x) \in C^0 [a; b]$)
2. Die Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, d.h.
   $$|f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| \leq L \cdot (|y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|)$$

wo y_1, y_2, z_1, z_2 beliebige Variablen sind.

Es sei

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}; \quad h = \frac{b-a}{n};$$

$$y(x_k) = y_k; \quad y'(x_k) = y'_k; \quad y''(x_k) = y''_k \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n)$$

Definition.

$$(2)\qquad S_\Delta(x):=\begin{cases} S_0(x) & \text{für} \quad x_0\le x\le x_1 \\ S_k(x) & \text{für} \quad x_k\le x\le x_{k+1} \qquad (k=1;\,2;\,\ldots;\,n-1)\end{cases}$$

wo

$$S_0(x):=y_0+y_0'\cdot(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} f\Big[u,\, y_0+y_0'\cdot(u-x_0)+$$

$$+\frac{f(x_0,y_0,y_0')}{2}\cdot(u-x_0)^2,\; y_0'+f(x_0,y_0,y_0')\cdot(u-x_0)\Big]\,du\,dt,$$

$$S_k(x):=S_{k-1}(x_k)+S_{k-1}'(x_k)\cdot(x-x_k)+$$

$$+\int_{x_k}^{x}\int_{x_k}^{t} f[u,\,h_k(u),\,h_k'(u)]\,du\,dt$$

und

$$h_k(x):=S_{k-1}(x_k)+S_{k-1}'(x_k)\cdot(x-x_k)+$$

$$+\frac{f[x_k,\,S_{k-1}(x_k),\,S_{k-1}'(x_k)]}{2}\cdot(x-x_k)^2.\ \boxtimes$$

Es ist leicht zu beweisen, dass

$$S_{k-1}(x_k)=S_k(x_k)\qquad (k=1;2;\ldots;n-1)$$

$$S_{k-1}'(x_k)=S_k'(x_k)\qquad (k=1;2;\ldots;n-1)$$

das heisst $S_\Delta(x)\in C^1[a;b]$.

2. Problemen der Konvergenz

Das Ziel der Untersuchungen ist die Approximation der Lösung des Cauchy-Problems mit Hilfe der durch (2) definierten Spline-Funktion. Ausserdem wird die Ordnung der Approximation untersucht.

Zum Beweis benutzen wir oft die nachstehenden Taylor-Formeln, die sich aus der Bedingung $y(x)\in C^2\,[a;b]$ ergeben:

$$y(x)=y_k+y_k'\cdot(x-x_k)+\frac{y''(\xi_k)}{2}\cdot(x-x_k)^2$$

wenn

$$x_k<\xi_k<x\le x_{k+1}\qquad (k=0;\,1;\,2;\,\ldots;\,n-1)$$

$$y'(x)=y_k'+y''(\eta_k)\cdot(x-x_k)$$

wenn

$$x_k<\eta_k<x\le x_{k+1}\qquad (k=0;\,1;\,2;\,\ldots;\,n-1)$$

Daneben benutzen wir die nachstehenden Zusammenhänge, die sich aus der Integrierung der (1) Differenzialgleichung ergeben:

$$y'(x) = y'_k + \int_{x_k}^{x} f[t, y(t), y'(t)]\, dt$$

$$y(x) = y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \int_{x_k}^{x} \int_{x_k}^{t} f[u, y(u), y'(u)]\, du\, dt$$

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1)$$

Definition.

$$\begin{aligned}
e_k &:= |y_k - S_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)\\
e'_k &:= |y'_k - S'_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)\\
e''_k &:= |y''_k - S''_k(x_k)| \quad (k = 0; 1; 2; \ldots; n-1)\\
e_n &:= |y_n - S_{n-1}(x_n)|\\
e'_n &:= |y'_n - S'_{n-1}(x_n)|\\
e''_n &:= |y''_n - S''_{n-1}(x_n)| \,. \ \boxtimes
\end{aligned}$$

Lemma 2.1.

Es sei

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1)$$

Dann ist

$$|y(x) - h_k(x)| \leq e_k + e'_k \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (x - x_k)^2 + \frac{L}{2} \cdot (x - x_k)^2 \cdot (e_k + e'_k)\,,$$

$$|y'(x) - h'_k(x)| \leq e'_k + \omega_2(h) \cdot (x - x_k) + L \cdot (x - x_k) \cdot (e_k + e'_k)\,,$$

wo $y(x)$ die Lösung des (1) Cauchy-Problems ist, L ist die Lipschitz-Konstante und

$$\omega_2(h) = \sup_{|x - x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)| \,. \ \boxtimes$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|y(x) - h_k(x)| &= \Big| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \frac{y''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2 - \\
&- S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - \frac{f[x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k)]}{2} \cdot (x - x_k)^2 \Big| \leq \\
&\leq |y_k - S_k(x_k)| + |y'_k - S'_k(x_k)| \cdot (x - x_k) + \\
&\frac{1}{2} \cdot |y''(\xi_k) - y''(x_k) + f(x_k, y_k, y'_k) - f[x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k)]| \cdot (x - x_k)^2 \leq \\
&\leq e_k + e'_k \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (x - x_k)^2 + \frac{1}{2} \cdot (x - x_k)^2 \cdot L \cdot (e_k + e'_k).
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung ist ähnlicherweise zu beweisen. $\boxtimes$

Lemma 2.2.

$$e_{k+1} \le e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + C_2 \cdot e'_k \cdot h + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h)$$

$$e'_{k+1} \le L \cdot e_k \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) + e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) + C_6 \cdot h^2 \cdot \omega_2(h)$$

$$(k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1),$$

wo C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6 *pozitive Konstanten sind.* $\boxtimes$

Beweis.

Es sei

$$x_k \le x \le x_{k+1} \quad (k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1).$$

Dannt ist:

$$|y(x) - S_k(x)| = \Bigg| y_k + y'_k \cdot (x - x_k) + \int_{x_k}^{x} \int_{x_k}^{t} f[u, y(u), y'(u)]\, du\, dt -$$

$$- S_{k-1}(x_k) - S'_{k-1}(x_k) \cdot (x - x_k) - \int_{x_k}^{x} \int_{x_k}^{t} f[u, h_k(u), h'_k(u)]\, du\, dt \Bigg| \le$$

$$\le e_k + e'_k \cdot h + L \cdot \int_{x_k}^{x} \int_{x_k}^{t} \{|y(u) - h_k(u)| + |y'(u) - h'_k(u)|\}\, du\, dt \le$$

$$\le e_k + e'_k \cdot h + L \cdot \int_{x_k}^{x} \int_{x_k}^{t} \Big\{ e_k + e'_k \cdot (u - x_k) + \frac{1}{2} \cdot \omega_2(h) \cdot (u - x_k)^2 +$$

$$+ \frac{L}{2} \cdot (e_k + e'_k) \cdot (u - x_k)^2 + e'_k + \omega_2(h) \cdot (u - x_k) + L \cdot (e_k + e'_k) \cdot (u - x_k) \Big\}\, du\, dt \le$$

$$\le e_k \cdot \left(1 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{24} \cdot h^4 + \frac{L^2}{6} \cdot h^2\right) +$$

$$+ e'_k \cdot \left(h + \frac{L}{6} \cdot h^3 + \frac{L^2}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{2} \cdot h^2 + \frac{L^2}{6} \cdot h^3\right) + \omega_2(h) \cdot \left(\frac{L}{24} \cdot h^4 + \frac{L}{6} \cdot h^3\right).$$

Bei

$$x = x_{k+1} \quad (k = 1;\ 2;\ \ldots;\ n-2)$$

$$|y(x_{k+1}) - S_k(x_{k+1})| = |y(x_{k+1}) - S_{k+1}(x_{k+1})| = e_{k+1} \le$$

$$\le e_k \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + e'_k \cdot h \cdot C_2 + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h).$$

Bei

$$x = x_n$$

$$|y(x_n) - S_{n-1}(x_n)| = e_n \le e_{n-1} \cdot (1 + C_1 \cdot h^2) + e'_{n-1} \cdot h \cdot C_2 + C_3 \cdot h^3 \cdot \omega_2(h).$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ und für die zweite Ungleichung ähnlicherweise durchgeführt werden. $\boxtimes$

Lemma 2.3.

$$e'_{k+1} \leq C_7 \cdot e_{r_0} \cdot (1 + C_4 \cdot h) + C_8 \cdot h \cdot \omega_2(h)$$
$$(k = 0; 1; 2; \ldots; n-1),$$

wo C_7; C_8 pozitive Konstanten sind,

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; \ldots; e_k\} \quad \textit{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k. \ \boxtimes$$

Beweis.

Wenden wir die Lemma 2.2. mehrmals an, dann bekommen wir die folgenden Ungleichungen:

$$e'_{k+1} \leq L \cdot e_k \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) + e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2$$

$$e'_k \cdot (1 + C_5 \cdot h) \leq L \cdot e_{k-1} \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h) + e'_{k-1} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 + \\ + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h)$$

$$e'_{k-1} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 \leq L \cdot e_{k-2} \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2 + e'_{k-2} \cdot (1 + C_5 \cdot h)^3 + \\ + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^2$$

$$\vdots$$

$$e'_1 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k \leq L \cdot e_0 \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k + e'_0 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k+1} + \\ + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^k.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$e'_{k+1} \leq L \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot \sum_{j=0}^{k} e_j \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k-j} + e'_0 \cdot (1 + C_5 \cdot h)^{k+1} + \\ + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot \sum_{j=0}^{k} (1 + C_5 \cdot h)^j$$

$$e'_{k+1} \leq L \cdot h \cdot (1 + C_4 \cdot h) \cdot e_{r_0} \cdot \frac{(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} - 1}{C_5 \cdot h} + \\ + C_6 \cdot \omega_2(h) \cdot h^2 \cdot \frac{(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} - 1}{C_5 \cdot h},$$

wo

$$e_{r_0} = \max\{e_0; e_1; e_2; \ldots; e_k\} \quad \text{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k.$$

Auf Grund der Ungleichung

$$(1 + C_5 \cdot h)^{k+1} = \left(1 + C_5 \cdot \frac{b-a}{n}\right)^{k+1} \leq \left[1 + \frac{C_5 \cdot (b-a)}{n}\right]^n \leq e^{C_5 \cdot (b-a)} = \text{const}$$

bekommen wir die Lemma 2.3. $\boxtimes$

Lemma 2.4.

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h)$$
$$(k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1),$$

wo C_9; C_{10} *pozitive Konstanten sind,*

$$e_{r_0} = \max\{e_0;\ e_1;\ e_2;\ \ldots;\ e_k\} \quad \textit{und} \quad 0 \leq r_0 \leq k\,. \ \boxtimes$$

Beweis.

Wenden wir die Lemmata 2.2. und 2.3. an, dann bekommen wir Lemma 2.4. $\boxtimes$

Lemma 2.5.

$$e'_{r_0} \leq C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

wo C_{11}; C_{12}; C_{13} *positive Konstanten sind,*

$$e'_{r_0} = \max\{e'_0;\ e'_1;\ e'_2;\ \ldots;\ e'_k\}; \qquad 0 \leq r_0 \leq k\,,$$
$$e_{r_1} = \max\{e_0;\ e_1;\ e_2;\ \ldots;\ e_{r_0-1}\}; \qquad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1\,. \ \boxtimes$$

Beweis.

Lemma 2.5. ergibt sich aus Lemma 2.3. $\boxtimes$

Lemma 2.6.

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h)\,,$$

wo C_{14}, C_{15} *positive Konstanten sind,*

$$e_{r_0} = \max\{e_0;\ e_1;\ e_2;\ \ldots;\ e_k\}; \quad 0 \leq r_0 \leq k\,,$$
$$e_{r_1} = \max\{e_0;\ e_1;\ e_2;\ \ldots;\ e_{r_0-1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1\,. \ \boxtimes$$

Beweis.

Aus Lemma 2.2. folgt

$$e_{r_0} \leq e_{r_0-1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) + C_{17} \cdot e'_{r_0-1} \cdot h + C_{18} \cdot h^3 \cdot \omega_2(h) \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) +$$
$$+ C_{17} \cdot e'_{r_0-1} \cdot h + C_{18} \cdot h^3 \omega_2(h).$$

Aus Lemma 2.5. folgt

$$e'_{r_0-1} \leq C_{11} \cdot e_{r_1^*} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)\,,$$

wo

$$e_{r_1^*} = \max\{e_0;\ e_1;\ e_2;\ \ldots;\ e_{r_0-2}\}\,.$$

Wenn wir die Ungleichung $e_{r_1^*} \leq e_{r_1}$ anwenden, bekommen wir:

$$e'_{r_0-1} \leq C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)\,.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung bekommt man:

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{16} \cdot h^2) + C_{17} \cdot h \cdot \{C_{11} \cdot e_{r_1} \cdot (1 + C_{12} \cdot h) + C_{13} \cdot h \cdot \omega_2(h)\} + \\ + C_{18} \cdot h^3 \cdot \omega_2(h),$$

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h). \boxtimes$$

SATZ 2.1.

$$e_{k+1} \leq C_{19} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1),$$

wo

$$\omega_2(h) = \sup_{|x - x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)|. \boxtimes$$

Beweis.

Laut Lemma 2.4.:

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_9 \cdot h) + C_{10} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_0} = \max\{e_0;\ e_1;\ \ldots;\ e_k\}; \quad 0 \leq r_0 \leq k,$$

und

$$(k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1).$$

Laut Lemma 2.6.

$$e_{r_0} \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{14} \cdot h) + C_{15} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_1} = \max\{e_0;\ e_1;\ \ldots;\ e_{r_0 - 1}\}; \quad 0 \leq r_1 \leq r_0 - 1,$$

$$e_{r_1} \leq e_{r_2} \cdot (1 + C_1^* \cdot h) + C_1^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_2} = \max\{e_0;\ e_1;\ \ldots;\ e_{r_1 - 1}\}; \quad 0 \leq r_2 \leq r_1 - 1,$$

$$e_{r_2} \leq e_{r_3} \cdot (1 + C_2^* \cdot h) + C_2^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_3} = \max\{e_0;\ e_1;\ \ldots;\ e_{r_2 - 1}\}; \quad 0 \leq r_3 \leq r_2 - 1$$

und so weiter, endlich ergibt sich

$$e_{r_s} \leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_s^* \cdot h) + C_s^{**} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

wo

$$e_{r_s} = \max\{e_0;\ e_1\} \quad \text{und} \quad e_{r_{s+1}} = \max\{e_0\} = 0.$$

Es sei

$$C_{20} = \max\{C_9;\, C_{14};\, C_1^*;\, C_2^*;\, \ldots;\, C_s^*\}$$

und

$$C_{21} = \max\{C_{10};\, C_{15};\, C_1^{**};\, C_2^{**};\, \ldots;\, C_s^{**}\}.$$

Dann bekommen wir die folgenden Ungleichungen (ähnlicherweise, wie im Beweis der Lemma 2.3.):

$$e_{k+1} \leq e_{r_0} \cdot (1 + C_{20} \cdot h) + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h),$$

$$e_{r_0} \cdot (1 + C_{20} \cdot h) \leq e_{r_1} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2 + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h),$$

$$e_{r_1} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2 \leq e_{r_2} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^3 + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^2,$$

$$\vdots$$

$$e_{r_s} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+1} \leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+1}.$$

Addieren wir diese Ungleichungen, bekommen wir:

$$e_{k+1} \leq e_{r_{s+1}} \cdot (1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} + C_{21} \cdot h^2 \cdot \omega_2(h) \cdot \frac{(1 + C_{20} \cdot h)^{s+2} - 1}{C_{20} \cdot h},$$

$$e_{k+1} \leq C_{19} \cdot h \cdot \omega_2(h). \boxtimes$$

SATZ 2.2.

$$e'_{k+1} \leq C_{22} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0;\, 1;\, 2;\, \ldots;\, n-1). \boxtimes$$

Beweis.

Wenden wir die Lemma 2.3. und SATZ 2.1. an, dann bekommen wir SATZ 2.2. $\boxtimes$

SATZ 2.3.

$$e''_k \leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h)$$

für

$$(k = 0;\, 1;\, 2;\, \ldots;\, n). \boxtimes$$

Beweis.

Für $k = 1; 2; \ldots; n-1$

$$\begin{aligned} e''_k &= |y''(x_k) - S''_k(x_k)| = |y''_k(x_k) - f(x_k, h_k(x_k), h'_k(x_k))| = \\ &= |y''(x_k) - f[x_k, S_{k-1}(x_k), S'_{k-1}(x_k)]| = \\ &= |f(x_k, y_k, y'_k) - f[x_k, S_k(x_k), S'_k(x_k)]| \leq \\ &\leq L \cdot \{|y_k - S_k(x_k)| + |y'_k - S'_k(x_k)|\} \leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h). \end{aligned}$$

Für $k = n$:

$$e''_n = |y''(x_n) - S''_{n-1}(x_n)| = |y''_n - f[x_n, h_{n-1}(x_n), h'_{n-1}(x_n)]| =$$
$$= |f(x_n, y_n, y'_n) - f[x_n, h_{n-1}(x_n), h'_{n-1}(x_n)]| \leq$$
$$\leq L \cdot \{|y_n - h_{n-1}(x_n)| + |y'_n - h'_{n-1}(x_n)|\} =$$
$$= L \cdot \Bigg\{ \Bigg| y_{n-1} + y'_{n-1} \cdot h + \frac{y''(\xi_{n-1})}{2} \cdot h^2 - S_{n-1}(x_{n-1}) - S'_{n-1}(x_{n-1}) \cdot h -$$
$$- \frac{f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S'_{n-1}(x_{n-1})]}{2} \cdot h^2 \Bigg| +$$
$$+ \Big| y'_{n-1} + y''(\eta_{n-1}) \cdot h - S'_{n-1}(x_{n-1}) -$$
$$- f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S'_{n-1}(x_{n-1})]\, h \cdot \Big| \Bigg\} \leq$$
$$\leq L \cdot \Bigg\{ e_{n-1} + e'_{n-1} \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot |y''(\xi_{n-1}) - y''_{n-1}| + \frac{h^2}{2} \cdot |f(x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1}) -$$
$$- f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S'_{n-1}(x_{n-1})]| + e'_{n-1} + h \cdot |y''(\eta_{n-1}) - y''(x_{n-1})| +$$
$$+ h \cdot |f(x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1}) - f[x_{n-1}, S_{n-1}(x_{n-1}), S'_{n-1}(x_{n-1})]| \Bigg\} \leq$$
$$\leq L \cdot \Bigg\{ e_{n-1} + e'_{n-1} \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot \omega_2(h) + \frac{h^2}{2} \cdot L \cdot [|y_{n-1} - S_{n-1}(x_{n-1})| +$$
$$+ |y'_{n-1} - S'_{n-1}(x_{n-1})|] + e'_{n-1} + h \cdot \omega_2(h) +$$
$$+ h \cdot L \cdot [|y_{n-1} - S_{n-1}(x_{n-1})| + |y'_{n-1} - S'_{n-1}(x_{n-1})|] \Bigg\} \leq$$
$$\leq C_{23} \cdot h \cdot \omega_2(h) . \boxtimes$$

SATZ 2.4.

$$|y(x) - S_\Delta(x)| \leq K \cdot h \cdot \omega_2(h),$$
$$|y'(x) - S'_\Delta(x)| \leq K_1 \cdot h \cdot \omega_2(h),$$
$$|y''(x) - S''_\Delta(x)| \leq K_2 \cdot h \cdot \omega_2(h),$$

wo $y(x)$ die Lösung des (1) Cauchy-Problems, $S_\Delta(x)$ die in (2) definierte Spline-Funktion sind, und K_1; K_2; K_3 die Konstanten sind und

$$\omega_2(h) = \sup_{|x-x_1| \leq h} |y''(x) - y''(x_1)| . \boxtimes$$

Beweis.

Wenden wir die Sätze 2.1. und 2.2., Lemma 2.1. und die Ungleichungen

$$|y(x)-S_k(x)| \le e_k \cdot \left(1+\frac{L}{2}\cdot h^2+\frac{L^2}{24}\cdot h^4+\frac{L^2}{6}\cdot h^3\right)+$$
$$+e_k' \cdot \left(h+\frac{L}{6}\cdot h^3+\frac{L^3}{24}\cdot h^4+\frac{L}{2}\cdot h^2+\frac{L^2}{6}\cdot h^3\right)+$$
$$+\omega_2(h)\cdot\left(\frac{L}{24}\cdot h^4+\frac{L}{6}\cdot h^3\right),$$
$$|y'(x)-S_k'(x)| \le e_k \cdot \left(L\cdot h+\frac{L^2}{6}\cdot h^3+\frac{L^2}{2}\cdot h^2\right)+$$
$$+e_k' \cdot \left(1+\frac{L}{2}\cdot h^2+\frac{L^3}{6}\cdot h^3+L\cdot h+\frac{L^2}{2}\cdot h^2\right)+\omega_2(h)\cdot\left(\frac{L}{6}\cdot h^3+\frac{L}{2}\cdot h^2\right),$$
$$|y''(x)-S_k''(x)| \le L\cdot\{|y(x)-h_k(x)|+|y'(x)-h_k'(x)|\}$$

an, dann bekommen wir SATZ 2.4. ☒

Wir werden im SATZ 2.5. zeigen, dass die durch (2) definierte Spline-Funktion die Differentialgleichung $y''=f(x, y, y')$ befriedigt, wenn $n \to \infty$ (das heisst $h \to 0$).

SATZ 2.5.

Es sei $S_\Delta(x)$ *die durch* (2) *definierte Spline-Funktion* und

$$S_\Delta^*(x) := f(x, S_\Delta(x), S_\Delta'(x)),$$

ferner

$$f(x, y, y') \in \mathrm{Lip}_L\, 1 .$$

Dann ist

$$|S''(x)-S_\Delta^*(x)| \le K_3\cdot h\cdot \omega_2(h)$$

wo

$$\omega_2(h) = \sup_{|x-x_1|\le h} |y''(x)-y''(x_1)| . \quad ☒$$

Beweis.

Wenden wir den SATZ 2.4. und die Bedingung $f \in \mathrm{Lip}_L\, 1$ an, dann bekommen wir den SATZ 2.5.

Es sei

$$x_k \le x \le x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dann ist

$$|S''(x)-S_\Delta^*(x)| = |S_k''(x)-f[x, S_k(x), S_k'(x)]| \leq$$
$$\leq |S_k''(x)-y''(x)| + |f[x, y(x), y'(x)]-f[x, S_k(x), S_k'(x)]| \leq$$
$$\leq K_2 \cdot h \cdot \omega_2(h) + L \cdot \{|y(x)-S_k(x)| + |y'(x)-S_k'(x)|\} \leq K_3 \cdot h \cdot \omega_2(h) .$$

Der Beweis kann auch für $k = 0$ ähnlicherweise durchgeführt werden. $\boxed{\times}$

REFERENCES

[1] *T. Fawzy:* Spline Functions and Cauchy Problems, III.; Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Computatorica I. (1978), pp. 35–45.
[2] *T. Fawzy:* Spline Functions and Cauchy Problems VII.; Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math. XXIV. (1981), pp. 57–62.
[3] *J. Győrvári:* Spline-Funktion und die Cauchy–Problem; Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory. Varna 31. 05–6. 06. 1981.