# ОБ ОДНОМЕРНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

А. С. ПОДКОЛЗИН

Москва

*(Поступило 16. 5. 1979)*

Для воспроизведения в однородных структурах различных процессов особый интерес представляют универсальные однородные структуры, которые позволяют моделировать поведение любых однородных структур той же размерности. Такие одноордные структуры были построены для размерности $k \geq 2$ в работах [2,4], где рассматривались также некоторые вопросы алгоритмического характера, связанные с распознаванием универсальности однородных структур; оценивалась сложность взаимного моделирования однородных структур, характеризущихся различными значениями параметров, и приводились примеры простейших двумерных универсальных однородных структур. Вместе с тем, использованные в этих работах конструкции универсальных однородных структур были основаны на вложении в $k$-мерную решетку некоторых сетей автоматов и непригодны в одномерном случае из-за ограниченной пропускной способности одномерной однородной структуры как информационного канала. В настоящей работе показывается, что универсальные однородные структуры существуют также и в одномерном случае, причем устанавливается необходимое и достаточное условие возможности реализации универсальной одномерной однородной структуры итеративной сетью в базисе вида $\{\mathfrak{A}_з, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n\}$, где $\mathfrak{A}_з$ — элемент, реализующий двоичную задержку на один такт; $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ — элементы, реализующие некоторые функции алгебры логики.

## 1. Основные понятия и результаты

Однородной структурой (ОС) называется четверка $\langle Z^k, E_n, V, \varphi\rangle$, где $Z^k$ есть множество $k$-мерных векторов с целыми координатами, называемых ячейками ОС; $E_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — множество состояний, которые может принимать ячейка ОС; $V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$ упорядоченный набор попарно различных ненулевых векторов из $Z^k$, называемый шаблоном соседства ОС и определяющий для каждой ячейки $\alpha$ ее окрестность

$V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$; $\varphi$ есть отображение $(E_n)^h$ в $E_n$, называемое локальной функцией переходов. ОС. Если в момент $t$ состояния ячеек $\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1}$ были равны соответственно $x_0, x_1, \ldots x_{h-1}$, то состояние $\alpha$ в момент $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Пусть состояние ОС (то есть функция, сопоставляющая каждой ячейке ее состояние из $E_n$) в момент $t$ есть $f$; тогда ее состояние в момент $t+1$ есть функция $g$, определяемая равенством:

$$g(\alpha) = \varphi\big(f(\alpha),\ f(\alpha+\alpha_1), \ldots, f(\alpha+\alpha_{h-1})\big).$$

Это равенство определяет также основную функцию переходов $\Phi$: $g = \Phi(f)$. Поведением ОС называется последовательность $\{f_i\}$ ее состояний, такая, что $f_{i+1} = \Phi(f_i)$.

Рассмотрим следующий способ моделирования поведения ОС $\sigma$ посредством поведений ОС $\sigma'$ той же размерности $k$. Выберем натуральный вектор $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_k)$ и разобьем множество ячеек ОС $\sigma'$ на параллелепипеды $P_{\bar{\nu}}$:

$$P_{\bar{\nu}} = \{(x_1, \ldots, x_k)/l_i\,\nu_i \le x_i < l_i(\nu_i+1)\}$$

Очевидно, все $P_{\bar{\nu}}$ содержат по $\prod\limits_{i=1}^{k} l_i$ ячеек и подобны некоторому стандартному параллелепипеду $P$. Пусть $E_n$ и $E_{n'}$ — множества состояний ячейки ОС $\sigma$ и $\sigma'$. Выберем в множестве состояний $P$ (состояния ячеек которого принадлежат множеству $E_{n'}$) $n$-элементное подмножество $M$ и рассмотрим произвольное взаимно-однозначное отображение $\xi: E_n \to M$. Тогда определяется взаино-однозначное отображение $\Theta$ состояний ОС $\sigma$ на подмножество множества состояний ОС $\sigma'$, которое приписывает параллелепипеду $P_{\bar{\nu}}$ состояние, полученное применением $\xi$ к состоянию ячейки $\bar{\nu}$ в ОС $\sigma$. Если натуральное $N$ таково, что для любого поведения $\{f_i\}$ ОС $\sigma$ существует поведение $\{g_i\}$ ОС $\sigma'$, такое, что $g_{N\cdot i} = \Theta(f_i)$, то $\sigma$ называется представимой в $\sigma'$ с замедлением $N \cdot k$-мерная ОС называется универсальной, если любая ОС той же размерности представима в ней с некоторым замедлением.

Имеет место следующая

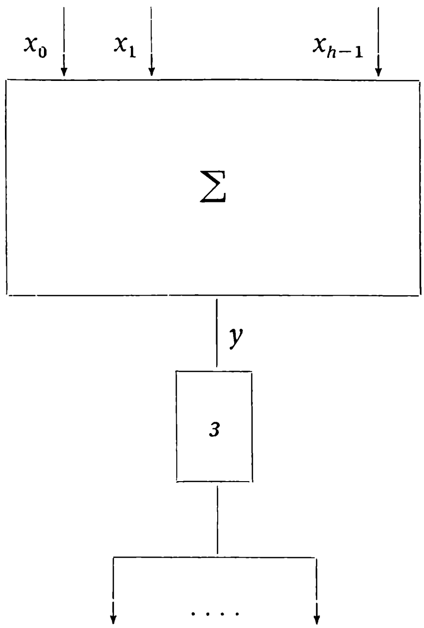
**Теорема 1.** Существует универсальная одномерная ОС с окрестностью ячейки $\alpha$, изображенной на рис. 1.

| | | |
|---|---|---|
| | $\alpha$ | |

*рис. 1.*

Ячейку одномерной ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$ можно реализовать в виде схемы, изображенной на рис. 2.; здесь буквой *з* обозначен элемент двоичной задержки на один такт; $\Sigma$-схема, построенная в некотором базисе элементов, реализующих функции алгебры логики $\psi_1, \ldots, \psi_m$, такая, что

$y = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Систему $S = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ функций алгебры логики назовем универсальной, если из элементов, реализующих функции этой системы, можно построить схема вида рис. 2, задающую универсальную одномерную ОС.




к соседним ячейкам

*рис. 2.*

Чтобы сформулировать критерий универсальности системы $S$, напомним обозначения некоторых замкнутых классов функций алгебры логики (см. [5]). $L_1$ есть класс всех линейных функций, то есть функций $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \pmod 2$ ($c_i \in \{0, 1\}$); $S_6$ есть класс всех функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_m}$, а также 0, 1; $P_6$-класс функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}$, а также 0, 1; $F_4^\infty$ есть класс функпий вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \vee g(x_1, \ldots, x_n)$, и $F_8^\infty$ — класс всех функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$.

**Теорема 2.** Система $S$ функций алгебры логики универсальна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $L_1, S_6, P_6, F_4^\infty, F_8^\infty$.

## 2. Доказательство теоремы 1

Нам понадобятся следующие леммы:

**Лемма 2.1** Если ОС $\sigma_1$ представима в ОС $\sigma_2$, а ОС $\sigma_2$ — в ОС $\sigma_3$, то ОС $\sigma_1$ представима в ОС $\sigma_3$.

**Лемма 2.2** Для любой одномерной ОС $\sigma_1$ существует одномерная ОС $\sigma_2$ с окрестностью ячейки $\alpha$ вида рис. 1, в которой представима $\sigma_1$.

**Лемма 2.3** Существует одномерная ОС $\sigma_0$, в которой каждое поведение, начинающееся с состояния, вид которого указан на рис. 3, обладает тем свойством, что ячейки $\alpha_i$ принимают состояние $\ast$ в точности в моменты $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$, где $\tau = 2^l(l+1)$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ...0 | $\ast$ | 0...0 | $\ast$ | 0...0 | $\ast$ | 0...0 | $\ast$ | 0... |
| | $\alpha-1$ | $\underbrace{}_{l}$ | $\alpha_0$ | $\underbrace{}_{l}$ | $\alpha_1$ | $\underbrace{}_{l}$ | $\alpha_2$ | |

*рис. 3.*

Лемма 2.1 очевидна; доказательство леммы 2.2 содержится в [4]. Для доказательства леммы 2.3 рассмотрим ОС $\sigma_0$ с окрестностью ячейки вида рис. 1. Состояния ячейки ОС $\sigma_0$ нам будет удобно изображать в виде пар $(x_1, x_2)$, где $x_i \in \{0, 1, 2\}$ причем нулевое состояние есть $(0, 0)$, а состояние $\ast$ — $(2,2)$. Для задания функции переходов ОС $\sigma_0$ обозначим состояние ячейки $\alpha$ в момент $t$ посредством $A = (A_1, A_2)$; состояния ячеек $\alpha - 1$ и $\alpha + 1$ — посредством $B = (B_1, B_2)$ и $C = (C_1, C_2)$ соответственно. Состояние $A' = (A_1', A_2')$, в котором ячейка $\alpha$ оказывается в момент $t+1$, определяется следующим образом:

*1.* Если $A_2 = 2$; $A_1 \neq 2$, то $A_1' = 1 - A_1$.
*2.* Если $A_2 \neq 0$, то $A_2' = 0$.
*3.* Если $A_2 = 0$ и либо $C_2 = 1, C_1 \neq 2$, либо $C_2 = 2, C_1 = 0$, то $A_2' = 1$.
*4.* Если $A_2 = 0, C_1 = 2, C_2 \neq 0$, то $A_2' = 2$.

В остальных случаях $A_i' = A_i$.

Пусть в некоторый момент $t$ ОС $\sigma_0$ имеет состояние вида рис. 4, где $c \in \{1, 2\}$; $b_i \in \{0, 1\}$. Тогда, как легко следует из п. п. 1—4, ненулевые $b$-компоненты состояний ячеек будут перемещаться влево, переводя набор $b_1 \ldots b_l$ в такой набор $b_1' \ldots b_l'$, что

$$b' = \sum_{i=1}^{l} 2^{l-i} b_i' = \sum_{i=1}^{l} 2^{l-i} b_i + 1 (\mathrm{mod}\, 2^l) = b + 1 \ (\mathrm{mod}\, 2^l).$$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 \to$ | $b_l$ | 2 | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_l$ | 2 | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_l$ | 2 | $b_1$ | ... |
| $x_2 \to$ | 0 | $c$ | 0 | 0 | ... | 0 | $c$ | 0 | 0 | ... | 0 | $c$ | 0 | ... |
| | | $\alpha-1$ | | | | | $\alpha_0$ | | | | | $\alpha_1$ | | |

*рис. 4.*

Если при этом $b_1' = \ldots = b_l' = 0$, то к моменту $t+l+1$ ОС $\sigma_0$ будет иметь состояние вида рис. 3; если же не все $b_i'$ равны 0, то к этому моменту ОС $\sigma_0$ примет состояние, вид которого указан на рис. 4, где

$c = 1$ и $b_i$ заменены на $b'_i$. В результате период появления состояния $*$ в ячейках $\alpha_i$ оказывается равен $2^l(l+1)$, что и требовалось.

Перейдем к описанию устройства универсальной одномерной ОС $\sigma$ с окрестностью ячейки $\alpha$, указанной на рис. 1. Состояния ячеек ОС $\sigma$ будут изображаться наборами $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, где $x_1 \in \{0, 1, \ldots, 8\}$; $x_3 \in \{0, 1\}$ $x_4, x_5, x_9, x_{10} \in \{0, 1, 2\}$; $x_6, x_7 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $x_8 \in \{0, 1, 2, 3\}$, а $x_2$ пробегает множество состояний ячейки ОС $\sigma_0$ из леммы 2.3. Пусть в момент $t$ состояние ячейки $\alpha$ есть $A = (A_1, \ldots, A_{10})$; состояния ячеек $\alpha-1$ и $\alpha+1$ — $B = (B_1, \ldots, B_{10})$ и $C = (C_1, \ldots, C_{10})$ соответственно. Тогда состояние $A' = (A'_1, \ldots, A'_{10})$, в котором ячейка $\alpha$ оказывается в момент $t+1$, определяется при помощи таблицы 1. Если при этом имеет место ситуация, не предусмотренная в таблице 1, то считается, что

Таблица 1

1. $A'_2 = \varphi_0(A_2, B_2, C_2)$, где $\varphi_0$ — функция переходов ОС $\sigma_0$ из леммы 2.3.
2. $B_1 = 0$; $A_1 \in \{1, 2\} \Rightarrow A'_1 = 0$.
3. $A_1 = 0$; $C_1 \in \{1, 2\} \Rightarrow A'_1 = C_1$.
4. $A_1 \neq 0$; $A_3 = 1$; $A_4 = A_5 = 0 \Rightarrow A'_1 = 0$; $A'_4 = A_1$; $A'_5 = A_1$.
5. $A_1 = 0$; $C_1 = 5 \Rightarrow A'_1 = \max(C_4, C_5)$.
6. $A_1 \neq 0$, причем либо $A_7 = 4$, либо $B_6 = 3 \Rightarrow A'_1 = 0$.
7. $A_1 = 0$; $C_1 = 4 \Rightarrow A'_1 = A'_1 = C_9$.
8. $A_1 = 0$; $C_1 \in \{3, 6, 7, 8\} \Rightarrow A'_1 = C_{10}$.
9. $A_3 = 0$; $B_2 = * \Rightarrow A'_3 = 1$.
10. $A_3 = 1$; $A_1 = C_1 = 0 \Rightarrow A'_3 = 0$.
11. $A_3 = A_4 = 0$; $B \neq 5 \Rightarrow A'_4 = B_4$.
12. $A_i \neq 0$; $i \in \{4, 5, 8, 9, 10\} \Rightarrow A'_i = 0$.
13. $A_3 = 0$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A'_5 = C_5$.
14. $A_6 \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow A'_6 = 0$.
15. Пусть $A_6 = B_6 = A_7 = B_7 = 0$. Тогда:
    *а*) $A_4 = B_4 = 0$; $C_4 \neq 0$; $C_1 = 5 \Rightarrow A'_6 = 1$; $A'_7 = 1$.
    *б*) $A_1 = 4$; $C_6 \in \{1, 2\}$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A'_6 = C_6 + 1$.
    *в*) $A_1 \neq 4$; $C_6 \in \{1, 2\}$; $C_1 \neq 5 \Rightarrow A'_6 = C_6$.
16. $A_6 = 3$; $A_1 \in \{4, 5\}$; $C_1 = C_8 = 0 \Rightarrow A'_6 = 4$.
17. $B_6 = 4$; $A_1 \notin \{4, 5\}$; $B_1 \neq 5$; $A_6 = 0 \Rightarrow A'_6 = 4$.
18. $A_1 = B_6 = 4$; $A_6 = 0 \Rightarrow A'_6 = 3$.
19. $A_7 \in \{1, 2, 3\}$; $A_1 \neq A_7 + 5 \Rightarrow A'_7 = 0$.

20. $A_7 = 0;\ B_7 \in \{1, 2, 3\};\ B_1 \neq B_7 + 5;\ B_8 \neq 3 \Rightarrow A_7' = B_7$.
21. $A_7 \neq 0;\ A_8 \in \{2, 3\} \Rightarrow A_7' = 0$.
22. $A_7 = 0;\ B_7 \neq 0;\ B_8 \in \{2, 3\} \Rightarrow A_7' = B_7 + B_8 - 2$.
23. $A_7 = 4;\ A_1 = A_9 = 0 \Rightarrow A_7' = 0$.
24. $B_6 = 3;\ A_1 \neq 0;\ A_8 = 0 \Rightarrow A_8' = A_1$.
25. $B_7 = A_8 = 0;\ B_6 \notin \{3, 4\} \Rightarrow A_8' = B_8$.
26. $B_6 = 3;\ B_1 \in \{4, 5\};\ A_1 = A_8 = 0 \Rightarrow A_8' = 3$.
27. $A_7 = 4;\ A_9 = 0 \Rightarrow A_9' = A_1$.
28. $A_7 \neq 4;\ C_1 \neq 3;\ A_9 = 0 \Rightarrow A_9' = C_9$.
29. $C_7 = 4;\ A_{10} = 0 \Rightarrow A_{10}' = C_1$.
30. $C_7 \neq 4;\ A_{10} = 0;\ B_1 \notin \{3, 6, 7, 8\} \Rightarrow A_{10}' = B_{10}$.

Покажем, что построенная таким образом ОС $\sigma$ универсальна. Для этого, в силу лемм 2.1 и 2.2, достаточно показать, что в ней представима любая одномерная ОС $\sigma'$ с окрестностью ячейки вида рис. 1. Пусть $\sigma' = \langle Z, E_n, V'\ \varphi' \rangle$, где $V' = \{1,1\}$. Состояние $i \in E_n$ ячейки ОС $\sigma$ будем кодировать состоянием отрезка длины $l = n^4 + n^2 + 5n + 1$ в ОС $\sigma$, вид которого указан на рис. 5, где изображены лишь $x_1$-компоненты состоя-

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\overbrace{\phantom{2\ldots2}}^{i}$ $\overset{L_0}{\downarrow}$ | | $\overbrace{\phantom{2\ldots2}}^{i}$ $\overset{L_1}{\downarrow}$ | | $\overset{L_2}{\downarrow}$ | | $\overset{L_3}{\downarrow}$ | | |
| 3 | 2...2 1...1 | 4 | 2...2 1...1 | 4 | 0...0 | 5 | 0...0 | 5 | $T$ |
| | $\underbrace{\phantom{2\ldots2\,1\ldots1}}_{n-1}$ | | $\underbrace{\phantom{2\ldots2\,1\ldots1}}_{n-1}$ | | $\underbrace{\phantom{0\ldots0}}_{n-1}$ | | $\underbrace{\phantom{0\ldots0}}_{n-1}$ | | |

*рис. 5.*

ний ячеек. При $i \neq 1$ $x_i$-компоненты состояний ячеек этого отрезка равны 0, за исключением $x_2$-компоненты состояния левого конца отрезка, равной $*$ (см. лемму 2.3). Отрезок $T$ служит для кодирования таблицы функции переходов $\varphi'$; он устроен так, как показано на рис. 6 (указаны $x_1$-компоненты состояний ячеек).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$: | 6 | $T_0$ | 6 | $T_1$ | 6 | | | 6 | $T_{n-1}$ |
| $T_i$: | 7 | $T_{i0}$ | 7 | $T_{i1}$ | 7 | | | 7 | $T_{i,n-1}$ |
| $T_{ij}$: | 8 | $T_{ij0}$ | 8 | $T_{ij1}$ | 8 | | | 8 | $T_{ij,n-1}$ |

$$T_{ijk}\colon\ \underbrace{\boxed{\overbrace{2\ldots2}^{\varphi'(i,j,k)}1\ldots1}}_{n-1}$$

*рис. 6.*

Пусть в момент $t = 0$ ОС $\sigma$ имеет состояние $f$, кодирующее некоторое состояние $g$ ОС $\sigma'$, причем состояние ячейки $\alpha$ ОС $\sigma'$ кодируется состоянием отрезка $P_\alpha$ в ОС $\sigma$. Выделим в каждом $P_\alpha$ отрезки $L_0$, $L_1$, $L_2$, $L_3$, $T$ так, как это показано на рис. 5. Тогда, как следует из п. 9 таблицы 1, при $t = 1$ $x_3$-компоненты левых концов отрезков $P_\alpha$ станут равы 1. Используя п.п. 2—5, 10—13 таблицы 1, нетрудно проследить, что после этого содержимое $x_1$-компонент отрезков $L_0$ начнет передаваться по $x_4$ и $x_5$-компонентам состояний ячеек ОС $\sigma$ соответственно вправо и влево, и в конце концов заполнит $x_1$-компоненты состояний ячеек отрезка $L_2$, находящегося внутри $P_{\alpha+1}$, и отрезка $L_3$, находящегося внутри $P_{\alpha-1}$. В результате $x_1$-компоненты состояний ячеек отрезка примут вид, указанный на рис. 7. При этом (см. п. 15а таблицы 1) $x_6$ и $x_7$-компоненты

| | | | $g(\alpha)$ | | $g(\alpha-1)$ | | $g(\alpha+1)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0...0 | 4 | 2...21...1 | 4 | 2...21...1 | 5 | 2...21..·1 | 5 | $T$ |
| | | $\uparrow\gamma_1$ | | $\uparrow\gamma_2$ | $\uparrow\beta$ | $\uparrow\gamma_3$ | | | |

*рис. 7.*

состояния ячейки $\beta$ (см. рис. 7) окажутся равными 1; прочие компоненты (кроме $x_2$-компонент) состояний ячеек отрезка $P_\alpha$ будут равны 0. Как следует из п. п. 14, 15б, в таблицы 1, ненулевая $x_6$-компоненте состояния ячейки будет перемещаться влево по отрезку $P_\alpha$, пока на достигнет ячейки $\gamma_1$ (рис. 7), так что $x_6$-компонента состояния ячейки $\gamma_1$ станет равной 3. Одновременно (см. п. п. 19, 20 таблицы 1) единичная $x_7$-компонента состояния ячейки переместится по отрезку $P_\alpha$ вправо до первой ячейки отрезка $T$. В тот момент, когда $x_6$-компонента состояния ячейки $\gamma_1$ станет равной 3, начнется передача $x_1$-компонент состояний ячеек отрезка $L_1$ по $x_8$-компонентам вправо по отрезку $P_\alpha$ (см. п. п. 6, 24, 25 таблицы 1). При этом ненулевой сигнал в $x_8$-компоненте исчезнет в ячейке с $x_7$-компонентой, равной 1 (п. 25 таблицы 1) и, если этот сигнал был равен 2, то единичная $x_7$-компонента состояния ячейки начнет перемещаться вправо до следующей ячейки с $x_1$-компонентой, равной 6 (п. п. 19—22 таблицы 1). В результате по окончании передачи $x_1$-компонент состояний ячеек отрезка $L_1$ по $x_8$-компонентам единичную $x_7$-компоненту будет иметь ячейка отрезка $T$, расположенная непосредственно слева от отрезка $T_{g(\alpha)}$. После прохождения последнего ненулевого сигнала отрезка $L_1$ через ячейку $\gamma_1$ $x_6$-компонента состояния этой ячейки становится равной 4, а $x_8$-компонента ячейки $\gamma_{1+1}$-равной 3 (см. п. п. 16, 26 таблицы 1), и ненулевой сигнал в $x_6$-компонентах состояний ячеек перемещается вправо до ячейки $\gamma_2$, у которой $x_6$-компонента состояния становится равной 3 (см. п. п. 17, 18 таблицы 1). Значение 3 $x_8$-компоненты состояния ячейки перемещаестя вправо до ячейки с единичной $x_7$-компонентой состояния, после чего эта ячейка будет иметь нулевую $x_7$-компоненту, а ячейка, расположенная справа от нее (то есть первая ячейка отрезка $T_{g(\alpha)}$) будет иметь $x_7$-компоненту состояния, равную 2 (см. п. п. 21, 22 таблицы 1). Далть, аналогично описанному выше процессу, по $x_8$-компонентам состояний ячеек начнется передача вправо $x_1$-компонент состояний ячеек отрезка $L_2$; затем — отрезка $L_3$, и в некоторый момент $x_1$-компоненты состояний ячеек отрезка $P_\alpha$ примут вид, показанный на рис. 8, причем $x_7$-компонента первой ячейки отрезка

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0...0 | 4 | 0...0 | 4 | 0...0 | 5 | 0...0 | 5 | $T$ |

*рис. 8.*

$T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ будет равна 4, а прочие $x_i$-компоненты состояний ячеек отрезка $P_\alpha$ (кроме $x_2$-компонент) будут равны 0. Наконец, используя п. п. 6—8, 23, 27—30 таблицы 1, нетрудно проверить, что далее содержимое $x_1$-компонент состояний ячеек отрезка $T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ будет по $x_9$-компонентам передано в $x_1$-компоненты состояний ячеек отрезков $L_0$ и $L_1$(при этом для восстановления $x_1$-компонент состояний ячеек отрезка $T_{g(\alpha),g(\alpha-1),g(\alpha+1)}$ они по циклу через $x_{10}$-компоненты снова передаются на этот же отрезок). Таким образом, к некоторому моменту $t = t_0$ $x_j$-компоненты состояний ячеек отрезка $P_\alpha$ при $j \neq 1,2$ окажутся равными 0, а $x_1$-компоненты будут иметь вид на рис. 5, где $i = \varphi'(g(\alpha), g(\alpha-1), g(\alpha+1))$. Заметим, что изменения $x_2$-компонент состояний ячеек в ОС $\sigma$ происходят независимо от прочих компонент, в соответствии с функцией переходов ОС $\sigma_0$ из леммы 2.3. Поэтому значение $*$ $x_2$-компоненты состояния левого конца отрезка $P_\alpha$ будет возникать в моменты $t = 0$, $\tau$, $2\tau$ ..., где $\tau = 2^l(l+1)$. Поэтому при $t_0 \leq \tau$ к моменту $t = \tau$ состояние отрезка $P_\alpha$ будет кодировать состояние $\varphi'(g(\alpha), g(\alpha-1), g(\alpha+1))$ ячейки ОС $\sigma'$, что и завершит цикл моделирования перехода этой ОС. Так как, очевидно, $t_0 \leq cl$ для некоторой константы $C$, то существует такое $n_0$, что при $n \geq n_0$ $t_0 \leq cl \leq 2^l(l+1)$, то есть при $n \geq n_0$ любая ОС $\sigma = \langle Z, E_n, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС $\sigma$. Так как, очевидно, каждая ОС вида $\langle Z, E_m, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС $\langle Z, E_n, V', \varphi'' \rangle$ при $n \geq \max(m, n_0)$, то, с учетом леммы 2.1, любая ОС вида $\langle Z, E_n, V', \varphi' \rangle$ представима в ОС $\sigma$, то есть ОС $\sigma$ универсальна.

### 3. Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм.

**Лемма 3.1** Если одномерная ОС $\sigma_1$ представима в ОС $\sigma_2 = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, причем функция алгебры логики $\varphi$ принадлежит некоторому замкнутому классу $K$, то существует ОС $\sigma_3$ вида $\langle Z, E_2, V', \varphi'\rangle$, такая, что $\varphi' \in K$ и $\sigma_1$ представима в $\sigma_3$ с замедлением 1.

Пусть ОС $\sigma_1$ представима в ОС $\sigma_2$ с замедлением $N$. Как нетрудно заметить, состояние, которое ячейка $\alpha$ ОС $\sigma_2$ принимает через $N$ моментов времени, зависит только от состояния в настоящий момент множества ячеек $\alpha + \underbrace{\widetilde{V} + \ldots + \widetilde{V}}_{n}$, где $\widetilde{V} = V \cup \{0\}$ (имеется в виду множество всевозможных сумм вида $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, где $\alpha_i \in \widetilde{V}$), которое можно рассматривать как окрестность ячейки $\alpha$, определяемую некоторым шаблоном соседства $V'$. Функция $\varphi'$, осуществляющая данную зависимость, получается суперпозициями из функции $\varphi$, то есть $\varphi' \in K$, и ясно, что ОС $\sigma_1$ представима в ОС $\sigma_3$ $\langle Z, E, V', \varphi'\rangle$ с замедлением 1.

**Лемма 3.2.** Не существует универсальной одномерной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу $L_1$.

Предположим, что существует универсальная ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $\varphi \in L_1$. Тогда в ней представима ОС $\sigma_1 = \langle Z, E_2, V_1, \varphi_1\rangle$, где $V_1 = \{-1, 1\}$; $\varphi_1(x_0, x_1, x_2) = x_0 \vee x_1 \vee x_2$, и по лемме 3.1 найдется ОС $\sigma_2 = \langle Z, E_2, V_2, \varphi_2\rangle$, в которой $\sigma_1$ представима с замедлением 1, причем $\varphi_2 \in L_1$. Пусть $f$ - состояние ОС $\sigma_1$, у которого каждая ячейка имеет состояние 1; $g$ - состояние ОС $\sigma_1$, у которого ячейка 0 имеет состояние 0, а прочие ячейки – состояние 1. Тогда $\Phi_1(f) = f$; $\Phi_1(g) = f$ ($\Phi_1$-основная функция переходов ОС $\sigma_1$). Поэтому, если обозначить $f'$, $g'$ состояния ОС $\sigma_2$, кодирующие состояния $f$ и $g$ ОС $\sigma_1$, то будем иметь $\Phi_2(f') = \Phi_2(g') = f'$. Так как $f'$ и $g'$ отличаются друг от друга лишь на отрезке конечной длины, то из последнего равенства вытекает существование в ОС $\sigma_2$ взаимно стираемых конфигураций (см. [1,3]), что в случае $\varphi_2 \in L_1$ возможно лишь при $\varphi_2 \equiv 0$ либо при $\varphi \equiv 1$. Эти случаи, очевидно, также невозможны, ибо в $\sigma_2$ представима невырожденная ОС $\sigma_1$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

**Лемма 3.3** Не существует одномерной универсальной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу $F_4^\infty$.

Рассмотрим произвольную ОС $\sigma$ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $V = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$; $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) \in F_4^\infty$, то есть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) = x_i \vee \psi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$. Если в момент $t$ ячейка $\alpha$ ОС $\sigma$ имеет состояние 1, то в момент $t+1$, как нетрудно заметить, ячейка $\alpha - \alpha_i$ тоже окажется в состоянии 1, и вообще в момент $t+k$ состояние 1 будет иметь ячейка $\alpha - k\alpha_i$. Пусть ОС $\sigma_1 = \langle Z, E_2, V_1, \varphi_1\rangle$ представима в ОС $\sigma$ с замедлением $N$. Рассмотрим произвольное состояние $f$ ОС $\sigma_1$ и кодирующее его состояние $g$ ОС $\sigma$; пусть состояние ячейки $\alpha$ ОС $\sigma_1$ при этом кодируется состоянием отрезка $P_\alpha$ длины $l$ в ОС $\sigma$. Если $j$-я слева ячейка отрезка $P_\alpha$ находится в состоянии 1, то, обозначив эту ячейку $\beta$, получим, что через $lN$ моментов в состоянии 1 окажется ячейка $\beta - lN\alpha_i$, которая является $j$-й слева ячейкой отрезка $P_{\alpha - N\alpha_i}$. Поэтому, если $(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ и $(\tau_1', \ldots, \tau_l')$ - наборы, определяющие состояния отрезка $P_\alpha$ при $t = 0$ и отрезка $P_{\alpha-N\alpha_i}$ при $t = lN$, то $\tau'_k \geq \tau_k$ $(k = 1, \ldots, l)$. Обозначим $\delta(x)$ набор $(\delta_1, \ldots, \delta_l)$, используемый для кодирования состояния $x$ ячейки ОС $\sigma_1$ $(x \in \{0, 1\})$; пусть $\delta(\varrho_1) \not\equiv \delta(\varrho_2)$. Тогда, если при $t = 0$ состояние отрезка $P_\alpha$ определяется набором $\delta(\varrho_1)$, то при $t = lN$ состояние отрезка $P_{\alpha-N\alpha_i}$ определяется тем же набором. Это условие для ОС $\sigma_1$ означает, что если в момент $t$ некоторая ячейка $\alpha$ находится в состоянии $\sigma_1$, то в момент $t+l$ в том же состоянии должна оказаться ячейка $\alpha - N\alpha_i$. Если положить при $\alpha_i \neq 0$ $\varphi(x_0, \ldots, x_{h_1-1}) \equiv x_0$, а при $\alpha_i = 0$ $\varphi_1(x_0, \ldots, x_{h_1-1}) \equiv x$, то $\sigma_1$ не будет удовлетворять последнему условию, то есть она не будет представима в $\sigma$, и ОС $\sigma$ не универсальна. Лемма доказана.

Так как ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$ универсальна тогда и только тогда, когда универсальна двойственная ОС $\sigma' = \langle Z, E_2, V, \varphi \rangle$, где $\varphi'(x_0, \ldots, x_{h-1}) = \overline{\varphi(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{h-1})}$, то вместе с леммой 3.3 получаем, что не существует и универсальной одномерной ОС, локальная функция переходов которой принадлежала бы классу $F_8^\infty$, двойственному для $F_4^\infty$. Так как $S_6 \cup P_6 \subseteq F_4^\infty \cup F_8^\infty$, то не существует также универсальной одномерной ОС с локальной функцией переходов из $P_6$ либо из $S_6$. Таким образом, если система функций $S$ содержится в одном из классов $P_6$, $S_6$, $L_1$, $F_4^\infty$, $F_8^\infty$, то суперпозициями функций этой системы нельзя получить функцию переходов универсальной ОС, и первая часть утверждения теоремы 2 доказана. Для доказательства второй части заметим, что, как видно из диаграммы Поста (см. [5]), каждый замкнутый класс функций алгебры логики, не содержащийся ни в одном из классов $P_6$, $S_6$, $L_1$ $F_4^\infty$, $F_8^\infty$, содержит один из классов $D_2$, $F_\mu^\infty$, $F_6^\infty$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$ (см. [5]). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что в каждом из этих классов существует локальная функция переходов универсальной одномерной ОС. Для рассмотрения класса $D_2$, состоящего из монотонных самодвойственных функций, нам будет нужна следующая лемма.

**Лемма 3.4.** Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$-различные попарно несравнимые двоичные наборы длины $n$, причем $\beta_i = \overline{\alpha}_i$. Тогда для любого двоичного набора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in D_2$ такая, что $f(\alpha_i) = \gamma_i$; $i = 1, 2, \ldots m$.

Пусть $\delta_i = \alpha_i^{\gamma_i}$, $\nu_i = \alpha_i^{\bar{\gamma}_i}$. Тогда $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m\} = \{\delta_1, \ldots \delta_m, \nu_1 \ldots, \nu_m\}$, $\nu_i = \bar{\delta}_i$, причем для доказательства леммы требуется построить функцию $f \in D_2$ такую, что $f(\delta_i) = 1$; $f(\nu_i) = 0$. Так как наборы $\delta_i$, $\nu_i$ попарно несравнимы, то ни для какого набора $\alpha$ не может одновременно выполняться $\alpha \geq \delta_i$ и $\alpha \leq \nu_j$. Поэтому определим $f$ следующим образом: если $\alpha \leq \nu_i$ для некоторого $i$, то $f(\alpha) = 0$; если $\alpha \geq \delta_i$ для некоторого $i$, то $f(\alpha) = 1$. Если набор $\alpha$ несравним ни с одним из наборов $\delta_i$, $\nu_i$, причем число единиц в $\alpha$ меньше, чем $\frac{n}{2}$, то полагаем $f(\alpha) = 0$; если оно больше, чем $\frac{n}{2}$, то $f(\alpha) = 1$; если же набор $\alpha$ содержит ровно

$\frac{n}{2}$ единиц, то на наборах $\alpha$, $\bar{\alpha}$ определяем значения $f$ произвольно, с соблюдением условия $f(\alpha)=\overline{f(\bar{\alpha})}$. Нетрудно проверить, что построенная таким образом функция $f$ является монотонной и самодвойственной.

**Лемма 3.5** Существует универсальная ОС $\sigma$ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, такая, что $\varphi\in D_2$.

Пусть $\sigma'=\langle Z, E_n, V', \varphi'\rangle$-универсальная ОС и $V'=\{-1, 1\}$; существование такой ОС установлено в теореме 1. Покажем, что возможно так подобрать локальную функцию переходов $\varphi\in D_2$ ОС $\sigma=\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $V=\{-4n-11, -4n-10, \ldots, -1, 1, \ldots, 4n+10, 4n+11\}$, что $\sigma'$ окажется представима в ОС $\sigma$ с замедлением 1. Состояние $i\in E_n$ ячейки ОС $\sigma'$ закодируем состоянием отрезка длины $2n+6$ в ОС $\sigma$, определяемым набором $\underbrace{1,\ldots,1}_{n+2}, \underbrace{0,\ldots,0}_{i+2}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n+1-i}$. При этом каждое состояние $f$ ОС $\sigma'$ будет кодироваться состоянием $g=\Theta(f)$ ОС $\sigma$, у которого отрезки $P_\alpha=\{x/(2n+6)\,\alpha\leq x<(2x+6)(\alpha+1)\}$ имеют состояния, кодирующие состояния $f(\alpha)$. Обозначим $\mathfrak{M}_\beta$ множество двоичных наборов длины $8n+23$, определяющих состояния окрестности $V(\beta)$ ячейки $\beta\in P_\alpha$, возникающие при указанном кодировании различных состояний ОС $\sigma'$. Если $\beta$ есть $i$-я слева ячейка отрезка $P_\alpha$, то каждый принадлежащий $\mathfrak{M}_\beta$ набор имеет вид $\xi_1, \ldots, \xi_{2n+6-i}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6}, \varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+6}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2n+6}, \psi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$, где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6})$ — набор, кодирующий состояние $f(\alpha-1)$; $(\varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+6})$ — набор, кодирующий $f(\alpha)$ и $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2n+6})$ — набор, кодирующий $f(\alpha+1)$, причем в наборе $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n+6-i})$ не встречаются подряд $n+2$ единицы, а набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+6})$ начинается с $n+2$ единиц и $\xi_{2n+6-i}=0$. Поэтому для различных ячеек $\beta\in P_\alpha$ множества $\mathfrak{M}_\beta$ не пересекаются, причем по любому набору $\nu\in\mathfrak{M}_\beta$ однозначно восстанавливаются состояния $f(\alpha-1)$, $f(\alpha)$ и $f(\alpha+1)$. Чтобы определить значение $\varphi(\nu_0, \nu_{-4n-11}, \nu_{-4n-10}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \ldots, \nu_{4n+11})$, где $\nu=(\nu_{-4n-11}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{4n+11})\in\mathfrak{M}_\beta$, поступаем теперь следующим образом: сначала по набору $\nu$ восстанавливаем значения $f(\alpha-1)$, $f(\alpha)$ и $f(\alpha+1)$; затем находим значение $\varphi'(f(\alpha), f(\alpha-1), f(\alpha+1))$ и набор $(\gamma_1 \ldots, \gamma_{2n+6})$, кодирующий это значение, после чего по определению полагаем $\varphi(\nu_0, \nu_{-4n-11}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_{4n+11})=\gamma_i$. При таком определении значений фунции $\varphi$ на наборах указанного вида, как нетрудно заметить, ОС $\sigma$' оказывается представима в ОС $\sigma$ с замедлением 1. Покажем, что на остальных наборах функцию $\varphi$ можно доопределить так, чтобы она вошла в класс $D_2$. Для этого, согласно лемме 3.4, достаточно установить, что различные наборы из множеств $\mathfrak{M}_\beta$, где $\beta\in P_\alpha$ при фиксированном $\alpha$, а также отрицания этих наборов не сравнимы друг с другом. При $\beta_1\neq\beta_2$ несравнимость друг с другом наборов из $\mathfrak{M}_{\beta_1}$ и $\mathfrak{M}_{\beta_2}$ вытекает из различного расположения в этих наборах кортежей из $n+2$ единиц; при $\nu_1, \nu_2\in\mathfrak{M}_\beta$, $\nu_1\neq\nu_2$, несравнимость $\nu_1$ с $\nu_2$ вытекает из различного расположения в этих наборах изолированных единиц. Поэтому любые два различных набора $\nu_1, \nu_2 \in \bigcup_{\beta\in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ а также их отрицания, несравнимы друг с другом. Если $\nu_1 \in \mathfrak{M}_{\beta_1}$, то набор $\bar{\nu}_1$ содержит кортежи из единиц длиной не более чем $n+1$, и поэтому невозможно соотношение $\nu_2 \leq \bar{\nu}_1$ при $\nu_2 \in \bigcup_{\beta\in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$. С другой стороны, в $\bar{\nu}_1$ имеется кортеж вида $\overbrace{1, \ldots, 1}^{j}, 0, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n+3-j}$, и если $\bar{\nu}_1 \leq \nu_2$ при $\nu_2 \in \bigcup_{\beta\in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$, то в $\nu_2$ можно выделить кортеж вида $\overbrace{1, \ldots, 1}^{j}, \Theta, \overbrace{1, \ldots, 1}^{n+3-j}$, где $\Theta \in \{0, 1\}$. Но любые два кортежа из единиц в $\nu_2$ отделены друг от друга хотя бы двумя нулями, так что $\Theta \neq 0$. Случай $\Theta = 1$ также невозможен, так как тогда в $\nu_2$ нашелся бы кортеж из $n+4$ единиц, в то время как максимальная длина таких кортежей в $\nu_2$ равна $n+2$. Поэтому $\bar{\nu}_1 \not\leq \nu_2$, и попарная несравнимость наборов из $\bigcup_{\alpha\in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ и их отрицаний доказана, а вместе с ней доказана и лемма 3.5.

**Лемма 3.6** При любом натуральном $\mu \geq 2$ существует универсальная ОС $\sigma$ вида $\langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, где $\varphi \in F_2^\mu$.

Как и в предыдущей лемме, рассмотрим универсальную ОС $\sigma' = \langle Z, E_n, V', \varphi'\rangle$, где $V' = \{-1, 1\}$, и покажем, что возможно так подобрать локальную функцию переходов $\varphi \in F_2^\mu$ ОС $\sigma = \langle Z, E_2, V, \varphi\rangle$, что $\sigma'$ окажется представима в ОС $\sigma$ с замедлением 1. Здесь $V = \{-2l+1, -2l+2, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, 2l-1\}$; $l = \max\left(n+4, \left[\frac{13\mu+1}{4}\right]+1\right)$. Состояние $i \in E_n$ ячейки ОС $\sigma'$ закодируем состоянием отрезка длины $l$ в ОС $\sigma$, определяемым набором $1, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{i+1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{l-i-4}$. При этом каждое состояние $f$ ОС $\sigma'$ будет кодироваться состоянием ОС $\sigma$, у которого отрезки $P_\alpha$ (см. лемму 3.5) имеют состояния, кодирующие состояния $f(\alpha)$. Пусть $\mathfrak{M}_\beta$-множество двоичных наборов длины $4l-1$, определяющих состояния окрестности $V(\beta)$ ячейки $\beta \in P_\alpha$, возникающие при указанном кодировании различных состояний ОС $\sigma'$. Как и при доказательстве леммы 3.5, получаем, что для различных ячеек $\beta \in P_\alpha$ множества $\mathfrak{M}_\beta$ не пересекаются и по любому набору $\nu \in \mathfrak{M}_\beta$ однозначно востанавливаются соответствующие состояния ячеек $\alpha-1$, $\alpha$ и $\alpha+1$ в ОС $\sigma'$; поэтому для представимости ОС $\sigma'$ в ОС $\sigma$ с замедлением 1 достаточно определить значения функции $\varphi$ на наборах $(\nu_0, \nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2l-1})$, где $\nu = (\nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2l-1}) \in \mathfrak{M}_\beta$ так же, как это делалось при доказательстве леммы 3.5. Покажем, что на остальных наборах функцию $\varphi$ можно доопределить так, чтобы она вошла в класс $F_2^\mu$. При $\varkappa \geq \nu$, где $\nu \in \mathfrak{M}_\beta$ и $\varphi(\nu_0, \nu_{-2l+1}, \ldots, \nu_{-1}, \nu_1, \ldots, \nu_{2l-1}) = 1$, положим $\varphi(\varkappa_0, \varkappa_{-2l+1}, \ldots, \varkappa_{-1}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2l-1}) = 1$ (это определение корректно, так как различные наборы из $\bigcup_{\beta\in P_\alpha} \mathfrak{M}_\beta$ несравнимы); если в наборе $\varkappa$ имеется более, чем 13 единиц, то полагаем $\varphi(\varkappa_0, \varkappa_{-2l+1}, \ldots, \varkappa_{-1}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{2l-1}) = 1$ (это возможно в силу того, что каждый набор из $\bigcup\limits_{\beta \in P_\beta} \mathfrak{M}_\beta$ имеет не более 13 единиц); на остальных наборах значения функции $\varphi$ полагаем равными 0. Тогда, по построению, $\varphi$ есть монотонная $\alpha$-функция, и остается проверить, что $\varphi$ обладает свойством $a_\mu$. Пусть $\tau_1 = (\tau_{11}, \ldots, \tau_{1\ 4l-1}); \ldots; \tau_\mu = (\tau_{\mu 1}, \ldots, \tau_{\mu, 4l-1})$ - наборы, на которых $\varphi$ обращается в 0. Так как каждый из них имеет не более 13 единиц, то число разрядов, ненулевых хотя бы у одного из этих наборов, не превосходит $13\mu$. Имеем далее:

$$4l - 1 \geq 4\left(\left[\frac{13\mu + 1}{4}\right] + 1\right) \geq 4\,\frac{13\mu + 1}{4} = 13\mu + 1 > 13\mu,$$

то есть существует такое $j$, что $\tau_{1j} = \tau_{2j} = \ldots = \tau_{\mu j} = 0$, и свойство $a_\mu$ выполнено. Лемма доказана.

Так как класс $F_6^\mu$ двойственный для класса $F_2^\mu$, то одновременно получаем существование одномерных универсальных ОС с локальной функцией переходов из $F_6^\mu$. Таким образом, в каждом из классов $D_2$, $F_2^\mu$, $F_6^\mu$ существуют локальные функции переходов универсальных одномерных ОС, что и завершает доказательство теоремы 2.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Мур Э. Ф.*, Математические модели самовоспроизведения. Сб «Математические проблемы в биологии», М., «Мир», 1966.

[2] *Подколзин А. С.*, О сложности моделирования в однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 30, М., «Наука», 1975.

[3] *Подколзин А. С.*, О поведениях однородных структур. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 31, М., «Наука», 1975.

[4] *Подколзин А. С.*, Об универсальных однородных структурах. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 34, М., «Наука», 1978.

[5] *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.*, Функции алгебры логики и классы Поста. М., Физматгиз, 1966.