

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ВЕКТОРАМИ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Й. ДЮЛА ОБАДОВИЧ

Будапешт

(Поступило 15. 8. 1973)

## 1. Обобщенные полиномиальные векторы

*Определение.* Пусть  $g_0, g_1, \dots, g_j, \dots$  заданные, линейнонезависимые скалярные функции в (скалярном) функциональном пространстве  $W_p^{(n)} \equiv W_p^{(n)}[a, b]$ . Если  $N$  произвольное неотрицательное целое число,  $c_0, c_1, \dots, c_j, \dots$  любые константные векторы  $m$ -мерного евклидова пространства  $E_m$  то вектор-функция

$$(1) \quad q(x) = \sum_{j=0}^N c_j g_j(x),$$

принимая значения из  $E_m$ , называется обобщенным полиномиальным вектором  $N$ -ой степени (в дальнейшем кратко: полиномиальным вектором).

В том случае, когда  $g_j(x) = x^j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), функция (1) принимает вид

$$(2) \quad q(x) = \sum_{j=0}^N c_j x^j.$$

В этом случае координаты вектора  $q(x)$  являются обыкновенными полиномами не более  $N$ -ой степени, таким образом функцию (2) целесообразно называть обыкновенным полиномиальным вектором.

В дальнейшем мы обозначим через  $Q_N$  множество обобщенных полиномиальных векторов не более  $N$ -ой степени. Легко видеть, что  $Q_N$  представляет собой линейное пространство (векторного) функционального пространства  $W_p^{(n)}$ , для которого

$$(3) \quad \dim Q_N = (N + 1) m.$$

## 2. Пространство полиномиальных векторов, удовлетворяющих заданным краевым условиям

Введем обозначение

$$U_i y = \sum_{k=0}^{n-1} \{A_{ik} y^{(k)}(a) + B_{ik} y^{(k)}(b)\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  заданные постоянные матрицы типа  $m \times m$ , а  $y$  произвольная вектор-функция из (векторного) пространства  $W_p^{(n)}$ . Пусть

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix},$$

и обозначим через  $Q_N^0$  множество полиномиальных векторов  $q(x)$  не более  $N$ -ой степени, удовлетворяющих краевому условию  $Uq = 0$ , т.е.

$$Q_N^0 = \{q : q \in Q_N, Uq = 0\}.$$

Очевидно, что  $Q_N^0$  линейное подпространство пространства  $Q_N$ . Возможно, что  $Q_N^0$  состоит только из тождественно нулевого полиномиального вектора, однако, как это видно из следующей леммы, при всех достаточно больших  $N$ ,  $Q_N^0$  содержит отличные от нуля полиномиальные векторы.

*Лемма 2.1* При всех  $N \geq n - 1$  выполняется следующее неравенство:

$$(4) \quad \dim Q_N^0 \geq (N + 1 - n) m.$$

*Доказательство.* Пусть  $N \geq n - 1$ , и пусть  $q(x)$  — произвольный полиномиальный вектор вида (1).

Рассмотрим теперь, какими разными способами могут быть выбраны векторы  $c_0, c_1, \dots, c_N$ , находящиеся в (1), чтобы условие  $Uq = 0$  удовлетворялось.

Условие  $Uq = 0$ -эквивалентно выполнением равенств

$$\sum_{k=0}^{n-1} [A_{ik} q^{(k)}(a) + B_{ik} q^{(k)}(b)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

из которых, подставляя выражение  $q(x)$  вида (1), получаем

$$(5) \quad \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^{n-1} [g_j^{(k)}(a) A_{ik} + g_j^{(k)}(b) B_{ik}] \right) c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Введем обозначение

$$M_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} [g_j^{(k)}(a) A_{ik} + g_j^{(k)}(b) B_{ik}]$$

тогда из (5) следует уравнение

$$\sum_{j=0}^N M_{ij} c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или подробнее:

$$(6) \quad \begin{bmatrix} M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n0} & M_{n1} & \dots & M_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что  $\dim Q_N^0$  равно числу линейно независимых векторрешений линейной однородной системы (6), в которой неизвестными являются координаты  $m$ -мерных векторов  $c_0, c_1, \dots, c_N$ . Так как матрица системы (6) представляет собой матрицу типа  $nm \times (N+1)m$ , то очевидно, что ранг этой матрицы удовлетворяет неравенству  $r \leq nm$ , таким образом число принадлежащих к  $E_{(N+1)m}$  линейно независимых векторрешений системы уравнений (6) есть число  $(N+1)m - r$ , которое не меньше числа  $(N+1)m - nm$ , и из этого следует неравенство (4).

### 3. Последовательность минимизирующих полиномиальных векторов

Обозначим через  $L$   $m$ -мерный линейный дифференциальный оператор порядка  $n$ , т.е.

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) y^{(i)},$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad F_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

представляют собой матрицы типа  $m \times m$ , элементы которых принадлежат к пространству  $L_p[a, b]$ . Областью определения оператора  $L$  мы выбираем совокупность всех вектор-функций из пространства  $W_p^{(n)}$ , удовлетворяющих краевому условию  $U_y = 0$  (см. п. 2), т.е.

$$D(L) = \{y : y \in W_p^{(n)}, U_y = 0\}.$$

В дальнейшем мы все время предполагаем, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $L$ .

Пусть  $f(x) \in L_p[a, b]$ -заданная вектор-функция, и введем следующее обозначение

$$(7) \quad \varepsilon_N = \inf_{q \in Q_N^0} \|f - Lq\|_{L_p}, \quad (N = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что  $\varepsilon_N \geq 0$ , и так как  $Q_0^0 \subset Q_1^0 \subset \dots \subset Q_N^0 \subset \dots$ , то  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \dots \geq \varepsilon_N \geq \dots$ .

*Теорема 3.1* Существует полиномиальный вектор  $q_N(x) \in Q_N^0$  такой, что

$$\varepsilon_N = \|f - Lq_N\|_{L_p},$$

если же  $1 < p < +\infty$ , то существует один и только один такой полиномиальный вектор.

*Доказательство.* Пусть  $d_N = \dim Q_N^0$  и пусть

$$(8) \quad q_1(x), q_2(x), \dots, q_{d_N}(x)$$

произвольный базис в пространстве  $Q_N^0$ . Введем обозначение

$$(9) \quad f_k(x) = Lq_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, d_N).$$

Покажем, что вектор-функции

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_{d_N}(x)$$

принадлежащие  $L_p$ , являются линейно независимыми. Если же при некоторых числах  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$  при почти всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k f_k(x) = 0,$$

то вместе с тем выполняется и

$$L \left( \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x) \right) = 0,$$

и это означало бы, что вектор-функция

$$(11) \quad q(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x),$$

принадлежащая  $Q_N^0$ , удовлетворяла бы уравнению  $Ly = 0$ .

Так как  $Q_N^0 \subset D(L)$ , поэтому вектор-функция  $q(x)$  определенная равенством (11), принадлежит к  $D(L)$ , откуда в следствие условия для оператора  $L$ , (см. начало параграфа)  $q(x) \equiv 0$ , однако вектор-функции  $q_1(x), q_2(x), \dots, q_{d_N}(x)$  являются линейно независимыми, поэтому, из равенства  $q(x) \equiv 0$  следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{d_N} = 0$ , откуда из (10) уже вытекает, что вектор-функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{d_N}(x)$  линейно независимы.

Так как вектор-функции (8) образуют базис в пространстве  $Q_N^0$ , поэтому все вектор-функции  $q(x) \in Q_N^0$  представляются в виде

$$(12) \quad q(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$  — комплексные числа.

Так как по обозначению (9) из (12) получается

$$\|f - Lq\|_{L_p} = \left\| f - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k f_k \right\|_{L_p},$$

где вектор-функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{d_N}(x)$  по доказанному выше являются линейно независимыми, поэтому доказываемая теорема эквивалентна доказательству наличия таких комплексных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$ , при которых выражение

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k f_k \right\|_{L_p}$$

принимает минимальное значение. По известной теореме теории аппроксимации [3] существуют такие комплексные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$  и при  $1 < p < +\infty$ , когда пространство  $L_p$  представляет собой независимое строго нормированное пространство, эти числа однозначно определены, и этим теорема доказана.

*Определение.* Пусть  $q_N(x)$  полиномиальный вектор, принадлежащий к  $Q_N^0$ , такой, что

$$\|f - Lq\|_{L_p}, \quad q(x) \in Q_N^0$$

принимает минимальное значение, то есть

$$(13) \quad \varepsilon_N = \|f - Lq_N\|_{L_p};$$

в этом случае последовательность полиномиальных векторов  $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$  называется последовательностью минимизирующих полиномиальных векторов.

#### 4. Сходимость последовательности минимизирующих полиномиальных векторов

Пусть  $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$  последовательность минимизирующих полиномиальных векторов, определенных в параграфе (3).

Введем обозначение

$$Q^0 = \bigcup_{N=0}^{\infty} Q_N^0,$$

то есть  $Q^0$  означает множество всех полиномиальных векторов  $q(x)$ , которые удовлетворяют условию  $Uq = 0$ .

Очевидно, что  $Q^0 \subset W_p^{(n)}$  и вместе с тем  $Q^0 \subset D(L)$ ; далее, легко видеть, что  $Q^0$  представляет собой линейное (но не замкнутое) подпространство пространства  $D(L)$ .

*Теорема 4.1* Предположим, что  $Q^0$  лежит всюду плотно в  $D(L)$  то есть для любых вектор-функций  $y(x) \in D(L)$  найдется последовательность полиномиальных векторов  $\{y_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ , принадлежащих  $Q^0$ , такая, что

$$\|y - y_N\|_{W_p^{(n)}} \rightarrow 0.$$

(Норма может быть какая-нибудь из нормы (21), (22), (23), [6]).

Пусть  $y^*(x)$  решение уравнения  $Ly = f(x)$  из  $D(L)$ , пусть  $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$  — последовательность минимизирующих полиномиальных векторов, принадлежащих к  $Q^0$ , определенных в параграфе 3, тогда

$$(14) \quad \|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \rightarrow 0, \quad \text{если } N \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Введем обозначение

$$\delta_N = \inf_{q \in Q_N^0} \|y^* - q\|_{W_p^{(n)}}$$

и рассмотрим проблему, имеется ли такой полиномиальный вектор, принадлежащий к  $Q_N^0$ , для которого выражение

$$\|y^* - q\|_{W_p^{(n)}}, \quad q \in Q_N^0$$

принимает минимальное значение, другими словами, существует ли полиномиальный вектор  $q_N^*(x) \in Q_N^0$  такой, что

$$(15) \quad \delta_N = \|y^* - q_N^*\|_{W_p^{(n)}}.$$

Аналогично параграфу 3, пусть  $d_N = \dim Q_N^0$  и пусть

$$q_1(x), \dots, q_{d_N}(x)$$

произвольный базис в пространстве  $Q_N^0$ , тогда любой из полиномиальных векторов  $q(x) \in Q_N^0$  может быть представлен в виде

$$q(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x),$$

таким образом, предыдущая проблема состоит в определении таких комплексных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$ , для которых выражение

$$\left\| y^* - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k \right\|_{W_p^{(n)}}$$

принимает минимальное значение. По аппроксимационной теореме, упомянутой в параграфе 3, существуют такие комплексные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$ .

Нетрудно проверить, что при  $1 < p < \infty$ , пространство  $W_p^{(n)}$  — строго нормированное пространство, таким образом, при  $1 < p < \infty$  эти комплексные числа однозначно определены.

Принимая все это во внимание, существует — при  $1 < p < \infty$  — такой единственный полиномиальный вектор  $q_N^*(x) \in Q_N^0$ , для которого выполняется равенство (15).

Имея в виду, что, по предположению,  $Q^0$  лежит всюду плотно в пространстве  $D(L)$ ,  $\delta_N \rightarrow 0$ , если  $N \rightarrow \infty$ .

По теореме 2.6.2 [5] легко видно, что существует постоянная  $k > 0$ , такая, что неравенство

$$(16) \quad \|y\|_{W_p^{(n)}} \leq k \|Ly\|_{L_p}$$

выполняется для любой вектор-функции  $y(x) \in D(L)$ .

Действительно, по предположению об операторе  $L$ , существует  $L^{-1}$ , и по упомянутой теореме  $L^{-1} \in L_p \rightarrow W_p^{(n)}$  является линейным ограниченным оператором, и далее  $R(L^{-1}) = D(L)$ , таким образом существует постоянная  $k > 0$ , такая, что

$$(17) \quad \|L^{-1}\varphi\|_{W_p^{(n)}} \leq k \|\varphi\|_{L_p}$$

для всех вектор-функций  $\varphi \in L_p$ , откуда с введением обозначения  $y = L^{-1}\varphi$  из (17) сразу же вытекает неравенство (16).

Так как  $y^*(x) - q_N(x) \in D(L)$ , поэтому по (16)

$$\|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \leq k \|Ly^* - Lq_N\|_{L_p},$$

откуда, с учетом  $Ly^* = f$

$$\|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \leq k \|f - Lq_N\|_{L_p},$$

то есть, по (13)

$$(18) \quad \|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \leq k \varepsilon_N.$$

Так как  $q_N(x) \in Q_N^0$ , поэтому по определению  $\varepsilon_N$  при (7)

$$\varepsilon_N \leq \|f - Lq_N^*\|_{L_p}.$$

Так как по теореме 1.1 [7]  $L \in W_p^{(n)} \rightarrow L_p$  является линейным ограниченным оператором, определенным во всем пространстве  $W_p^{(n)}$ , поэтому существует постоянная  $k_1$ , такая, что

$$\|Ly\|_{L_p} \leq k_1 \|y\|_{W_p^{(n)}}$$

при всех  $y(x) \in W_p^{(n)}$ , таким образом

$$\varepsilon_N \leq \|f - Lq_N^*\|_{L_p} = \|Ly^* - Lq_N^*\|_{L_p} \leq k_1 \|y^* - q_N^*\|_{W_p^{(n)}}$$

то есть по (15)

$$\varepsilon_N \leq k_1 \delta_N.$$

Из (18) получим:

$$(19) \quad \|y^* - q_N\|_{W_p^{(n)}} \leq k k_1 \delta_N,$$

откуда, по  $\delta_N \rightarrow 0$  следует теорема.

*Замечание 1.* С учетом нормы (с), определенной равенством (23) [6], по доказанной теореме 4.1 получается

$$\|y^* - q_N\|_{W_p^{(c)}}^{(n)} \rightarrow 0, \quad \text{если } N \rightarrow \infty$$

откуда вытекает, что

$$q_N(x) \rightarrow y^*(x)$$

равномерно в  $[a, b]$ , далее, что

$$\frac{d^k}{dx^k} q_N(x) \rightarrow \frac{d^k}{dx^k} y^*(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

равномерно в  $[a, b]$ .

*Замечание 2.* Доказанная теорема предполагает, что  $Q^0$  лежит всюду плотно в пространстве  $D(L)$ . Очевидно, что выполнение этого предположения зависит от функций  $g_1(x), \dots, g_j(x)$  определенных в параграфе 1. В том специальном случае, когда  $g_j(x) = x^j$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), с помощью аппроксимационной теоремы Вейерштрасса можно доказать, что  $Q^0$  лежит всюду плотно в пространстве  $D(L)$ .

*Замечание 3.* С помощью теоремы 4.1 мы можем представить приближенное векторное решение граничной задачи  $Ly = f(x)$ ,  $Uy = 0$ .

Это можно сделать особенно просто при  $p = 2$ , то есть ищем последовательность минимизирующих полиномиальных векторов  $\{q_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$  в следующем виде:

$$(20) \quad q_N(x) = \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k q_k(x)$$

де  $q_1(x), q_2(x), \dots, q_{d_N}(x)$ -произвольный базис в  $Q_N^0$ , и в этом случае

$$(21) \quad \begin{aligned} \|f - Lq_N\|_{L_2}^2 &= \|f\|_{L_2}^2 - (f, Lq_N) - (Lq_N, f) - \|Lq_N\|_{L_2}^2 = \\ &= \|f\|_{L_2}^2 - \sum_{k=1}^{d_N} \bar{\lambda}_k (f, q_k) - \sum_{k=1}^{d_N} \lambda_k (q_k, f) + \sum_{k=1}^{d_N} \sum_{j=1}^{d_N} \lambda_k \bar{\lambda}_j (q_k, q_j), \end{aligned}$$

который представляет собой некоторую квадратичную функцию переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$ . Таким образом нам надо определить только то, при каких значениях  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d_N}$  выражение (21) принимает минимальное значение.

При определенных таким образом постоянным  $\lambda_k$  для вектор-функции  $q_N(x)$ , определенной равенством (20), выполняется неравенство (19), которое означает, что полиномиальный вектор  $q_N(x)$  в норме  $W_p^{(n)}$  аппрок



симирует решение  $y^*(x)$  граничной задачи  $Ly = f(x)$ ,  $Uy = 0$ , где мера аппроксимации зависит очевидно от сходимости к нулю последовательности  $\{\delta_N\}_{N=0}^{\infty}$ .

В целях применения в практике вышеупомянутых способов, нужно рассматривать быстроту сходимости к нулю последовательности  $\{\delta_N\}_{N=0}^{\infty}$ , которая может быть достигнута при задачных функциях  $g_1(x), \dots, g_j(x), \dots$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Соболев, С. Л.*: Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-ва ЛГУ. 1950.
- [2] *Русс, Ф.* – *Секефальви Надь, Б.*: Лекции по функциональному анализу, И. Л. 1954.
- [3] *Ахиезер, Н. И.*: Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М – Л. 1947.
- [4] *Meinardus, G.*: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg – New-York, 1964.
- [5] *Obádovics J. Gyula*: Differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti és peremérték-problémáról. Kandidátusi értekezés. 1966. Вр.
- [6] *Обадович, Й. Дь.*: Определение и исследование пространства вектор-функции с одной переменной  $W_p^{(n)}[a, b]$ . Miskolc, NME. Idegennyelvű kiadványok, XXXI. köf. 1970.
- [7] *Михлин, С. Г.*: Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.

MŰM SZÁMTI

1089 Budapest, Reguly A. u. 57 – 59.