О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

I. ЯВНАЯ СХЕМА

Д. МОЛНАРКА, Р. Х. ФАРЗАН

Кафедра Вычислительной Математики Университета им. Л. Этвеша

(Поступило 15. 4. 1976)

Метод конечных разностей широко используется для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Для линейных уравнений теоретические вопросы разработаны хорошо, известно много теоретически обоснованных схем для решения конкретных классов задач (см. например [1]).

В настоящей работе показано, что одна из простейших схем, а именно явная разностная схема, применима и для решения первой краевой задачи для одномерного параболического уравнения со слабой нелинейностью.

Уравнение и начальные и граничные условия запишем в следующем виде:

$$Lu = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = -f(x,t,u) \tag{1}$$

для $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$,

$$u(x,0) = g(x), \begin{cases} u(0,t) = g_1(t), \\ u(1,t) = g_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $a(x,t) > 0$, $b(x,t)$ и $f(x,t,u)$ — непрерывные функции.

Такого типа краевые задачи встречаются в частности при моделировании некоторых химических процессов. Если

$$\begin{aligned} a(x,t) &= D(x,t) \\ b(x,t) &= v(x,t) - D'_x(x,t) \\ f(x,t,u) &= r(x,t,u) - v'_x(x,t)\,u, \end{aligned} \tag{3}$$

где D и v — коэффициент диффузии и скорость потока, а r — функция источника, то уравнение (1) описывает изменение концентрации исследуемого вещества в химическом реакторе.

В дальнейшем мы будем предполагать, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение. Доказательство этого можно найти, например, в книге [2].

Введем сетку

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, \dots, M, \text{ при } h = \frac{1}{M}$$

$$t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \dots, N, \text{ при } \tau = \frac{T}{N}.$$

На сетке определим сеточные функции:

$$a_i^n = a(x_i, t_n), \quad b_i^n = b(x_i, t_n), \quad u_i^n = u(x_i, t_n).$$

При использовании явной разностной схемы получаем следующую сеточную задачу, являющуюся аппроксимацией исходной краевой дифференциальной задачи (1), (2):

$$(4) \qquad a_i^n \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} - b_i^n \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} - \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = -f_i^n,$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $f_i^n = f(x_i, t_n, y_i^n)$,

$$(5) \qquad y_i^0 = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

$$y_0^n = g_1(t_n), \quad y_M^n = g_2(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Из уравнения (4) y_i^{n+1} можно выразить в явном виде:

$$(6) \qquad y_i^{n+1} = \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n - \frac{\tau}{2h} b_i^n\right) y_{i+1}^n + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2} a_i^n\right) y_i^n + \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n + \frac{\tau}{2h} b_i^n\right) y_{i-1}^n + \tau f_i^n.$$

С учетом (5) система уравнений (6) имеет решение, т.е. можно получить y_n^i во всех узлах сетки при любых f_i^n.

Обозначим через y_h совокупность $\{y_i^n\}_{i=0}^{M}{}_{n=0}^{N}$ и аналогично для u_h и f_h. Тогда систему уравнений (4) можно записать:

$$L_h y_h = -f_h,$$

причем через $L_h y_i^{n+1}$ мы обозначили левую часть уравнения (4).

Можно объединить уравнения (4), (5), вводя оператор $\tilde{L}_h$ во всех узлах сетки, который совпадает с оператором L_h во внутренних узлах сетки и определяется уравнениями (5) в граничных узлах:

$$(7) \qquad \tilde{L}_h y_h = -\tilde{f}_h.$$

Отметим, что $\tilde{f}_h$ совпадает с f_h только во внутренних узлах сетки, а в граничных узлах определяется из условий (5).

Возникает вопрос о сходимости решения y_h сеточной краевой задачи (4), (5), или (7), к решению $u(x, t)$ исходной дифференциальной краевой задачи (1), (2).

Определим на сетке погрешность разностной схемы z_h: $z_i^n = y_i^n - u_i^n$. Решение сеточной задачи сходится к решению дифференциальной задачи, если сеточная норма погрешности схемы z_h стремится к нулю:

$$\|z_h\| \to 0 \quad \text{при} \quad \tau, h \to 0 .$$

В силу линейности разностного оператора $\tilde{L}_h$ для погрешности схемы имеем:

$$\tilde{L}_h z_h = \tilde{L}_h y_h - \tilde{L}_h u_h .$$

Граничные условия аппроксимируются точно, поэтому достаточно рассмотреть это выражение только во внутренних узлах сетки. Запишем:

$$\begin{aligned} L_h z_h &= L_h y_h + f(u_h) - f(u_h) - L_h u_h = \\ &= \left(-f_h + f(u_h)\right) + \left((Lu)_h - L_h u_h\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где $(Lu)_h$ — совокупность значений левой части уравнения (1) в узлах сетки. Здесь для краткости выделен только один аргумент функции f.

Второй член справа в (8) определяет погрешность аппроксимации на сетке оператора L_h, которая для разностной схемы (4), как нетрудно видеть (см. например, [1]), имеет порядок $0(h^2+\tau)$. Если функция $f\in C^{(0,0,1)}$, то по теореме Лагранжа о среднем, в узлах сетки можно записать:

$$f(u^n) - f(y_i^n) = (u_i^n - y_i^n)\bar{f}_i^n .$$

Здесь $\bar{f}_i^n$ — значения производной по $u: f'_u(x_i, t_n, \bar{u})$, где $\bar{u}$ — значение u между u_i^n и y_i^n. Теперь соотношение (8) можно переписать:

$$L_h z_h = -z_h \bar{f}_h + 0(h^2+\tau) . \tag{9}$$

Выразим z_i^{n+1} в явной форме:

$$\begin{aligned} z_i^{n+1} = &\left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n - \frac{\tau}{2h} b_i^n\right) z_{i+1}^n + \left(1 + \tau \bar{f}_i^n - \frac{2\tau}{h^2} a_i^n\right) z_i^n + \\ &+ \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n + \frac{\tau}{2h} b_i^n\right) z_{i-1}^n + \tau\, 0(h^2+\tau) . \end{aligned} \tag{10}$$

Начальные и граничные условия для этих уравнений однородные:

$$\begin{aligned} z_i^0 &= 0, \quad i = 1, \ldots, M-1 , \\ z_0^n &= z_M^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N . \end{aligned} \tag{11}$$

Допустим, что коэффициенты системы разностных уравнений (10) положительны, т.е.

$$\frac{\tau}{h^2} a_i^n - \frac{\tau}{2h} |b_i^n| > 0 ,$$

$$1 + \tau \bar{f}_i^n - \frac{2\tau}{h^2} a_i^n > 0 . \tag{12}$$

Отсюда можно получить следующие оценки для h и τ (мы считаем h достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{h^2}{2} \max_{i,n} |\bar{f}_i^n| < \min_{i,n} (a_i^n) \text{):}$$

$$h < \min_{i,n} \left(\frac{2a_i^n}{|b_i^n|} \right) , \tag{13}$$

$$\frac{h^2}{2 \max\limits_{i,n} (a_i^n)} \left(1 - \max_{i,n} \left(\frac{\bar{f}_i^n}{a_i^n} \right) h^2 \right) > \tau . \tag{14}$$

Здесь всюду максимум и минимум берутся при $1 \le i \le M-1$ и $0 \le n \le$ $\le N-1$. Нетрудно видеть, что (13) легко удовлетворяется для достаточно мелкой сетки. Что касается условия (14), то при малых h оно приближается к соотношению для h и τ:

$$\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2 \max\limits_{i,n} (a_i^n)} . \tag{15}$$

Теорема. Если выполняются условия (12), или (13), (14), то решение сеточной задачи (4), (5) сходится к решению исходной дифференциальной задачи (1), (2), причем скорость сходимости определяется соотношением:

$$\|z_h\|_C \le K\, 0(h^2 + \tau) , \tag{16}$$

где K не зависит от h и τ, и сеточная норма C определяется соотношением

$$\|z_h\|_C = \max_{i,n} |z_i^n| .$$

Доказательство. Из условия положительности коэффициентов следует, что справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |z_i^{n+1}| &\le \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n - \frac{\tau}{2h} b_i^n \right) |z_{i+1}^n| + \left(1 + \tau \bar{f}_i^n - \frac{2\tau}{h^2} a_i^n \right) \cdot |z_i^n| + \\ &+ \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n + \frac{\tau}{2h} b_i^n \right) |z_{i-1}^n| + \tau\, 0\, (h^2 + \tau) \le \\ &\le \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n - \frac{\tau}{2h} b_i^n \right) \max_i |z_i^n| + \left(1 + \tau \bar{f}_i^n - \frac{2\tau}{h^2} a_i^n \right) \max_i |z_i^n| + \\ &+ \left(\frac{\tau}{h^2} a_i^n + \frac{\tau}{2h} b_i^n \right) \max_i |z_i^n| + \tau\, 0\, (h^2 + \tau) , \end{aligned} \tag{17}$$

$$i = 1, \ldots, M-1, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Здесь максимум берется по $i = 1, \ldots, M-1$. Из этого неравенства очевидно получается:

$$\max_i |z_i^{n+1}| \leq \left(1 + \tau \max_i |\bar{f}_i^n|\right) \cdot \max_i |z_i^n| + \tau\, 0(h^2 + \tau). \tag{18}$$

Заменяя оценку $\max z_i^n$ через $\max z_i^{n-1}$ и продолжая процесс до $n = 1$, получим из (18):

$$\max_i |z_i^n| \leq (1 + \tau\, l)^n \max_i |z_i^0| + \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \tau\, l)^j \tau\, 0(h^2 + \tau), \tag{19}$$

где введено обозначение: $l = \max_{x,t,u} |f_u'(x,t,u)| \geq \max_{i,n} |\bar{f}_i^n|$.

Выше было показано, (11), что начальные условия однородные: $z_i^0 = 0$. Остается оценить второй член справа в неравенстве (19). Верно следующее соотношение:

$$(1 + \tau\, l)^j \leq e^{j\tau e} \leq e^{Tl}.$$

Поскольку $f(x, t, u)$ — непрерывно дифференцируемо по u, $l < \infty$, и можно использовать следующую оценку:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1 + \tau\, l)^j \tau\, 0(h^2 + \tau) \leq n\tau\, 0(h^2 + \tau)\, e^{Tl} = K\, 0(h^2 + \tau), \tag{20}$$

где $K = Te^{Tl}$ не зависит от i и n, т.е. оценка (20) верна для всех n. По определению сеточной нормы C из (19), (20) получаем (16). Таким образом, решение сеточной задачи (4), (5) сходится к решению дифференциальной задачи (1), (2) в норме C, т.е. y_i^n стремятся к u_i^n в каждой точке сетки.

Другим важным вопросом, кроме сходимости решения сеточной задачи, является вопрос об устойчивости разностной задачи, т.е. о равномерной зависимости ее решения от входных данных: от начальных и граничных условий и от правых частей уравнений (4). Равномерная зависимость от входных данных при условии $2^{-q}/\tau \ll 1$ (которое выполняется практически всегда) означает устойчивость решения к влиянию ошибок округления [4].

Наряду с сеточной функцией f_h будем рассматривать «возмущенную» функцию $\tilde{f}_h$ и соответственно им два уравнения:

$$L_h y_h = -f_h, \quad L_h \tilde{y}_h = -\tilde{f}_h. \tag{21}$$

Так как для обоих уравнений начальные и граничные условия аппроксимируются точно, (5), устойчивость схемы определяется неравенством:

$$\|y_h - \tilde{y}_h\| \leq M\, \|f_h - \tilde{f}_h\|. \tag{22}$$

Обозначим $\tilde{z}_h = y_h - \tilde{y}_h$ и вычтем второе уравнение (21) из первого. Вследствие линейности разностного оператора,

$$L_h \tilde{z}_h = \tilde{f}_h - f_h. \tag{23}$$

Выпишем $\tilde{z}_i^{n+1}$ в явной форме. При этом получается выражение, сходное с (10):

$$\tilde{z}_i^{n+1} = \left(\frac{\tau}{h^2}a_i^n - \frac{\tau}{2h}b_i^n\right)\tilde{z}_{i+1}^n + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}a_i^n\right)\tilde{z}_i^n + \tag{24}$$
$$+\left(\frac{\tau}{h^2}a_i^n + \frac{\tau}{2h}b_i^n\right)\tilde{z}_{i-1}^n + \tau(f_i^n - \tilde{f}_i^n).$$

Начальные и граничные условия для $\tilde{z}_h$ будут также однородными:

$$\tilde{z}_i^0 = 0, \quad i = 1, \ldots, M-1, \tag{25}$$
$$\tilde{z}_0^n = \tilde{z}_M^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{z}_n = \{0, \tilde{z}_1^n, \tilde{z}_2^n, \ldots, \tilde{z}_{M-1}^n, 0\}^T,$$
$$\omega_n = \{0, \tau(f_1^n - \tilde{f}_1^n), \ldots, \tau(f_{M-1}^n - \tilde{f}_{M-1}^n), 0\}^T -$$

— $(M+1)$ — мерные вектор-столбцы, D_n — трехдиагональная матрица $(M+1)\times(M+1)$, отличные от нуля элементы которой:

$$d_{ii-1}^n = \frac{\tau}{h^2}a_i^n - \frac{\tau}{2h}b_i^n,$$
$$d_{ii}^n = 1 - \frac{2\tau}{h^2}a_i^n, \quad i = 1, \ldots, M-1. \tag{26}$$
$$d_{ii+1}^n = \frac{\tau}{h^2}a_i^n + \frac{\tau}{2h}b_i^n.$$

Теперь систему уравнений (24) можно переписать в виде:

$$\mathbf{z}_{n+1} = D_n \mathbf{z}_n + \omega_n. \tag{27}$$

Потребуем, чтобы элементы (26) матрицы D_n были положительными. Это приводит к условиям, совпадающим с (13), (15).

Оценим норму матрицы D_n и вектора ω_n. Пусть $\mathbf{v}$ — произвольный вектор, у которого $v_0 = v_M = 0$, и пусть $\mathbf{w} = D_n\mathbf{v}$ $(w_0 = w_M = 0)$. Для координаты w_i, $1 \le i \le M-1$ имеем:

$$w_i = (D_n\mathbf{v})_i = d_{ii-1}^n v_{i-1} + d_{ii}^n v_i + d_{ii+1}^n v_{i+1}.$$

Так как по предположению все элементы (26) положительны,

$$|w_i| \le (d_{ii-1}^n + d_{ii}^n + d_{ii+1}^n)\max_i v_i.$$

Очевидно, $d_{ii-1}^n + d_{ii}^n + d_{ii+1}^n = 1$. Поэтому,

$$\max_i |w_i| \leq \max_i v_i ,$$

или, если ввести понятие «нормы на слое» [4]: $\|v\|_{U_h^n} = \max_i |v_i|$, получим:

$$\|w\|_{U_h^{n+1}} = \|D_n \mathbf{v}\|_{U_h^{n+1}} \leq \|\mathbf{v}\|_{U_h^n} .$$

Отсюда, согласно определению нормы матрицы на слое и вследствие (25),

$$\|D_n\|_n \leq 1 . \tag{28}$$

Для вектора ω_n имеем:

$$\|\omega_n\|_{U_h^n} = \max_i (\tau\, |f_i^n - \tilde{f}^n|) ,$$

или, используя (23),

$$\|\omega_n\|_{U_h^n} = \tau \max_i |L_h z_i^{n+1}| \leq \tau \max_{i,n} |L_h z_i^{n+1}| ,$$

$$1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 .$$

Переходя справа к норме на всей сетке, находим:

$$\|\omega_n\|_{U_h^n} \leq \tau\, \|L_h z_h\|_C . \tag{29}$$

Для уравнения (27) полученные соотношения (28), (29), вместе с очевидным равенством $\|z_0\|_{U_h^0} = 0$, удовлетворяют условиям «Теоремы о достаточных условиях корректности двухслойных аппроксимаций нестационарных задач» [4], из которой следует выполнение неравенства:

$$\|z_h\|_C \leq M\, \|L_h z_h\|_C ,$$

представляющего собой другую форму записи (22). Таким образом, предложенная разностная схема (10) при выполнения условий (13), (15) устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. «Наука», М. 1971.
[2] *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. «Наука», М. 1967.
[3] *С. К. Годунов, В. С. Рябенький.* Разностные схемы. «Наука, М. 1973.
[4] *Н. С. Бахвалов.* Основы вычислительной математики, ч. IV. Изд. МГУ, М. 1968.